Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (25 septembre 2017) Correction

Question 1. *Soient les vecteurs $u = (-1,-3,2)$ et $v = (0,1,4)$. Calculez*

- $(u|v) = \big((-1,-3,2) \mid (0,1,4)\big) = -1\cdot 0 + (-3)\cdot 1 + 2\cdot 4 = 5$
- $\|2u - v\|$

  On a $2u - v = (-2,-6,4) - (0,1,4) = (-2,-7,0)$. Donc $\|2u - v\| = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$.

- *la distance entre u et v*

  $\operatorname{dist}(u,v) = \sqrt{(-1-0)^2 + (-3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$.

Question 2. *Calculez :*

- $(3-\boldsymbol{i}) + (17+\boldsymbol{i}) = 3 + 17 + (-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}) = 20$
- $(2-\boldsymbol{i})(2+\boldsymbol{i}) = 2^2 - \boldsymbol{i}^2 = 4 - (-1) = 5$
- $(2-\boldsymbol{i})(3+\boldsymbol{i}) = 2\cdot 3 - \boldsymbol{i}\cdot 3 + 2\cdot\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 7 - \boldsymbol{i}$
- $|3-\boldsymbol{i}|^2 = \left(\sqrt{3^2 + (-1)^2}\right)^2 = 10$

Question 3.

(a) *Quelles sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de*

(i) $X^2 = \cos\left(\frac{43\pi}{4}\right)$,

(ii) $X^2 = \sin\frac{\pi}{6}$?

(b) *Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de*

(i) $X^2 = \cos\left(\frac{43\pi}{4}\right)$,

(ii) $X^2 = \sin\frac{\pi}{6}$?

On sait que cos est une fonction périodique de période 2π, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x) = \cos(x+2k\pi)$. Il s'ensuit que $\cos\left(\frac{43\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ car $\frac{43}{4}\pi = 10\pi + \frac{3}{4}\pi$. Les équations deviennent donc

$$X^2 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

$$X^2 = \frac{1}{2} \tag{2}$$

Puisque $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ est strictement négatif et que X^2 est positif, (1) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Ses solutions dans $\mathbb{C}$ sont $x_1 = \boldsymbol{i}\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}$ et $x_2 = -\boldsymbol{i}\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}$. L'équation (2) a pour solutions, dans $\mathbb{R}$, $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce sont également les racines dans $\mathbb{C}$ puisque $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ et une équation de degré 2 a au plus 2 racines.

Question 4.

(a) *Soit* $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. *Complétez les phrases suivantes*[1] :

$$x = 0 \text{ si et seulement si } \boxed{x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \text{ et } \dots \text{ et } x_N = 0.}$$

$$x \neq 0 \text{ si et seulement si } \boxed{x_1 \neq 0 \text{ ou } x_2 \neq 0 \text{ ou } \dots \text{ ou } x_N \neq 0.}$$

(b) *On considère les trois vecteurs*

$$u = (-1, 3), \qquad v = (5, -2), \qquad \text{et} \qquad w = (\lambda, \mu - \lambda),$$

où λ *et* μ *sont des paramètres réels. Déterminez, si possible,* λ *et* μ *pour que* $u + v + w = 0$. *Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Voir correction du test 2, 20 septembre 2010, question 2.

Question 5. *Soit* $v \in \mathbb{R}^N$.

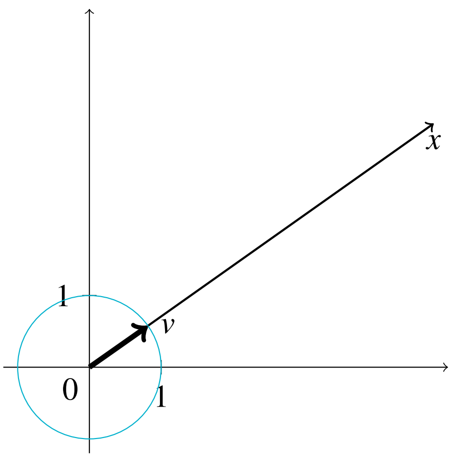
(a) *Montrez que* $(v|v) = \|v\|^2$. *Veuillez citer les définitions et les résultats que vous utilisez.*

(b) *Calculez* $\|v\|$ *si on suppose maintenant que* $v \in \mathbb{R}$.

(c) *Soit* $x \in \mathbb{R}^2$ *le vecteur représenté ci-dessous. Construisez, sur ce même graphique, le vecteur* $v = x/\|x\|$. *Expliquez comment vous réalisez votre construction.*

(a) Posons $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$. On a

$$\begin{aligned} (v|v) &= v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + \cdots + v_N \cdot v_N \\ &\qquad \text{(par définition du produit scalaire)} \\ &= v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2 \\ &= \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2}\right)^2 \\ &= \|v\|^2 \quad \text{(par définition de la norme)} \end{aligned}$$



(b) Si $v \in \mathbb{R}$, alors $v = v_1$. Donc $\|v\| = \sqrt{v_1^2} = |v_1| = |v|$.

(c) Comme $\|v\| = 1$ (vu au cours) et que $v = x/\|x\|$ a même direction et même sens que x (puisque $\|x\| > 0$), v est le vecteur d'origine $(0,0)$, de même direction et même sens que x et dont l'extrémité est sur le cercle unité.

[1] Les phrases finales doivent être vraies mais les deux membres de l'équivalence doivent être différents.

Question 6. *Prouvez que* $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a+b\boldsymbol{i})(a-b\boldsymbol{i}) = |a+b\boldsymbol{i}|^2$.

Quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$, vu que $\boldsymbol{i}^2 = -1$ et appliquant le produit remarquabe $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ le premier membre devient

$$a^2 - (b\boldsymbol{i})^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2.$$

De plus, vu que[2] $a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$, on peut conclure que l'égalité est vérifiée par définition du module de $a + b\boldsymbol{i}$.

Question 7. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $3X^2 - 2X + 7 = 0$.

Par la procédure vue au cours, calculons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation, $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -80$. L'équation auxiliaire est donc $Z^2 = -80$, dont les solutions sont $z_1 = \boldsymbol{i}\sqrt{80} = \boldsymbol{i}4\sqrt{5}$ et $z_2 = -\boldsymbol{i}\sqrt{80} = -\boldsymbol{i}4\sqrt{5}$.
Il s'ensuit que les solutions de l'équation de départ sont

$$x_1 = \frac{-(-2) + \boldsymbol{i}4\sqrt{5}}{6} = \frac{1}{3} + \boldsymbol{i}\,\frac{2}{3}\sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1}{3} - \boldsymbol{i}\,\frac{2}{3}\sqrt{5}.$$

Question 8. *Prouvez que,* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Posons $z_1 = a + b\boldsymbol{i}$ et $z_2 = c + d\boldsymbol{i}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (définition des complexes). Par définition de la multiplication complexe le premier membre de l'égalité demandée devient

$$\begin{aligned} |(a+b\boldsymbol{i})(c+d\boldsymbol{i})| &= |(ac-bd) + (ad+bc)\boldsymbol{i}| \\ &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} \qquad \text{(par définition de } |\cdot|) \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}. \end{aligned}$$

Le second membre devient (par définition de $|\cdot|$)

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}.$$

Ceci permet de conclure que l'égalité est bien vérifiée pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

[2] Par définition de la racine carrée, on a toujours que $(\sqrt{u})^2 = u$ quel que soit u. On ne considère bien sûr que les $u \geqslant 0$ afin que $\sqrt{u}$ existe.

Question 9. *Calculez le* module *et l'*argument *des complexes suivants et placez les dans le plan ci-dessous, en justifiant.*

- $-\sqrt{2}+\boldsymbol{i}\sqrt{2}$
- $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$

Le module du complexe $z_1 := -\sqrt{2}+\boldsymbol{i}\sqrt{2}$ est $\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = 2$. Le nombre z_1 est donc sur le cercle de rayon 2, centré en l'origine. Puisque $\Re\mathrm{e}(z_1) = -\Im\mathrm{m}(z_1)$, il se trouve également sur la droite d'équation $Y = -X$ et vu que $\Re\mathrm{e}(z_1) < 0$, il est dans le deuxième quadrant, à l'intersection de cette droite et du cercle précité. Son argument est donc $\frac{3\pi}{4}$.

Le complexe $z_2 := \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ est de module 1 car $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$. Il est donc, sur le cercle trigonométrique, dans le quatrième quadrant vu les signes de $\Re\mathrm{e}(z_2)$ et $\Im\mathrm{m}(z_2)$ et il est aussi sur la droite d'équation $X = \frac{1}{2}$ puisque $\Re\mathrm{e}(z_2) = \frac{1}{2}$.