Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (3 octobre 2016) **Correction**

Question 1. *Calculez le module de $2-3\boldsymbol{i}$ ainsi que l'inverse de ce nombre dans $\mathbb{C}$. Faites de même pour $(1+2\boldsymbol{i})^{-1}$.*

On a $|2-3\boldsymbol{i}| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$.
Par la formule $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ (pour $z \neq 0$), son inverse est $\dfrac{2+3\boldsymbol{i}}{13} = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}\boldsymbol{i}$.
L'inverse de $(1+2\boldsymbol{i})^{-1}$ est $(1+2\boldsymbol{i})$ car $\big((1+2\boldsymbol{i})^{-1}\big)^{-1} = 1+2\boldsymbol{i}$.
On a $|1+2\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Par la formule $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, on a $|(1+2\boldsymbol{i})^{-1}| = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Question 2. *Soit la droite D passant par les points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) où $x_1,y_1,x_2,y_2 \in \mathbb{R}$ et $x_1 \neq x_2$ (il n'est par contre pas exclu que $y_1 = y_2$).*

- *Donnez une équation paramétrique et une équation cartésienne de D. Expliquez votre démarche.*
- *Donnez, en fonction de x_1,y_1,x_2,y_2, les coordonnées du point d'intersection entre D et l'axe des y. Expliquez.*

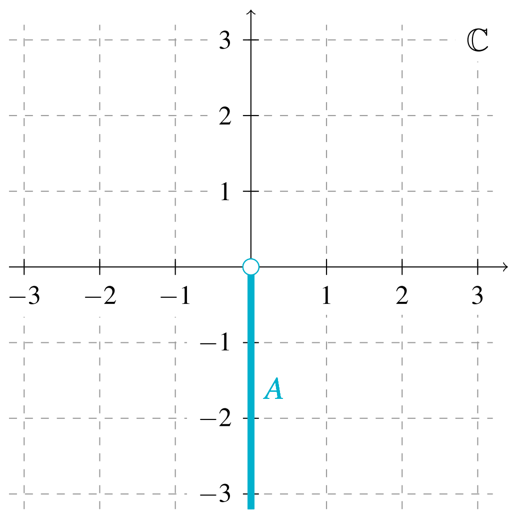
Voir correction du test 3, 29 septembre 2008, Question 4.

Question 3.

(a) *Représentez géométriquement dans le plan complexe l'ensemble $A := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = 3\pi/2\}$.*

(b) *A-t-on que $0 \in A$? Expliquez votre réponse.*

A est la demi-droite qui démarre à $0 \in \mathbb{C}$ et passe par $-\boldsymbol{i}$ car $\operatorname{Arg}(-\boldsymbol{i}) = \frac{3\pi}{2}$ et tous les complexes d'une même demi-droite dont l'extrémité est l'origine ont le même argument. $0 \notin A$ car l'argument de 0 n'est pas défini.



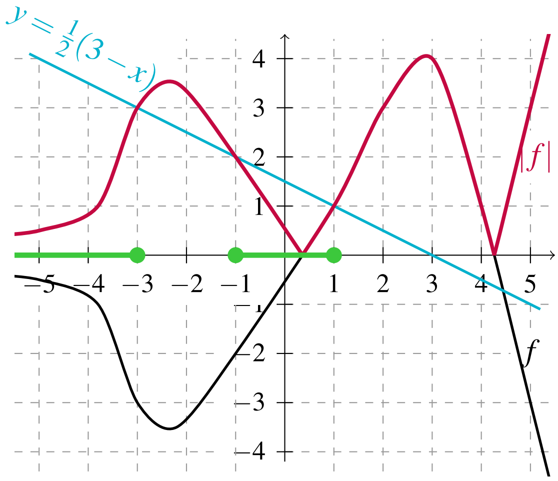
Question 4. *Soit $z = a + b\boldsymbol{i} \neq 0$. On a vu que z admet une forme dite « trigonométrique » unique*

$$z = |z|\big(\cos(\operatorname{Arg}(z)) + \sin(\operatorname{Arg}(z))\boldsymbol{i}\big)$$

(vous ne devez donc pas reprouver cette affirmation). Quelle relation lie a et b à $|z|$ et $\arg(z)$? Justifiez votre réponse.

Par définition de l'égalité de deux complexes, on a $a = |z|\cos(\operatorname{Arg}(z))$ et $b = |z|\sin(\operatorname{Arg}(z))$.

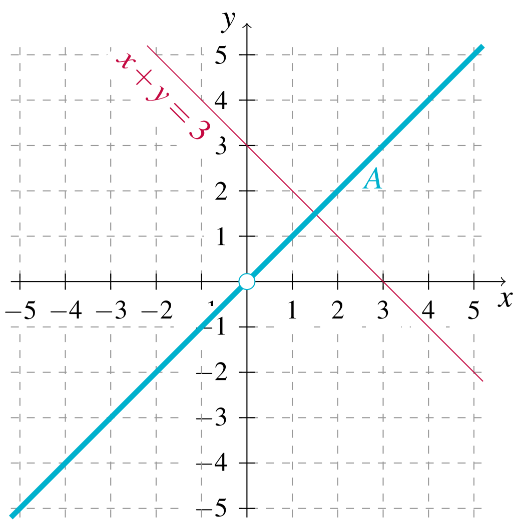
Question 5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le graphe est esquissé ci-dessous. À partir de celui-ci, écrivez l'ensemble $A := \big\{x \in \mathbb{R} \bigm| |f(x)| \leqslant \frac{1}{2}(3-x)\big\}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles. Expliquez votre démarche.*



Pour tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |f(x)|$, on recopie celui de f pour les x tels que $f(x) \geqslant 0$ (vu que, dans ce cas, $|f(x)| = f(x)$) et on prend le symétrique orthogonal par rapport à l'axe des abscisses de celui de f pour les x tels que $f(x) < 0$ (puisque, dans ce cas, $|f(x)| = -f(x)$).
Le graphe de la droite $y = \frac{1}{2}(3-x)$ se trace aisément en prenant deux points (x, y) qui y appartiennent (par exemple $(-1, 2)$ et $(1, 1)$).

Pour écrire A, qui est l'ensemble des solutions de l'inéquation $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}(3-x)$, sous la forme d'une union d'intervalles, il faut déterminer les x tels que le graphe de $x \mapsto |f(x)|$ soit en dessous de la droite $y = \frac{1}{2}(3-x)$. Le graphique montre que $A = \,]-\infty, -3] \cup [-1, 1]$.

Question 6. *Soit l'ensemble $A = \big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (\alpha, \beta)$ est un vecteur normal de la droite d'équation $x + y = 3\big\}$. Décrivez géométriquement cet ensemble et représentez le graphiquement. Détaillez les arguments qui vous permettent de décrire l'objet représenté.*



Un vecteur normal de la droite d'équation $x + y = 3$ est $(1, 1)$. On a vu que tout multiple non nul de ce vecteur est encore un vecteur normal. Donc $A = \big\{\lambda(1, 1) \bigm| \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\}$. Il s'agit de la droite d'équation $y = x$ privée du point $(0, 0)$ (car $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Question 7.

(a) *Soit la droite $D_1 \equiv -3y-2x = 1-6y+5x$. Donnez une équation paramétrique de D_1. Expliquez votre démarche.*

(b) *Soit la droite $D_2 \equiv (x,y) = (2\lambda-1, -4-4\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez une équation cartésienne de la droite D parallèle à D_2 et passant par le point $(3,0)$.*

(a) On a $D_1 \equiv -7x+3y = 1$. Donc $(-7,3)$ est un vecteur normal de D_1. On en déduit que $(3,7)$ est un vecteur directeur de D_1 car $\big((-7,3) \mid (3,7)\big) = -21+21 = 0$. En remplaçant par exemple x par 0 dans l'équation de D_1, on trouve $y = \frac{1}{3}$. Donc $(0, \frac{1}{3})$ est un point de D_1. Ainsi une équation paramétrique de D_1 est

$$(x,y) = \left(0, \frac{1}{3}\right) + \lambda(3,7), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) On a $D_2 \equiv (x,y) = (-1,-4)+\lambda(2,-4)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $(2,-4)$ est un vecteur directeur de D_2 et donc de D également puisque ces deux droites sont parallèles. Donc $(4,2)$ est un vecteur normal de D car $\big((2,-4) \mid (4,2)\big) = 8-8 = 0$. Donc $D \equiv 4x+2y = c$. Comme $(3,0) \in D$, on trouve c en remplaçant x par 3 et y par 0. On a $4.3+2.0 = c$, c'est-à-dire $c = 12$. En conclusion, $D \equiv 4x+2y = 12$.

Question 8. *Résolvez algébriquement l'inéquation suivante :*

$$\frac{|x-1|}{x^2-4} \leqslant -1 \tag{1}$$

Exprimez ses solutions sous la forme d'une union disjointe d'intervalles.

Commençons par examiner les conditions d'existence. Le seul problème pour l'existence des expressions de (1) est le dénominateur qui doit être non nul. On demande donc que $x^2-4 \neq 0$, c'est-à-dire $(x+2)(x-2) \neq 0$, ou encore $x \neq -2$ <u>et</u> $x \neq 2$.

Comme nous voudrions multiplier les deux membres de (1) par x^2-4 pour éliminer le dénominateur, nous devons connaître le signe de ce dernier. Vu qu'il s'agit d'un polynôme du second degré, il a le signe du coefficient de x^2 (ici 1) à l'extérieur des racines et le signe opposé à l'intérieur. On a donc le tableau de signes suivant :

x		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

Distinguons deux cas.

- Si $x^2-4 > 0$, le membre de gauche de (1) est $\geqslant 0$ et donc ne pourra jamais être plus petit ou égal à un nombre négatif. Par conséquent, aucun x ne satisfait (1) dans ce cas i.e., l'inéquation (1) ne possède pas de solution parmi les x tels que $x^2-4 > 0$.

- Si $x^2-4<0$, c'est-à-dire si $x \in \left]-2,2\right[$, alors (1) est équivalent à $|x-1| \geqslant -(x^2-4)$. Pour enlever la valeur absolue, distinguons deux sous-cas.
  - Si $x-1 \geqslant 0$, c'est-à-dire (tenant compte du cas) si $x \in \left[1,2\right[$, l'inéquation devient après réduction
  $$x^2+x-5 \geqslant 0.$$
  Il s'agit du signe d'un simple polynôme du second degré qui est positif à l'extérieur de ses racines puisque le coefficient de x^2 est positif. Ceci donne lieu au tableau de signes suivant :

x		$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$		1		$\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$		2	
x^2+x-5	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

  Cependant, il ne faut pas oublier qu'on travaille avec des x dans $\left[1,2\right[$ et donc il ne faut garder que les solutions dans cet ensemble. Les solutions pour le sous-cas présent sont donc
  $$x \in \left[\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, 2\right[.$$
  - Si $x-1<0$, c'est-à-dire si $x \in \left]-2,1\right[$, $|x-1| = -(x-1)$ et l'inéquation devient après réduction
  $$x^2-x-3 \geqslant 0.$$
  Comme ci-dessus, le tableau de signe de x^2-x-3 est aisé.

x		-2		$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	
x^2-x-3	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

  Ensuite, il ne faut pas oublier de filtrer les solutions par rapport aux x dont nous nous occupons ici, à savoir $x \in \left]-2,1\right[$. Les solutions pour ce sous-cas sont donc
  $$x \in \left]-2, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right].$$

En conclusion, en rassemblant les solutions trouvées dans les différents cas, on a que
$$x \text{ est solution de (1)} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-2, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, 2\right[.$$

Question 9. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $z = \lambda+1-(\lambda^2-1)\boldsymbol{i}$. Déterminez les conditions que λ doit satisfaire afin que z^{-1} existe. Pour ce(s) λ, calculez explicitement z^{-1}.*

On a vu au cours que z^{-1} existe ssi $|z| \neq 0$ ssi $|z|^2 \neq 0$. Cette condition d'existence devient dans le cas étudié :
$$(\lambda+1)^2+(-1)^2(\lambda^2-1)^2 \neq 0.$$
Cette condition est équivalente à
$$(\lambda+1)^2\big(1+(\lambda-1)^2\big) \neq 0.$$

C'est équivalent à $\lambda+1 \neq 0$ et $\lambda^2-2\lambda+2 \neq 0$. Le polynôme X^2-2X+2 n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ car $\Delta=-4$. Donc on obtient comme condition $\lambda \neq -1$.
Dans le cas où $\lambda \neq -1$, on a

$$z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{(\lambda+1)+(\lambda^2-1)\boldsymbol{i}}{(\lambda+1)^2(\lambda^2-2\lambda+2)}=\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+2)}+\frac{\lambda-1}{(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+2)}\boldsymbol{i}.$$