

Mathématique Élémentaire

Examen

(30 octobre 2017)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Il est interdit d'avoir son GSM sur soi. Il doit être en mode silencieux dans votre cartable.

Question 1. Calculez

/5

■ $|(1 - i)^7| =$

■ $2^{1/4} \cdot 3^{1/4} =$

■ $(2^{1/4})^8 =$

■ $(1 - 2i)^{-1} =$

■ $|(\overline{1 - i})^7| =$

Question 2. Calculez

/3

■ $\sum_{i=2}^{n-2} 1 =$

■ $\sum_{j=1}^n j^2 - j =$

■ $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-2)^{n-j} =$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) ci-dessous sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

/7

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-2} \geq \frac{x}{3} - 1 \quad (1)$$

Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2017)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.

/5

(a) Donnez la forme trigonométrique de z_1 et z_2 .

(b) Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

Calculez $M \cdot M$ et déduisez-en la matrice M^{-1} . Expliquez votre démarche.

Question 5. Soient les ensembles

$$A = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid (\alpha, \beta) \text{ est une solution du système } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x - 7y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\text{et } B = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, v) \text{ est orthogonal à } \left(1, \frac{3}{2}\right) \right\}.$$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifiez vos réponses.

(a) Vrai : Faux : Si $(x, y) \in A$, alors $(x, y) \in B$.

(b) Vrai : Faux : Si $(x, y) \in B$, alors $(x, y) \in A$.

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{\alpha \arcsin(\beta \operatorname{sh} x)}$ où $\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est le sinus hyperbolique et α, β sont des paramètres. Donnez tous les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $\alpha x - \beta y = 1$ est l'équation d'une droite parallèle à la tangente au graphe de f en $x = 0$.

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Soit $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

/4

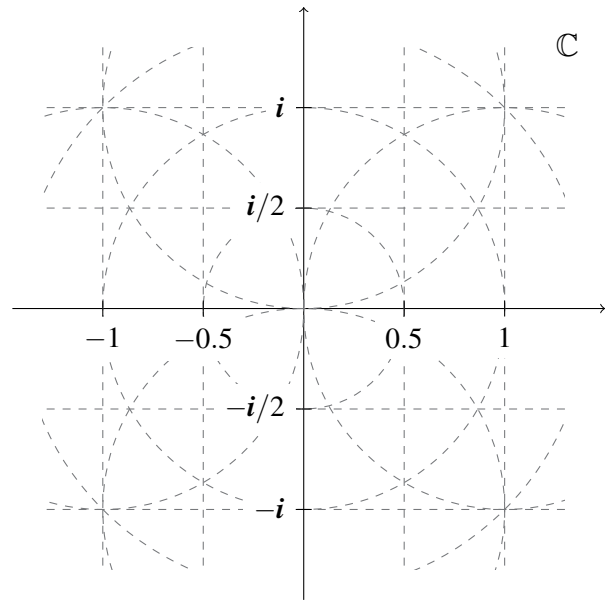
- (a) La matrice A est-elle symétrique ?
- (b) La matrice A est-elle antisymétrique ?
- (c) Calculez $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$. Expliquez votre démarche.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8.

/8

- (a) Vérifiez que $\text{cis } \frac{7\pi}{4}$ est solution de l'équation $Z^6 = i$.
- (b) Donnez sous forme trigonométrique toutes les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $Z^6 = i$.
- (c) Placez les solutions de $Z^6 = i$ dans le plan ci-dessous. Expliquez votre construction.
- (d) En utilisant éventuellement ce qui précède, donnez sous forme algébrique $\text{cis } \frac{\pi}{12}$.



Question 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.

/6

(a) Calculez le déterminant de A .

(b) Soit le système

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Résolvez ce système uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice A est nul. Expliquez la méthode que vous utilisez et détaillez vos calculs.

Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2017)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10. Montrez qu'il existe un unique polynôme de degré au plus 3, $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3$ tel que $p(1) = 1$, $p(2) = 15$, $p(3) = 51$ et $\partial_x p(-1) = 11$.

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 11.

/5

- (a) Prouvez que $A \Rightarrow B$ a même table de vérité que $\neg A \vee (A \wedge B)$.
- (b) Donnez sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est) l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid (x \geq 1) \Rightarrow (3x^3 + 2 \geq 5)\}$.
- (c) Donnez la négation de « si j'ai faim, alors je vais dîner au restaurant ».