Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (2 octobre 2017)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Calculez $/4$

- $\overline{(3-7\boldsymbol{i})}(2+5\boldsymbol{i}) =$
- $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\boldsymbol{i}\right)^{-1} =$
- $|-3\sqrt{3}+3\boldsymbol{i}| =$
- $\left|(-3\sqrt{3}+3\boldsymbol{i})(4-\boldsymbol{i})^2\right| =$

Question 2. Complétez : « Lorsqu'on écrit un nombre complexe sous la forme trigonométrique $\rho \operatorname{cis} \theta$, la mesure principale de l'angle θ appartient à l'intervalle ______ . » $/1$

Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (2 octobre 2017)

Nom :

Prénom :

Section :

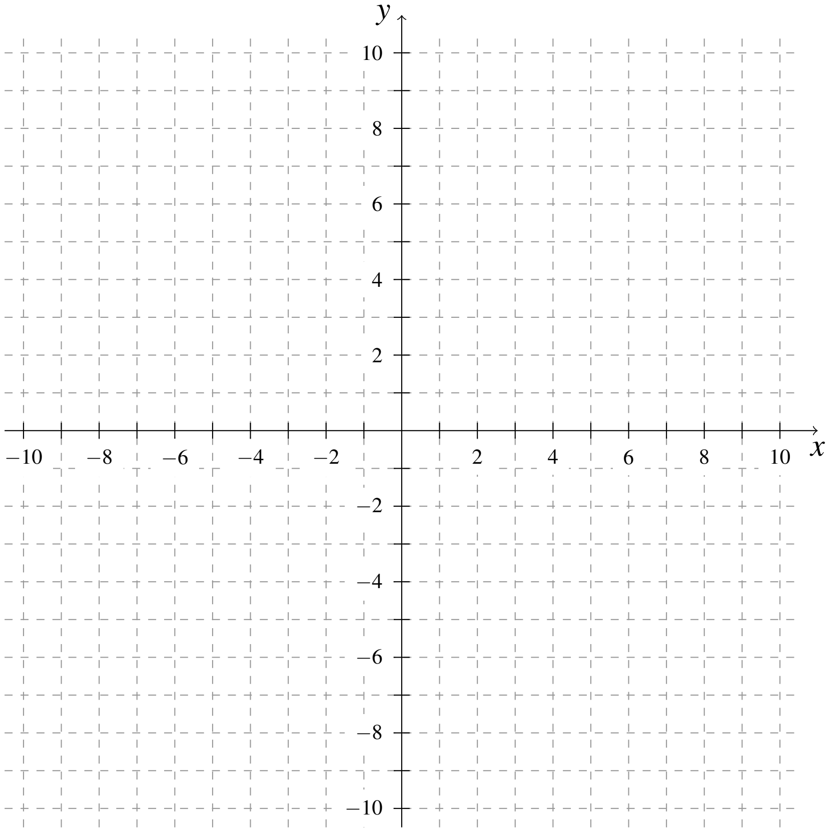
Question 3. Soit la droite $D \equiv (x,y) = (-4,3) + \lambda(-2,7)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. /5

(a) Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(i) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le point $\left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ appartient à la droite D.

(ii) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le vecteur $\left(\frac{2\pi}{7}, -\pi\right)$ est un vecteur directeur de D.

(b) Représentez graphiquement la droite D dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.



Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (2 octobre 2017)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Prouvez que $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant |x|$. /1

Question 5. Écrivez l'ensemble des solutions de $2|x+1| < x+4$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles. /4

Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (2 octobre 2017)

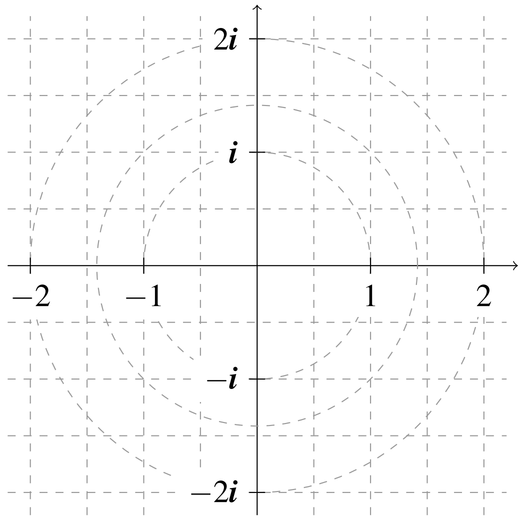
Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Calculez l'*argument* des complexes suivants et placez les dans le plan ci-dessous, en justifiant. /8

- $z_1 := 1 - \sqrt{3}\boldsymbol{i}$,
- $z_2 := \sqrt{3} + \boldsymbol{i}$,
- $z_3 := \overline{1 - \sqrt{3}\boldsymbol{i}}$,
- $z_4 := (1 - \sqrt{3}\boldsymbol{i})^{-1}$ et
- $z_5 := -1 + \sqrt{3}\boldsymbol{i}$.



Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (2 octobre 2017)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soit p et q deux nombres réels, $\Delta = q^2/4 + p^3/27$ et supposons que $\Delta \geqslant 0$. Prouver que /3

$$r = r_1 + r_2 \quad \text{avec} \quad r_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$.

Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (2 octobre 2017)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Pour tous les $z, z' \in \mathbb{C}$, on a les égalités suivantes : /4

(a) $\overline{-z} = -\overline{z}$;

(b) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

(c) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$;

(d) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

- Prouver uniquement l'égalité (b).
- Soit un polynôme $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$. En utilisant (a), (b), (c) et (d), prouver que si $z \in \mathbb{C}$ est une solution de $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, alors $\overline{z}$ est également solution de cette équation.