Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (17 octobre 2016)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. /4

(a) Donnez explicitement la matrice $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ définie par $M_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot 2^i \cdot j$.

(b) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculez, si possible, $(BA^t - 2C)^t$. (Pour rappel, si X est une matrice, X^t désigne la transposée de X.)

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 2. Soit le système

$$\begin{cases} (\lambda-3)x+y=0 \\ x+(\lambda-3)y=0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Montrez que, quelle que soit la valeur de λ, le système n'est jamais impossible.

(b) Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

/4

$$f(x) = \tfrac{3}{4}x^2 + \sqrt{x - \tfrac{3}{4}x^2}.$$

Déterminez l'ensemble des points $a \in \operatorname{Dom} f$ tels que l'angle entre la tangente au graphe de f en $(a, f(a))$ et l'axe des x appartienne à l'intervalle $[\pi/4, \pi/2]$.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (17 octobre 2016)

Nom :

Prénom :

Section :

/14

Question 4.

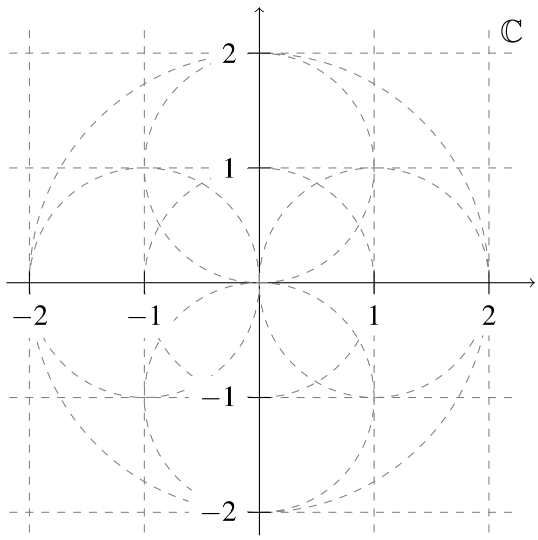
(a) Donnez, *sous forme trigonométrique*, les nombres complexes $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$, $n \geqslant 0$.

(b) Représentez ces nombres z_n dans le plan complexe (sur le graphique ci-contre) et prouvez une formule explicite pour la forme de z_n en fonction de n mod 12.

(c) Prouvez que, pour les z_n définis ci-dessus, $\{z_n \mid n \geqslant 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{12} = 1\}$.

(d) Prouvez que $(1 - \boldsymbol{i})^{12} = -64$.

(e) Donnez toutes les solutions complexes sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ de l'équation $Z^{12} = -64$.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 5. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la somme de tous les nombres impairs de 1 à $2n-1$ vaut n^2. /4

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (17 octobre 2016)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6.

/3

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissez « A est symétrique ».

(b) Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par

$$M_{ij} = \begin{cases} 2^i & \text{si } i = j, \\ i^2 + j^2 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La matrice M est-elle symétrique ? Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soit p et q deux nombres réels, $\Delta = q^2/4 + p^3/27$ et supposons que $\Delta \geqslant 0$. Prouver que

$$r = r_1 + r_2 \quad \text{avec} \quad r_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$.

/3