# Mathématique Élémentaire

## Test n° 5 (17 octobre 2016)

**Correction**

Question 1.

*(a)* *Donnez explicitement la matrice $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ définie par $M_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot 2^i \cdot j$.*

*(b)* *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

*Calculez, si possible, $(BA^t - 2C)^t$. (Pour rappel, si $X$ est une matrice, $X^t$ désigne la transposée de $X$.)*

(a) On a $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -8 \\ -4 & 8 & -12 & 16 \\ 8 & -16 & 24 & -32 \\ -16 & 32 & -48 & 64 \end{pmatrix}$.

(b) Voir correction du Test 5, 15 octobre 2007, question 1.

Question 2. *Soit le système*

$$\begin{cases} (\lambda - 3)x + y = 0 \\ x + (\lambda - 3)y = 0 \end{cases}$$

*où $\lambda$ est un paramètre réel.*

*(a)* *Montrez que, quelle que soit la valeur de $\lambda$, le système n'est jamais impossible.*

*(b)* *Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

Voir correction du Test 4, 5 octobre 2015, question 3.

Question 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \tfrac{3}{4}x^2 + \sqrt{x - \tfrac{3}{4}x^2}.$$

*Déterminez l'ensemble des points $a \in \operatorname{Dom} f$ tels que l'angle entre la tangente au graphe de $f$ en $(a, f(a))$ et l'axe des $x$ appartienne à l'intervalle $[\pi/4, \pi/2]$.*

Le fait que l'angle avec l'axe des $x$ d'une droite non verticale appartienne à l'intervalle $[\pi/4, \pi/2]$ est équivalent à demander que la pente de la droite soit $\geqslant 1$. Ici, comme la droite en question est la tangente au graphe de $f$ en $(a, f(a))$, on doit trouver les $a \in \operatorname{Dom} f$ tels que $\partial_x f(a) \geqslant 1$.
La dérivée vaut

$$\partial_x f(x) = \tfrac{3}{2}x + \frac{1 - \frac{3}{2}x}{2\sqrt{x - \frac{3}{4}x^2}}.$$

L'inégalité $\partial_x f(a) \geqslant 1$ s'écrit

$$\tfrac{3}{2}a + \frac{1 - \frac{3}{2}a}{2\sqrt{a - \frac{3}{4}a^2}} \geqslant 1. \tag{1}$$

Avant de la résoudre, commençons par remarquer que les conditions d'existence sont $a - \frac{3}{4}a^2 > 0$, c'est-à-dire $a \in \left]0, \frac{4}{3}\right[$.
L'inéquation (1) est équivalente à

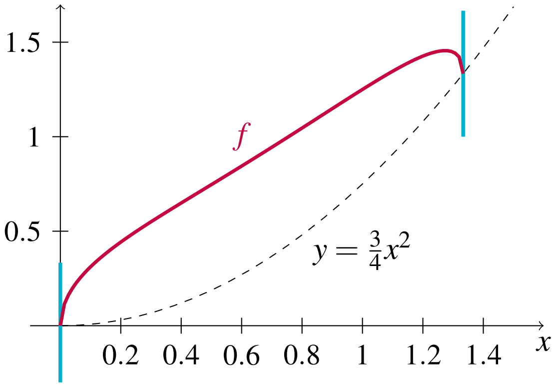
$$1 - \tfrac{3}{2}a \geqslant \left(1 - \tfrac{3}{2}a\right)2\sqrt{a - \tfrac{3}{4}a^2} \tag{2}$$

Pour pouvoir simplifier $1 - \frac{3}{2}a$ (c'est-à-dire multiplier les deux membres de l'inégalité par $\frac{1}{1-\frac{3}{2}a}$), il faut discuter du signe de $1 - \frac{3}{2}a$.

- Si $1 - \frac{3}{2}a = 0$, l'inégalité (2) devient $0 \geqslant 0$ et est donc satisfaite.
- Si $1 - \frac{3}{2}a > 0$, (2) est équivalent, après simplification et élévation au carré, à $1 \geqslant 4(a - \frac{3}{4}a^2)$, c'est-à-dire à $3a^3 - 4a + 1 \geqslant 0$. Comme les racines du polynôme sont $1/3$ et $1$ et que le coefficient de $a^2$ est positif, l'inégalité a lieu pour les $a \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[1, +\infty\right[$. Mais il faut tenir compte du fait qu'on ne discute ici que des $a$ tels que $1 - \frac{3}{2}a > 0$, c'est-à-dire, vu les conditions d'existence, des $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$. Au final, les solutions pour ce cas sont donc les $a \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$.
- Si $1 - \frac{3}{2}a < 0$, la simplification par $1 - \frac{3}{2}a$ change le sens de l'inégalité et on obtient au final que (2) est équivalent à $3a^3 - 4a + 1 \leqslant 0$, c'est-à-dire à $a \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. De nouveau, tenant compte des $a$ avec lesquels on travaille dans ce cas, on trouve que les solutions correspondent aux $a \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \cap \left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[ = \left]\frac{2}{3}, 1\right]$.

En conclusion, $a$ satisfait la propriété de l'énoncé si et seulement si $a$ se trouve parmi les solutions d'un des trois cas ci-dessus, c'est-à-dire si $a \in \{\frac{2}{3}\} \cup \left]0, \frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3}, 1\right] = \left]0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

REMARQUE : Dans cette résolution, on a considéré que la tangente n'était définie que lorsque la dérivée existait (on a en effet parlé de la tangente que dans ce cas au cours). Cependant, pour les points où le dénominateur de la dérivée est nul (i.e., pour $x = 0$ et $x = 4/3$), on peut considérer (et justifier) que la tangente est verticale et donc que ces points répondent à la question (voir graphique ci-contre). Dans ce cas, les $a$ qui vérifient les conditions demandées sont $a \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \cup \{\frac{4}{3}\}$.




Question 4.

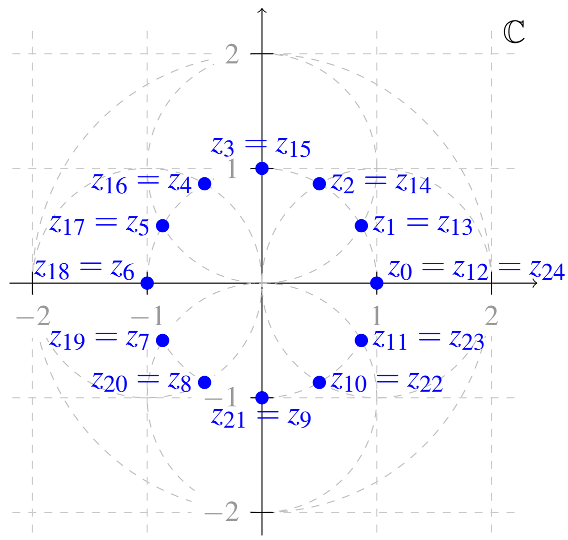
(a) *Donnez, sous forme trigonométrique, les nombres complexes* $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$, $n \geqslant 0$.

(b) *Représentez ces nombres $z_n$ dans le plan complexe (sur le graphique ci-contre) et prouvez une formule explicite pour la forme de $z_n$ en fonction de $n$* mod 12.

(c) *Prouvez que, pour les $z_n$ définis ci-dessus,* $\{z_n \mid n \geqslant 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{12} = 1\}$.

(d) *Prouvez que* $(1 - \boldsymbol{i})^{12} = -64$.

(e) *Donnez toutes les solutions complexes sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ de l'équation* $Z^{12} = -64$.




(a) Le module du complexe $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$ est 1. En effet, posons $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$. On a $|z_1^n| = |z_1|^n = \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^n = \left(\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}\right)^n = 1$.

Si $n = 1$, $z_1^1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)^n = \operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$, car il s'agit d'un complexe dont le cosinus de l'argument vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le sinus de l'argument vaut $\frac{1}{2}$. Par conséquent, par la formule de De Moivre, on a

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)^n = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^n = \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{6} \bmod 2\pi\right).$$

(b) On remarque que pour tout naturel $n$, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \dots, 11\}$ tels que $n = q \cdot 12 + r$. On en déduit que $\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^n = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^{12 \cdot q + r}$ par les notations introduites ci-dessus. Cela est égal à $\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^{12 \cdot q} \cdot \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^r = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^r$ car $\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^{12} = 1$. Avec les notations modulo 12, on obtient $\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^r = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^{n \bmod 12} = \left(\operatorname{cis}(n \bmod 12) \cdot \frac{\pi}{6}\right)$ où on justifie la dernière égalité par l'utilisation de la formule de De Moivre.

(c) Soit $z_n = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^n$. Il faut montrer que $z_n \in \{z \in \mathbb{C} \mid z^{12} = 1\}$, c'est-à-dire il faut montrer que $z_n^{12} = 1$. On a

$$z_n^{12} = \left(\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^n\right)^{12} = \left(\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^{12}\right)^n = 1^n = 1.$$

On a donc montré que $z_n$ est solution de l'équation $X^{12} = 1$. Ceci prouve que $\{z_n \mid n \geqslant 0\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid z^{12} = 1\}$.

Pour l'autre inclusion, on sait par la théorie vue au cours que les solutions de l'équation $X^{12} = 1$ sont exactement les complexes $\operatorname{cis}(\frac{k\pi}{6})$ avec $k \in \{0, 1, \dots, 11\}$, pour lesquels on a prouvé que $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \left\{\operatorname{cis}\frac{k\pi}{6} \;\middle|\; k \in \{0, 1, \dots, 11\}\right\}$.

(d) Prouvons que $(1-\boldsymbol{i})^{12} = -64$. On a que $1 - \boldsymbol{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(1-\boldsymbol{i})^{12} &= \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}\right)^{12} \\
&= \sqrt{2}^{12}\operatorname{cis}\frac{84\pi}{4} && \text{(formule de De Moivre)} \\
&= 64\operatorname{cis}\pi && \text{(car } \operatorname{cis}\pi = -1\text{)} \\
&= -64
\end{aligned}$$

(e) On résout l'équation $Z^{12} = -64$. La théorie nous dit que les solutions sont de la forme $z_0 \cdot u$ avec $z_0$ une solution particulière de $Z^{12} = -64$ et $u$ solution de $Z^{12} = 1$.

Donc en utilisant (c) et (d), on peut prendre par (d), $z_0 = 1 - \boldsymbol{i}$ et (c) nous dit que les $z_n$ sont les complexes $\operatorname{cis}\frac{k\pi}{6}$, $k \in \{0, 1, \dots, 11\}$ qui, sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$, sont les complexes suivants : $1$, $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$, $-1$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$, $-\boldsymbol{i}$, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$. Par conséquent, il reste à multiplier ces complexes par $1 - \boldsymbol{i}$ pour obtenir toutes les solutions de $Z^{12} = -64$.

Question 5. *Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la somme de tous les nombres impairs de $1$ à $2n-1$ vaut $n^2$.*

**Cas de base :** on pose $n = 1$. Le premier membre se réduit à la somme d'un seul terme, 1, et vaut donc 1. Le second membre vaut $2 \cdot 1 - 1 = 1$.

**Pas de récurrence :** Supposons que le résultat est prouvé pour tout les naturels $n$ tels que $1 \leqslant n \leqslant k$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Prouvons le résultat pour $n = k+1$, sous cette hypothèse de récurrence. Le premier membre est $1 + 3 + \dots + 2k - 1 + 2(k+1) - 1$. Par hypothèse de récurrence (pour $n = k$), on obtient que cette somme vaut $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

Question 6.

(a) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « A est symétrique ».*

(b) *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par*

$$M_{ij} = \begin{cases} 2^i & \text{si } i = j, \\ i^2 + j^2 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

*La matrice M est-elle symétrique ? Justifiez votre réponse.*

(a) $A$ est symétrique si et seulement si $A^t = A$.

(b) Oui, la matrice $M$ est symétrique. Nous allons montrer que $M^t = M$, c'est-à-dire que $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $M^t_{ij} = M_{ij}$.
Soient $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(i) Si $i = j$, on a

$$\begin{aligned} M^t_{ij} &= M^t_{ii} \\ &= M_{ii} && \text{(par définition de la transposée)} \\ &= M_{ij} \end{aligned}$$

(ii) Si $i \neq j$, on a

$$\begin{aligned} M^t_{ij} &= M_{ji} && \text{(par définition de la transposée)} \\ &= j^2 + i^2 && \text{(par définition de } M\text{)} \\ &= i^2 + j^2 && \text{(car l'addition est commutative dans } \mathbb{R}\text{)} \\ &= M_{ij} \end{aligned}$$

Question 7. *Soit p et q deux nombres réels, $\Delta = q^2/4 + p^3/27$ et supposons que $\Delta \geqslant 0$. Prouver que*

$$r = r_1 + r_2 \quad \text{avec} \quad r_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

*est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$.*

Remarquons que $r_1$ et $r_2 \in \mathbb{R}$ et sont bien définis vu l'hypothèse $\Delta \geqslant 0$ et l'unicité de la racine cubique d'un réel.
Par définition de la notion de solution, il suffit de vérifier que $(r_1 + r_2)^3 + p(r_1 + r_2) + q = 0$. En utilisant la formule $(r_1 + r_2)^3 = r_1^3 + 3r_1^2 r_2 + 3r_1 r_2^2 + r_2^3 = r_1^3 + 3r_1 r2(r_1 + r_2) + r_2^3$ et le fait que $r_1 r_2 = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q)^2 - \Delta} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3} = -\frac{1}{3}p$ (par définition de $\Delta$). On doit vérifier que

$$-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta} + 3\big(-\tfrac{1}{3}p\big)(r_1 + r_2) - \frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta} + p(r_1 + r_2) + q = 0$$

ce qui est clairement le cas après simplifications.