Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (24 octobre 2016) Correction

Question 1. *Soit z un complexe non-nul tel que $z \neq 1$. Prouvez par récurrence que*

$$\sum_{i=0}^{n} z^i = (z^{n+1}-1)(z-1)^{-1}.$$

On remarque que l'hypothèse $z \neq 1$ garantit l'existence du second membre.

Le cas de base : pour $n = 0$. Dans ce cas, le premier membre de l'égalité se réduit au terme z^0 qui vaut 1, le second membre vaut $(z^{0+1}-1)(z-1)^{-1} = (z-1)(z-1)^{-1} = 1$.

Le pas de récurrence : Supposons que l'égalité soit vérifiée pour les naturels n vérifiant $0 \leqslant n \leqslant k$ pour un $k \geqslant 0$ (l'hypothèse de récurrence). Sous cette hypothèse, prouvons que l'égalité est satisfaite pour $n = k+1$. Le premier membre est

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} z^i &= \left(\sum_{i=0}^{k} z^i\right) + z^{k+1} \\
&= (z^{k+1}-1)(z-1)^{-1} + z^{k+1} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= (z^{k+1}-1)(z-1)^{-1} + z^{k+1}(z-1)(z-1)^{-1} \\
&= (z^{k+1}-1)(z-1)^{-1} + (z^{k+2}-z^{k+1})(z-1)^{-1} \\
&= (z^{k+2}-1)(z-1)^{-1}.
\end{aligned}$$

On a bien obtenu le résultat souhaité.

Question 2. *Montrez qu'il existe un unique polynôme p de degré au plus 3, $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, vérifiant $p(1) = 1$, $p(2) = 15$, $p(3) = 51$ et $\partial_x p(-1) = 11$. Expliquez votre démarche.*

Voir correction de l'examen de janvier 2003, question 18.

Question 3.

(a) Donnez la table de vérité de $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_3$.

(b) La proposition $\big((P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_3\big) \Rightarrow (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3)$ est-elle une tautologie ? Justifiez votre réponse.

(a) Notons φ la formule $\big((P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_3\big) \Rightarrow (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3)$.

P_1	P_2	P_3	$P_1 \wedge P_2$	$(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_3$	$\neg P_1$	$\neg P_2$	$\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3$	φ
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1

(b) C'est une tautologie puisque la colonne de φ est constituée uniquement de 1, c'est à dire qu'elle est vraie pour toutes les valeurs de vérité de P_1, P_2 et P_3.

Une autre preuve est fournie en utilisant le fait que $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg P \vee Q$, donc $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_3$ est équivalente à $\neg(P_1 \wedge P_2) \vee P_3$ qui est équivalente à $\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3$, et on a toujours que $\theta \Rightarrow \theta$ est une tautologie.

Question 4. *Calculez*

- $$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{5-x^2}\,\mathrm{d}x &= -\tfrac{1}{2}\int_0^2 -2x\sqrt{5-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\tfrac{1}{2}\int_5^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y && \text{(substitution } y = 5-x^2 \text{ car } -2x = \partial_x(5-x^2)\text{)} \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^5 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y && \text{(car } \textstyle\int_a^b = -\int_b^a\text{)} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_{y=1}^5 \\ &= \tfrac{1}{3}(5\sqrt{5}-1).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x && \text{(intégration par parties)} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \left(\left[x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\right) && \text{(seconde intégration par parties)} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \left(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \tfrac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1\right) = \tfrac{1}{4}\big(\mathrm{e}^2-1\big).\end{aligned}$$

Question 5. *Rappelons que les fonctions* cosinus hyperbolique *et* sinus hyperbolique *sont respectivement définies comme*

$$\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{et} \quad \operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Définissons la fonction arcsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *comme suit : pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arcsh} x$ *est l'unique* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $\operatorname{sh} y = x$. *Donnez une formule pour* $\partial_x(\operatorname{arcsh} x)$ *et prouvez la. (Vous ne devez pas démontrer que* arcsh *est bien définie ni qu'elle est dérivable.)*

Par définition de arcsh, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(\operatorname{arcsh} x) = x. \tag{1}$$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $y = \operatorname{arcsh} x$. Par définition de $\operatorname{arcsh} x$, on a $\operatorname{sh} y = x$, ce qui prouve (1). Comme (1) exprime l'égalité des deux fonctions $x \mapsto \operatorname{sh}(\operatorname{arcsh} x)$ et $x \mapsto x$, leurs dérivées sont aussi égales, ce qui donne (en se rappelant la règle de dérivation des fonctions composées) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\partial_y \operatorname{sh} y\right)\big|_{y=\operatorname{arcsh} x} \cdot \partial_x \operatorname{arcsh} x = 1.$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \partial_x \operatorname{arcsh} x = \frac{1}{\left(\partial_y \operatorname{sh} y\right)\big|_{y=\operatorname{arcsh} x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} y\big|_{y=\operatorname{arcsh} x}}. \tag{2}$$

On vérifie facilement que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$ et $\operatorname{ch} y \geqslant 0$. Dès lors $\operatorname{ch} y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}$. Dès lors, (2) devient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \partial_x \operatorname{arcsh} x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}\big|_{y=\operatorname{arcsh} x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Question 6. *Soient* $0 < m < n$ *deux nombres naturels. Calculez*

- $\displaystyle\sum_{i=m+1}^{n} 1 = n - m$ car ça revient à compter le nombre de valeurs i entre $m+1$ et n avec $m < n$.
- $$\begin{aligned}\sum_{i=m+1}^{n} (i+j) &= \sum_{i=m+1}^{n} i + \sum_{i=m+1}^{n} j = \sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{m} i + j(n-m) \qquad \text{(voir le point précédent)}\\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} + j(n-m) = \frac{n^2 - m^2 + n - m}{2} + j(n-m)\\ &= (n-m)\Big(j + \frac{n+m+1}{2}\Big)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=m+1}^{n} (i+j) &= \sum_{j=1}^{n} (n-m)\Big(j + \frac{n+m+1}{2}\Big) \qquad \text{(vu le point précédent)}\\ &= n(n-m)\frac{n+m+1}{2} + \sum_{j=1}^{n} (n-m)j\\ &= n(n-m)\frac{n+m+1}{2} + (n-m)\frac{n(n+1)}{2}\\ &= (n-m)\Big(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{nm}{2}\Big) = (n-m)\big(n(n+1) + \tfrac{1}{2}nm\big)\end{aligned}$$

- $\displaystyle\sum_{t=-2}^{m}(\boldsymbol{i}+t) = \sum_{t=-2}^{-1}(\boldsymbol{i}+t) + \sum_{t=0}^{m}(\boldsymbol{i}+t) = 2\boldsymbol{i} - 3 + \boldsymbol{i}(m+1) + \sum_{t=0}^{m} t = (m+3)\boldsymbol{i} - 3 + \frac{m(m+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i^2 - j^2) = 0$ car il s'agit de la somme de tous les éléments d'une matrice carrée A_{ij} avec $A_{ij} = i^2 - j^2$ pour $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et cette matrice est antisymétrique puisque $A_{ji} = -A_{ij}$ (car $A_{ji} = j^2 - i^2 = -(i^2 - j^2) = -A_{ij}$). La somme vaut donc 0 puisque les éléments A_{ij}, avec $i \neq j$ s'annulent deux à deux et que les éléments diagonaux sont tous nuls.

Question 7. *Prouvez par récurrence que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = \Big(\sum_{i=0}^{n} i\Big)^2$.

Cas de base : $n = 0$. Cela revient à prouver que $\sum_{i=0}^{0} i^3 = \big(\sum_{i=0}^{0} i\big)^2$ ou encore que $0^3 = 0^2$, ce qui est clairement vérifié.

Pas de récurrence : sous l'hypothèse de récurrence, à savoir en supposant que l'égalité soit vérifiée pour tous les naturels n entre 0 et $k (k \geqslant 0)$, il faut prouver que l'égalité est vérifiée pour $n = k+1$, c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \big(\sum_{i=0}^{k+1} i\big)^2$. Par hypothèse de récurrence, le premier membre devient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3 &= \Big(\sum_{i=0}^{k} i\Big)^2 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= (k+1)^2\,\frac{k^2+4k+4}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

ce qui est bien le membre de droite $\big(\sum_{i=0}^{k+1} i\big)^2$ vu que

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{3}$$

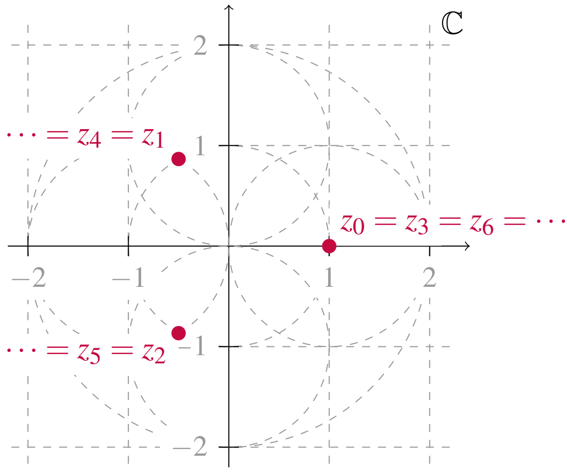
Question 8. *Calculez* $z_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$ *pour* $n \geqslant 0$.

(a) Donner une formule pour z_n *en fonction de* $n \bmod 3$.

(b) Représentez les z_n *dans le plan complexe.*

(c) Vérifiez que $(2+\boldsymbol{i})^3 = 2+11\boldsymbol{i}$.

(d) Donnez les solutions complexes de $Z^3 = 2+11\boldsymbol{i}$.



(a) $z_n = \left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n = \operatorname{cis}\left(n\frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi\right)$. Remarquons que $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$. Clairement

$$z_3 = z_1^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^3 = \operatorname{cis}\frac{3\cdot 2\pi}{3} = \operatorname{cis} 0 = 1.$$

Divisons n par 3 et écrivons $n = q\cdot 3 + (n \bmod 3)$ où $q \in \mathbb{N}$ est le quotient de la division. Donc $z_n = z_1^n = z_1^{q\cdot 3 + n \bmod 3} = z_1^{q\cdot 3} z_1^{n \bmod 3} = (z_1^3)^q z_1^{n \bmod 3} = 1^q z_1^{n \bmod 3} = z_1^{n \bmod 3}$. Il s'ensuit que

$$z_n = z_1^{n \bmod 3} = \operatorname{cis}\left((n \bmod 3)\frac{2\pi}{3}\right).$$

(b) Voir graphique ci-dessus.

(c) $(2+\boldsymbol{i})^3 = (2+\boldsymbol{i})^2(2+\boldsymbol{i}) = (4+4\boldsymbol{i}-1)(2+\boldsymbol{i}) = (3+4\boldsymbol{i})(2+\boldsymbol{i}) = (6-4)+3\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{i} = 2+11\boldsymbol{i}$.

(d) Les solutions complexes de $Z^3 = 2+11\boldsymbol{i}$ sont données par les z^*u avec z^* une solution de $Z^3 = 2+11\boldsymbol{i}$ (on peut prendre $z^* = 2+\boldsymbol{i}$ vu en (c)) et u solution de $Z^3 = 1$, c'est-à-dire z_0, z_1 et z_2 comme vu en (a). Il s'ensuit que les solutions sont $2+\boldsymbol{i}$, $(2+\boldsymbol{i})\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)$, et $(2+\boldsymbol{i})\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)$ ou encore $2+\boldsymbol{i}$, $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\boldsymbol{i}$, et $\frac{\sqrt{3}-2}{2}+\frac{2\sqrt{3}+1}{2}\boldsymbol{i}$.