

Mathématique Élémentaire

Test n° 4

(10 octobre 2016)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Soit le système

$$\begin{cases} x \cos \theta - y \sin \theta = \pi^2 \\ x \sin \theta + y \cos \theta = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

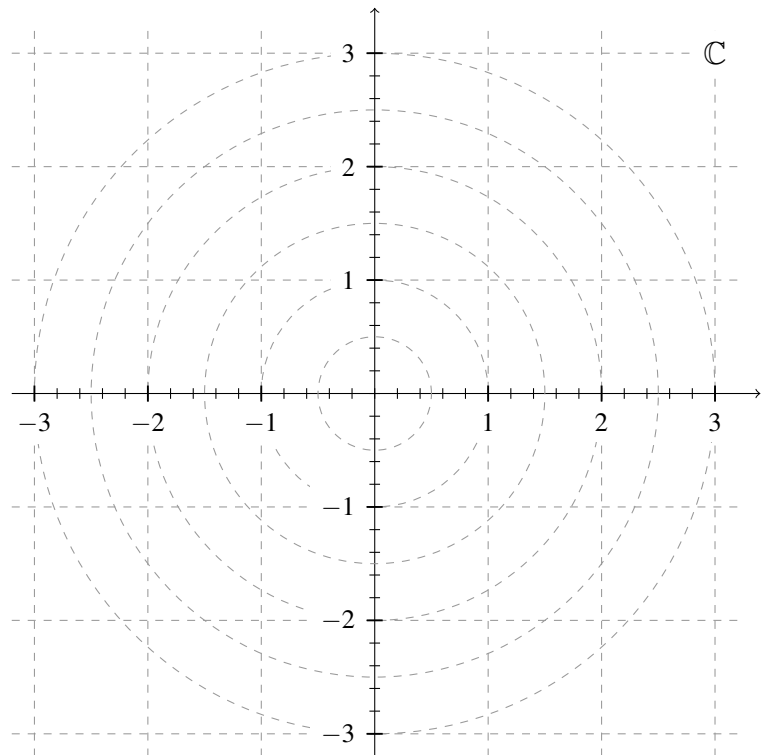
où les inconnues sont x , y et θ est un paramètre réel. Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de θ ce système possède une unique solution. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Soit $a = 6/5$.

- (a) Dessinez dans le plan complexe l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = a\}$.
- (b) Parmi les éléments de A , placez le(s) complexe(s), s'ils existent, de module 2.
- (c) Pour le(s) complexe(s) z trouvés en (b), calculez $\Im z$, $z/2$ et z^{-1} . Placez le(s) z^{-1} trouvés dans le plan complexe. Justifiez brièvement comment vous placez les points demandés dans \mathbb{C} .



Question 3. Soit le système de deux équations à deux inconnues

/3

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels.

(a) Que vaut le déterminant de ce système ?

(b) Supposons que le déterminant du système soit non nul. Sans résoudre le système, montrez que

$$\left(\frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \right)$$

est l'unique solution du système. Expliquez votre démarche.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4. Résolvez l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{x + \sqrt{|x| + \frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{x + 1}. \quad (1)$$

L'ensemble des solutions doit être exprimé sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

/6

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Calculer $\text{Arg}(\bar{z})$ en fonction de $\text{Arg}(z)$. Expliquez votre démarche.

/2

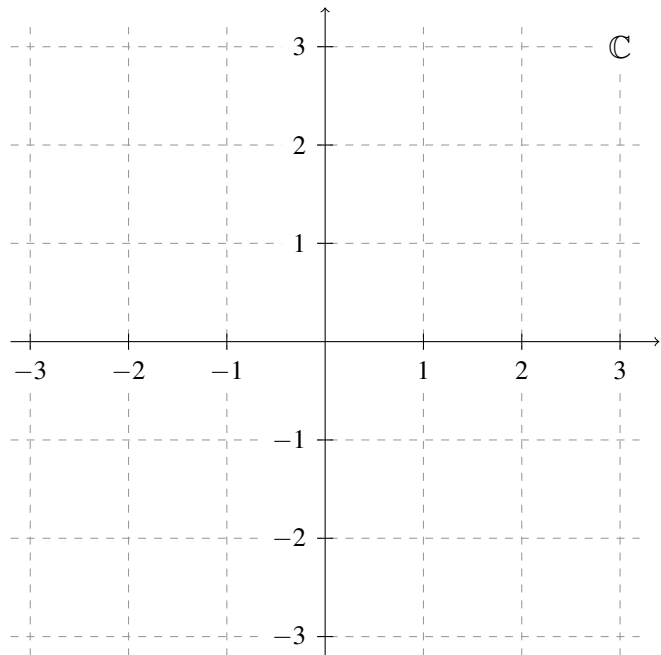
Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/5

Question 6.

- (a) Donner la forme trigonométrique de $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (b) Donnez la forme trigonométrique de $r \in \mathbb{R}^{>0}$.
- (c) Donnez la forme trigonométrique de $z \in \mathbb{R}^{<0}$.
- (d) Soit $\theta \in \mathbb{R}^{>0}$. Donnez la forme trigonométrique de θi .
- (e) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Donnez la forme trigonométrique de $1 + i \operatorname{tg} \theta$.

Justifiez vos réponses en plaçant dans chaque cas les(s) complexe(s) considéré(s) dans le plan complexe (pour r, z, θ , faites un choix raisonnable).



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. En utilisant la formule de De Moivre, à savoir $(\operatorname{cis} \theta)^n = \operatorname{cis}(n\theta) = \operatorname{cis}((n\theta) \bmod 2\pi)$,

/4

(a) prouvez que $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^6 = 1$;

(b) donnez une formule pour $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Justifiez-la.