Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2017)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Il est interdit d'avoir son GSM sur soi. Il doit être en mode silencieux dans votre cartable.

Question 1. Calculez $/5$

- $|(1-\boldsymbol{i})^7| =$
- $2^{1/4} \cdot 3^{1/4} =$
- $(2^{1/4})^8 =$
- $(1-2\boldsymbol{i})^{-1} =$
- $|(\overline{1-\boldsymbol{i}})^7| =$

Question 2. Calculez $/3$

- $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-2} 1 =$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 - j =$
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-2)^{n-j} =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) ci-dessous sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). /7

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-2} \geqslant \frac{x}{3}-1 \tag{1}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2017)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2}(-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3})$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1-\boldsymbol{i}\sqrt{3})$. /5

(a) Donnez la forme trigonométrique de z_1 et z_2.

(b) Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

Calculez $M \cdot M$ et déduisez-en la matrice M^{-1}. Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 5. Soient les ensembles

$$A = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (\alpha, \beta) \text{ est une solution du système } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x - 7y = 0 \end{cases} \right\}$$

et $B = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (u, v) \text{ est orthogonal à } \left(1, \frac{3}{2}\right) \right\}$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x, y) \in A$, alors $(x, y) \in B$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x, y) \in B$, alors $(x, y) \in A$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha \arcsin(\beta \operatorname{sh} x)}$ où $\operatorname{sh} x := \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ est le sinus hyperbolique et α, β sont des paramètres. Donnez tous les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $\alpha x - \beta y = 1$ est l'équation d'une droite parallèle à la tangente au graphe de f en $x = 0$.

/5

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soit $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par /4

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

(a) La matrice A est-elle symétrique ?

(b) La matrice A est-elle antisymétrique ?

(c) Calculez $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$. Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8.

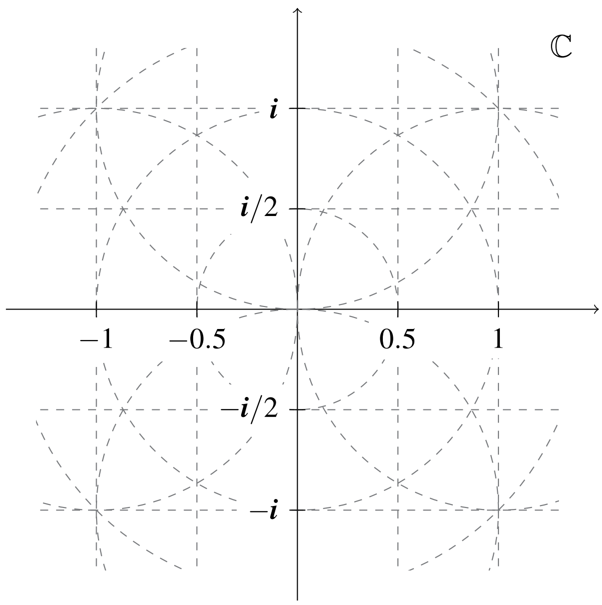
/8

(a) Vérifiez que cis $\frac{7\pi}{4}$ est solution de l'équation $Z^6 = \boldsymbol{i}$.

(b) Donnez sous forme trigonométrique toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^6 = \boldsymbol{i}$.

(c) Placez les solutions de $Z^6 = \boldsymbol{i}$ dans le plan ci-dessous. Expliquez votre construction.

(d) En utilisant éventuellement ce qui précède, donnez sous forme algébrique cis $\frac{\pi}{12}$.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel. /6

(a) Calculez le déterminant de A.

(b) Soit le système

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Résolvez ce système uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice A est nul. Expliquez la méthode que vous utilisez et détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Montrez qu'il existe un unique polynôme de degré au plus 3, $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ tel que $p(1) = 1$, $p(2) = 15$, $p(3) = 51$ et $\partial_x p(-1) = 11$. $/4$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11.

/5

(a) Prouvez que $A \Rightarrow B$ a même table de vérité que $\neg A \vee (A \wedge B)$.

(b) Donnez sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est) l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid (x \geqslant 1) \Rightarrow (3x^3 + 2 \geqslant 5)\}$.

(c) Donnez la négation de « si j'ai faim, alors je vais dîner au restaurant ».