

Mathématiques Élémentaires

Examen

(8 juin 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !
- Il est interdit d'avoir son téléphone sur soi — il doit être en mode silencieux dans votre sac.

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. La proposition suivante est-elle une tautologie ?

$$(P \Rightarrow (\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$$

Justifiez votre réponse.

/ 3

Question 2. Soient les matrices

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ définie par } A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, $\det A$, $B^t \cdot C$, D^{-1} .

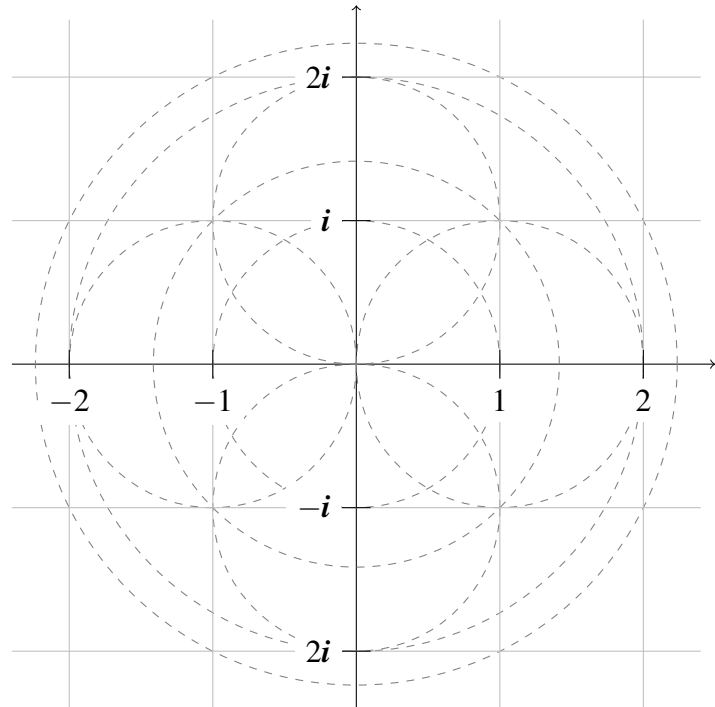
/3

Question 3. Calculez, dans \mathbb{C} , sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de l'équation

$$X^3 + 1 = 0 \tag{1}$$

/4

Représentez ces solutions sur le graphe ci-dessous. Justifiez vos calculs.



Mathématiques Élémentaires

Examen

(8 juin 2018)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Question 4. Calculer

■ $\overline{2-i} =$

■ $\overline{3i-5} =$

■ $|(1-i)^{10}| =$

■ $|(2-i)(\overline{3i-5})| =$

/ 4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5. Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) ci-dessous sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

/7

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-2} > x - \frac{1}{3} \quad (2)$$

Mathématiques Élémentaires

Examen

(8 juin 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6.

/5

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissez « B est l'inverse de A ».

(b) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dites sous quelle condition la matrice S est inversible. Donnez alors l'inverse de S et vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Résolvez le système suivant en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \cos \theta x - \sin \theta y = 1 \\ \sin \theta x + \cos \theta y = 1 \end{cases}$$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. On rappelle que les fonctions $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par $\text{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\text{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

/4

- (a) Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.
- (b) Soit $\text{arcsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\text{arcsh} x = y$ si et seulement si $x = \text{sh} y$. On suppose que cette fonction est bien définie et dérivable (vous ne devez pas le montrer). Trouvez et *prouvez* une formule (que vous devez simplifier) pour la dérivée de la fonction arcsh .

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. Tout nombre complexe $x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, peut s'écrire sous forme trigonométrique $r \operatorname{cis} \theta$ pour un unique $r > 0$ et un unique $\theta \in [0, 2\pi[$. Peut-on déterminer ces derniers de la façon suivante :

/4

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ si } x = 0?$$

En cas de réponse affirmative, prouvez ces formules. Si la réponse est négative, justifiez cette dernière puis corrigez ces formules et prouvez les nouvelles.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 9.

/4

- (a) Donnez la fonction du premier degré dont le graphe est la droite D passant par le point $(5, -4)$ et parallèle à la droite D' dont une équation paramétrique est $(x, y) = (\lambda, 42\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (b) Soit la droite D passant par le point $(4, 3)$ et par le milieu du segment joignant les points $(1, -1)$ et $(9, 3)$. Montrez que la droite D est perpendiculaire au segment.

Question 10. Soit A la proposition : « Si $\sqrt{3}$ est rationnel, alors $1 + \sqrt{3}$ est rationnel ».

/4

- (a) Donnez (en bon français) la contraposée de la proposition A .
- (b) Donnez (en bon français) la négation de la proposition A .

Question 11. Prouver par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\partial_x^k \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad (3)$$

où, pour rappel, le symbole « ∂_x^k » signifie qu'on dérive l'expression k fois par rapport à x .

/4

Question 12. Calculez

▪ $\sum_{v=1}^t \sum_{p=1}^v (p - v + t^2) =$

▪ $\sum_{j=1}^{\ell} \binom{\ell}{j} 2^j =$

▪ $\sum_{i=n+2}^s 1 =$

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 13. Dites pour quelle(s) valeur(s) des paramètres $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, le vecteur $(1, 2, 3, 4)$ est solution du système

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ 2ax_1 + bx_2 - 3dx_4 = 0, \\ -3ax_1 - 2bx_2 + 5cx_3 - dx_4 = 0. \end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

/5