Mathématiques Élémentaires

Examen (15 janvier 2018)

Nom :
Prénom :
Section :

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !
- Il est interdit d'avoir son téléphone sur soi — il doit être en mode silencieux dans votre sac.

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Calculez les sommes suivantes : $/3$

- $\displaystyle\sum_{i=-3}^{100} (i+1) =$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} (i+j) =$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i =$

Question 2. Calculez $/4$

- $(4-\boldsymbol{i})^{-1} =$
- $\dfrac{2-3\boldsymbol{i}}{4-3\boldsymbol{i}} =$
- $\overline{-12\boldsymbol{i}+40} =$
- $\left|(2-\boldsymbol{i})^2 \cdot (3+\boldsymbol{i})^4\right| =$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Dites pour quelle(s) valeur(s) des paramètres $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, le vecteur $(1, 2, 3, 4)$ est solution du système ╱5

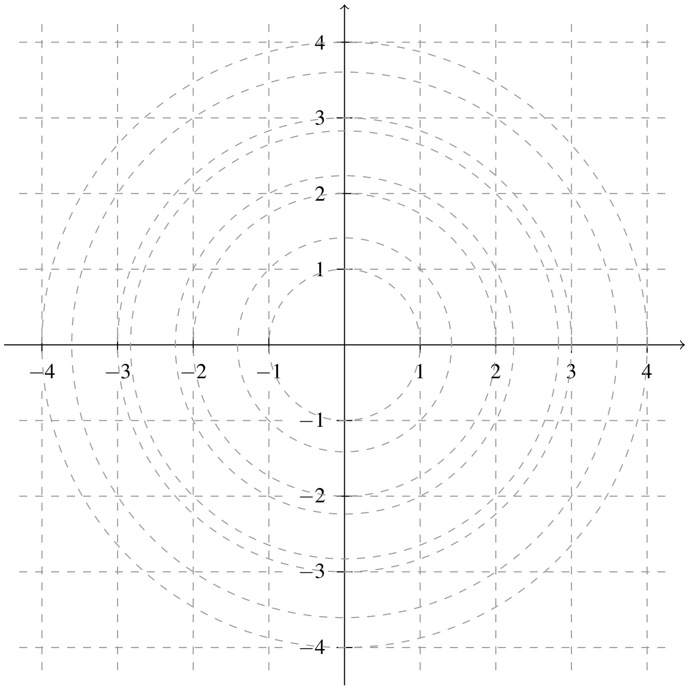
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ 2ax_1 + bx_2 - 3dx_4 = 0, \\ -3ax_1 - 2bx_2 + 5cx_3 - dx_4 = 0. \end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Donnez toutes les solutions complexes de l'équation $Z^4 = -4$ sous forme trigonométrique et sous forme $a+b\boldsymbol{i}$. Placez ces solutions sur le dessin ci-dessous.

/8



Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) ci-dessous sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). /7

$$\sqrt{\sqrt{x-1}-x+3} < 1. \tag{1}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 6. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par $A_{ij} = (\ln i - \ln j)^3 \cdot (i + j)^2$. /4

(a) Montrez que A est antisymétrique.

(b) Calculez $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$. Expliquez votre démarche.

Mathématiques Élémentaires

Examen (15 janvier 2018)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7.

/6

(a) Montrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

(b) Soit $\theta \in \,]0, 2\pi[$. Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{cis}(k\theta)$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soit la matrice

/4

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{où } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(a) Calculez $M^T M$ où M^T désigne la transposée de M.

(b) Du point précédent, déduisez M^{-1}. Expliquez votre démarche.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 9. /4

(a) Soit la phrase « Si je gagne à la loterie, je ferai une croisière ». Donnez en bon français,

- la contraposée de cette phrase ;
- la négation de cette phrase.

(b) Donnez la table de vérité de $\big((P_1 \wedge P_2) \vee P_3\big) \Rightarrow \neg P_3$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{arctg} a^{\sqrt{x}}$ où $a > 0$ est un paramètre réel. Donnez toutes les valeurs de $a \in \mathbb{R}^{>0}$ pour lesquelles la droite $D \equiv x - y \ln a + 1 = 0$ est perpendiculaire à la tangente au graphe de f en $x = 1$. /5

Nom :
Prénom :
Section :

Question 11. Soit le système

/10

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda^2 \\ 2\lambda x + \lambda y + 2z = 2\lambda^2 \\ \lambda x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système possède-t-il une solution unique ? Expliquez votre démarche.

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = -1$.

(c) Déduisez du point précédent l'ensemble des solutions du système pour $\lambda = -1$.

(d) Résolvez le système dans le cas où $\lambda = 2$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse. $/6$

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le point $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right)$ appartient à la droite $D \equiv (x,y) = (3,0) + \lambda(-5,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le vecteur $(\pi, 2\pi)$ est un vecteur directeur de la droite $D \equiv 2x = y + 3$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le système $\begin{cases} 10^{23}x - \sqrt{2}y = 0 \\ 3^{2009}x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ n'est jamais impossible.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Les droites $D_1 \equiv (x,y) = (7,-1) + \lambda(-3,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $D_2 \equiv \frac{2}{3}x + y = 0$ sont parallèles.