

Mathématiques Élémentaires

Examen

(13 août 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !
- Il est interdit d'avoir son téléphone sur soi — il doit être en mode silencieux dans votre sac.

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veuillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Donnez en bon français la négation de « Si je vais en vacances, alors j'apprends l'anglais ». Justifiez votre réponse.

/2

Question 2. Calculez, si possible,

/4

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$

(b) $\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1} =$

(c) $\begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & u & -v \\ 0 & v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -y \\ 0 & 0 & y & x \end{pmatrix} =$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & b & 1 \\ b & 1 & a \end{vmatrix} =$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : Faux : Le point $(\frac{1}{4}, \frac{7}{2})$ appartient à la droite $D \equiv (x, y) = (-5, 0) + \lambda(-3, -2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Vrai : Faux : Le vecteur $(\pi^{-1}, 2\pi^{-1})$ est un vecteur directeur de la droite $D \equiv x = y/2 - 5$.

(c) Vrai : Faux : Les droites $D_1 \equiv (x, y) = (7, -1) + \mu(-3, -2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $D_2 \equiv -4x + 6y = 1$ sont confondues.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Déterminez l'ensemble des valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la tangente au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{\operatorname{arctg}(\alpha x)}$ au point $(1, f(1))$ soit perpendiculaire à la droite D d'équation $x \operatorname{arctg} 1 = y \operatorname{arctg} \alpha$. (AIDE : $\alpha \operatorname{arctg} \alpha \geq 0$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.)

/ 4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5. Calculez

■ $(3 + i) - (17 - 27i) =$

■ $|1 + 2i| =$

■ $|(1 + 2i)^{14}| =$

■ $\text{Arg } 4 =$

/ 4

Question 6. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $\left(\sum_{i=0}^n i\right)^2 = \sum_{i=0}^n i^3$.

/ 3

Question 7. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

/5

où λ est un paramètre réel.

- (a) Calculez l'inverse de M en fonction de λ , en discutant si nécessaire. Expliquez votre démarche.
- (b) Résolvez le système suivant en expliquant votre démarche :

$$\begin{cases} x + y - z = 10 \\ x + 10z = 10 \\ x + y + 9z = 20 \end{cases}$$

Mathématiques Élémentaires

Examen

(13 août 2018)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8. La proposition $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)))$ est-elle une tautologie ?

/2

Mathématiques Élémentaires

Examen

(13 août 2018)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 9. Écrivez le domaine de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x - 2 - \frac{2\sqrt{9 - 3x}}{x + 3}}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

/ 8

Mathématiques Élémentaires

Examen

(13 août 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 9 (suite). Poursuivez si nécessaire votre réponse sur cette page.

Question 10. Calculez les sommes suivantes :

/ 4

$$\blacksquare \sum_{k=0}^n i^2 =$$

$$\blacksquare \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n ((k^2 - \ell^2) + 2\ell) =$$

$$\blacksquare \sum_{k=-7}^{14} 2 =$$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 11. Résolvez l'équation suivante dans \mathbb{C} : $X^6 = -27$. Détaillez votre méthode. Donnez les solutions sous forme trigonométrique et algébrique. Représentez ces solutions dans le plan.

/8

