

# Mathématique Élémentaire

Test n° 6

(24 octobre 2016)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Soit  $z$  un complexe non-nul tel que  $z \neq 1$ . Prouvez par récurrence que

$$\sum_{i=0}^n z^i = (z^{n+1} - 1)(z - 1)^{-1}.$$

/3

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 2. Montrez qu'il existe un unique polynôme  $p$  de degré au plus 3,  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ , vérifiant  $p(1) = 1$ ,  $p(2) = 15$ ,  $p(3) = 51$  et  $\partial_x p(-1) = 11$ . Expliquez votre démarche.

/5

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 3.

/4

- (a) Donnez la table de vérité de  $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_3$ .
- (b) La proposition  $((P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_3) \Rightarrow (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3)$  est-elle une tautologie ? Justifiez votre réponse.

Question 4. Calculez

■  $\int_0^2 x\sqrt{5-x^2} dx =$

■  $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx =$

/4

Question 5. Rappelons que les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* sont respectivement définies comme

$$\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \text{ch}x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \text{sh}x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Définissons la fonction  $\text{arcsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  comme suit : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{arcsh}x$  est l'unique  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $\text{sh}y = x$ . Donnez une formule pour  $\partial_x(\text{arcsh}x)$  et prouvez la. (Vous ne devez pas démontrer que  $\text{arcsh}$  est bien définie ni qu'elle est dérivable.)

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/5

Question 6. Soient  $0 < m < n$  deux nombres naturels. Calculez

■  $\sum_{i=m+1}^n 1 =$

■  $\sum_{i=m+1}^n (i + j) =$

■  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=m+1}^n (i + j) =$

■  $\sum_{t=-2}^m (i + t) =$

■  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i^2 - j^2) =$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

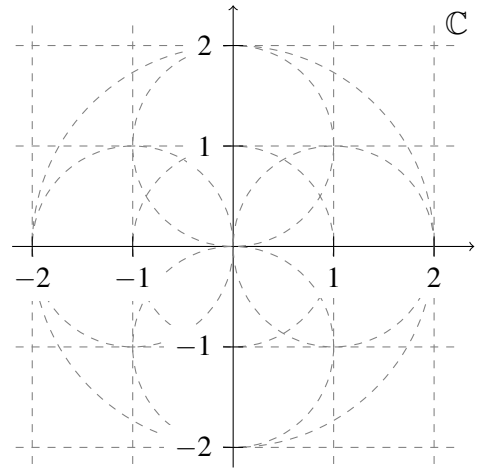
Question 7. Prouvez par récurrence que  $\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\sum_{i=0}^n i\right)^2$ .

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Calculez  $z_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$  pour  $n \geq 0$ .

- (a) Donner une formule pour  $z_n$  en fonction de  $n \bmod 3$ .
- (b) Représentez les  $z_n$  dans le plan complexe.
- (c) Vérifiez que  $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ .
- (d) Donnez les solutions complexes de  $Z^3 = 2 + 11i$ .



/ 8