Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (10 octobre 2016) **Correction**

Question 1. *Soit le système*

$$\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = \pi^2 \\ x\sin\theta + y\cos\theta = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

où les inconnues sont x, y et θ est un paramètre réel. Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de θ ce système possède une unique solution. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Voir correction du test 3, 29 septembre 2008, question 6.

Question 2. *Soit $a = 6/5$.*

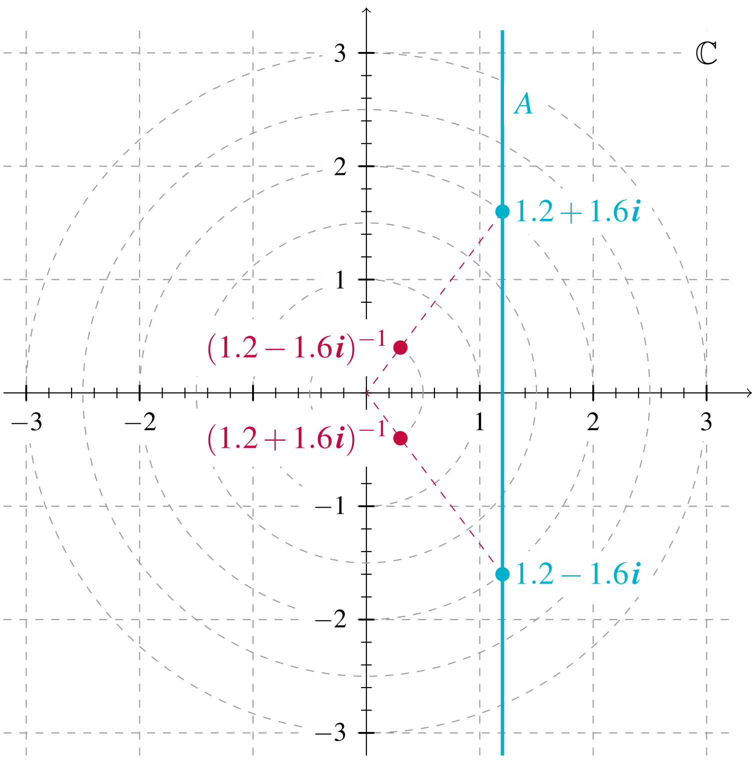
(a) *Dessinez dans le plan complexe l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re\mathrm{e}\, z = a\}$.*

(b) *Parmi les éléments de A, placez le(s) complexe(s), s'ils existent, de module 2.*

(c) *Pour le(s) complexe(s) z trouvés en (b), calculez $\Im\mathrm{m}\, z$, $z/2$ et z^{-1}. Placez le(s) z^{-1} trouvés dans le plan complexe. Justifiez brièvement comment vous placez les points demandés dans $\mathbb{C}$.*

(a) A est la droite verticale d'abscisse $\frac{6}{5}$ puisque la partie réelle est constante.

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid z \in A \wedge |z| = 2\}$, c'est-à-dire que ces points sont à l'intersection de la droite A et du cercle de rayon 2. Il y en a deux, notons les z_1 et z_2. On a si $z \in B$, $|z| = 2 = \sqrt{(\Re\mathrm{e}\, z)^2 + (\Im\mathrm{m}\, z)^2}$, c'est à dire que $2 = \sqrt{\frac{36}{25} + (\Im\mathrm{m}\, z)^2}$, on voit que $(\Im\mathrm{m}\, z)^2 = \frac{64}{25}$ ou encore que $\Im\mathrm{m}\, z = \frac{8}{5}$ ou $\Im\mathrm{m}\, z = -\frac{8}{5}$.



(c) Vu les notations choisies, on a $(\Im\mathrm{m}\, z_1) = \frac{8}{5}$ et $(\Im\mathrm{m}\, z_2) = -\frac{8}{5}$.

Par conséquent $\frac{z_1}{2} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\boldsymbol{i}$ et $\frac{z_2}{2} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\boldsymbol{i}$. Il reste à calculer z_1^{-1} et z_2^{-1}. Par la formule $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, on obtient

$$z_1^{-1} = \frac{\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\boldsymbol{i}}{4} = \frac{3}{10} - \frac{4}{10}\boldsymbol{i}$$
$$z_2^{-1} = \frac{\frac{6}{5} + \frac{8}{5}\boldsymbol{i}}{4} = \frac{3}{10} + \frac{4}{10}\boldsymbol{i}$$

Question 3. *Soit le système de deux équations à deux inconnues*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels.

(a) *Que vaut le déterminant de ce système ?*

(b) *Supposons que le déterminant du système soit non nul. Sans résoudre le système, montrez que*

$$\Big(\frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\Big)$$

est l'unique solution du système. Expliquez votre démarche.

Voir correction du test 3, 28 septembre 2009, question 2.

Question 4. *Résolvez l'inéquation suivante :*

$$\frac{1}{x + \sqrt{|x| + \frac{1}{2}}} \leqslant \frac{1}{x+1}. \tag{1}$$

L'ensemble des solutions doit être exprimé sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

Commençons par déterminer les conditions d'existence de (1). Puisque $|x| + \frac{1}{2} \geqslant 0$, la racine carrée existe toujours. Les deux conditions proviennent du fait que les dénominateurs doivent être non nuls :

- $x + \sqrt{|x| + \frac{1}{2}} \neq 0$ et
- $x + 1 \neq 0$, i.e., $x \neq -1$.

Nous devons trouver les x qui satisfont $x+\sqrt{|x|+1/2}=0$ et les rejeter pour satisfaire la première condition. Cependant, la suite des calculs va aussi nécessiter de connaître le signe de cette expression. Nous allons donc résoudre $x+\sqrt{|x|+1/2}\geqslant 0$, sachant qu'il est facile de suivre les égalités et que $x+\sqrt{|x|+1/2}<0$ sur le complémentaire des solutions de cette inégalité.

L'inégalité à résoudre peut se réécrire $\sqrt{|x|+1/2}\geqslant -x$. Distinguons deux cas :

- Si $x\geqslant 0$, alors $-x\leqslant 0$ et l'inégalité est toujours satisfaite car une racine carrée est toujours $\geqslant 0$. De plus on n'a jamais égalité car, pour $x>0$, on a $\sqrt{|x|+1/2}\geqslant 0>-x$ et, pour $x=0$, on a $\sqrt{|x|+1/2}=\sqrt{1/2}>0$.
- Si $x<0$, les deux membres de l'inégalité sont positifs et on peut les élever au carré sans changer le sens de l'inégalité. Notons aussi que, dans ce cas, $|x|=-x$. On doit donc résoudre $-x+1/2\geqslant (-x)^2=x^2$, c'est-à-dire
$$x^2+x-\tfrac{1}{2}\leqslant 0.$$
Ceci a lieu pour les valeurs de x entre les deux racines du polynôme, c'est-à-dire pour $x\in[\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$. Comme on ne traite ici que les $x<0$, on a que les solutions pour ce cas sont $x\in[\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ 0[$.

Au final on trouve le tableau de signe suivant. Comme nous aurons aussi besoin du signe de $x+1$, nous l'avons ajouté.

x		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		-1		0	
$x+\sqrt{\lvert x\rvert+1/2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Les **conditions d'existence** sont donc $x\neq\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $x\neq -1$.

Pour résoudre l'inéquation (1), distinguons deux cas :

- Si $x<\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ou $x>-1$, il y a soit deux changements de signe, soit aucun, lorsqu'on multiplie par les deux dénominateurs. L'inéquation (1) est donc équivalente à
$$x+1\leqslant x+\sqrt{|x|+\tfrac{1}{2}}\quad\text{i.e.,}\quad 1\leqslant\sqrt{|x|+\tfrac{1}{2}}.$$
Comme les deux membres de l'inéquation sont positifs, on peut élever au carré sans changer le sens de l'inégalité. Celle-ci est donc équivalente à $1\leqslant |x|+\frac{1}{2}$ ou encore à $|x|\geqslant\frac{1}{2}$. Les solutions sont donc $x\in\,]-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},+\infty[$. En tenant compte des conditions de ce cas, on réduit les solutions à $x\in\,]-\infty,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}[\,\cup\,]-1,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},+\infty[$.
- Si $x\in\,]\frac{-1-\sqrt{3}}{2},-1[$, l'inéquation (1) est équivalente à (en utilisant le même raisonnement que pour le point ci-dessus) :
$$x+1\geqslant x+\sqrt{|x|+\tfrac{1}{2}}\quad\text{i.e.,}\quad 1\geqslant\sqrt{|x|+\tfrac{1}{2}}.\quad\text{i.e.,}\quad |x|\leqslant\tfrac{1}{2}\quad\text{i.e.,}\quad x\in[-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}].$$
Aucune de ces solutions n'est dans $]\frac{-1-\sqrt{3}}{2},-1[$ et l'inéquation (1) n'a donc pas de solution pour ce cas.

En conclusion, on a que

$$(1)\quad\Leftrightarrow\quad x\in\left]-\infty,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[.$$

Question 5. *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Calculer $\operatorname{Arg}(\bar{z})$ en fonction de $\operatorname{Arg}(z)$. Expliquez votre démarche.*

L'intuition semble dire $\operatorname{Arg}(\bar{z}) = 2\pi - \operatorname{Arg}(z)$, sauf dans le cas où $\operatorname{Arg}(z) = 0$.

Premier cas : $\operatorname{Arg}(z) = 0$, i.e. $z \in \mathbb{R}^{>0}$, donc $\bar{z} = z$ et dans ce cas $\operatorname{Arg}(\bar{z}) = \operatorname{Arg}(z)$.

Deuxième cas : $\operatorname{Arg}(z) \neq 0$, on a $\operatorname{Arg}(\bar{z}) = 2\pi - \operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$ car $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}^{>0}$ et on sait que $\operatorname{Arg}(z \cdot \bar{z}) = \operatorname{Arg}(|z|^2) = 0$ et on a vu que $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = (\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) \bmod 2\pi$.
On en déduit que $\operatorname{Arg}(z \cdot \bar{z}) \bmod 2\pi = 0$ i.e., $\operatorname{Arg}(\bar{z}) = 2\pi - \operatorname{Arg}(z)$ car $\operatorname{Arg}(z) \neq 0$.

Question 6.

(a) *Donnez la forme trigonométrique de $\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

(b) *Donnez la forme trigonométrique de $r \in \mathbb{R}^{>0}$.*

(c) *Donnez la forme trigonométrique de $z \in \mathbb{R}^{<0}$.*

(d) *Soit $\theta \in \mathbb{R}^{>0}$. Donnez la forme trigonométrique de $\theta\boldsymbol{i}$.*

(e) *Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Donnez la forme trigonométrique de $1 + \boldsymbol{i} \operatorname{tg}\theta$.*

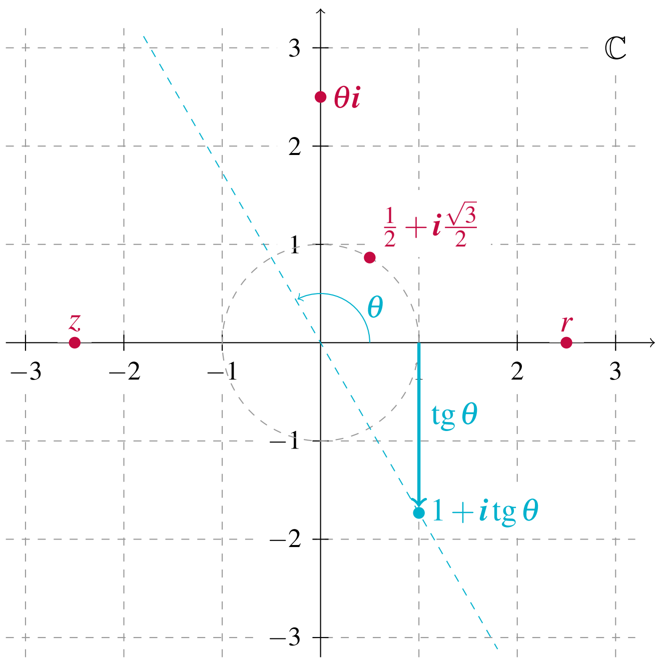
Justifiez vos réponses en plaçant dans chaque cas les(s) complexe(s) considéré(s) dans le plan complexe (pour r, z, θ, faites un choix raisonnable).

(a) On constate que le module du complexe $\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ est 1. Il est dans le premier quadrant sur le cercle trigonométrique, son argument a pour cosinus $\frac{1}{2}$. Par conséquent, par la table des angles remarquables, on trouve l'angle $\frac{\pi}{3}$. Donc la forme trigonométrique est $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{3})$.

(b) Dans ce cas, la forme trigonométrique de r est $r \cdot \operatorname{cis} 0$.

(c) Dans ce cas, la forme trigonométrique de z est $(-z) \cdot \operatorname{cis}\pi$.

(d) La forme trigonométrique de $\theta\boldsymbol{i}$ est $\theta \cdot \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$.



(e) On a $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ quand cela existe, i.e., $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ et $\theta \neq \frac{3\pi}{2}$. En posant $\theta' := \theta + \pi$, on a $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\theta+\pi)$.

Par ailleurs, en se rappelant que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on a

$$|1+\boldsymbol{i}\operatorname{tg}\theta| = \sqrt{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \left|\frac{1}{\cos\theta}\right| = |\cos\theta|^{-1}.$$

Premier cas : Si $\theta \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $1+\boldsymbol{i}\operatorname{tg}\theta = (\cos\theta)^{-1}\operatorname{cis}\theta$.

Deuxième cas : Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, on a $1+\boldsymbol{i}\operatorname{tg}\theta = -(\cos\theta)^{-1}\operatorname{cis}\big((\theta+\pi) \bmod 2\pi\big)$.

Question 7. *En utilisant la formule de De Moivre, à savoir* $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis}(n\theta) = \operatorname{cis}\big((n\theta) \bmod 2\pi\big)$*,*

(a) prouvez que $\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$ *;*

(b) donnez une formule pour $\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$*. Justifiez-la.*

(a) À la question précédente, on a vu que

$$\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}.$$

Par la formule de De Moivre, on a $\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}\right)^6 = \operatorname{cis}\frac{6\pi}{3} = \operatorname{cis}2\pi = \operatorname{cis}0 = 1$.

(b) Vu que $\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$, on a $\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n \bmod 6}$.

En effet, divisons $n \in \mathbb{N}$ par 6 : il existe $\ell \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$ tels que $n = \ell \cdot 6 + r$. Il s'ensuit que $\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\ell\cdot 6+r}$. Par les règles de l'exponentiation, et le point (a), on obtient

$$\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\ell\cdot 6}\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^r = \left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^r$$

car $\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6\cdot\ell} = \left(\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6\right)^\ell = 1^\ell = 1$.