Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 3 (2 octobre 2017) **Correction**

Question 1. *Calculez*

- $\overline{(3-7\boldsymbol{i})}(2+5\boldsymbol{i})$ *:* par définition du conjugué,

$$\begin{aligned}\overline{(3-7\boldsymbol{i})}(2+5\boldsymbol{i}) &= (3+7\boldsymbol{i})(2+5\boldsymbol{i})\\ &= 6+35\boldsymbol{i}^2+15\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{i}\\ &= -29+29\boldsymbol{i}.\end{aligned}$$

- $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\boldsymbol{i}\right)^{-1}$ *:* en utilisant la formule $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$, on a

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\boldsymbol{i}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(-1)^2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\boldsymbol{i}}{\frac{3}{9}+1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\boldsymbol{i}}{\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\boldsymbol{i}}{4}.$$

- $|-3\sqrt{3}+3\boldsymbol{i}|=\sqrt{(-3\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{27+9}=6.$
- $$\begin{aligned}\left|(-3\sqrt{3}+3\boldsymbol{i})(4-\boldsymbol{i})^2\right| &= \left|-3\sqrt{3}+3\boldsymbol{i}\right|\cdot|4-\boldsymbol{i}|^2 && \text{(par la règle[1] } |z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|)\\ &= 6\cdot(4^2+1^2) && \text{(par le calcul précédent)}\\ &= 6\cdot 17 = 102.\end{aligned}$$

Question 2. *Complétez : « Lorsqu'on écrit un nombre complexe sous la forme trigonométrique $\rho \operatorname{cis}\theta$, la mesure principale de l'angle θ appartient à l'intervalle* $\boxed{[0,2\pi[}$ *. »*

Question 3. *Soit la droite $D \equiv (x,y)=(-4,3)+\lambda(-2,7)$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.*

(a) *Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(i) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le point $\left(-\frac{10}{3},\frac{2}{3}\right)$ appartient à la droite D.*
On a $\left(\frac{-10}{3},\frac{2}{3}\right)\in D$ si

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \left(\frac{-10}{3},\frac{2}{3}\right)=(-4,3)+\lambda(-2,7). \tag{1}$$

Or cette égalité peut s'écrire $\left(\frac{-10}{3},\frac{2}{3}\right)=(-4-2\lambda,3+7\lambda)$. On en déduit que $\frac{-10}{3}=-4-2\lambda$ et $\frac{2}{3}=3+7\lambda$. La première égalité dit que $\frac{2}{3}=-2\lambda$, c'est-à-dire $\lambda=\frac{-1}{3}$ et la deuxième égalité donne $7\lambda=\frac{-7}{3}$ c'est-à-dire $\lambda=\frac{-1}{3}$. L'affirmation est donc vraie, il suffit de prendre $\lambda=\frac{-1}{3}$ dans (1).

---

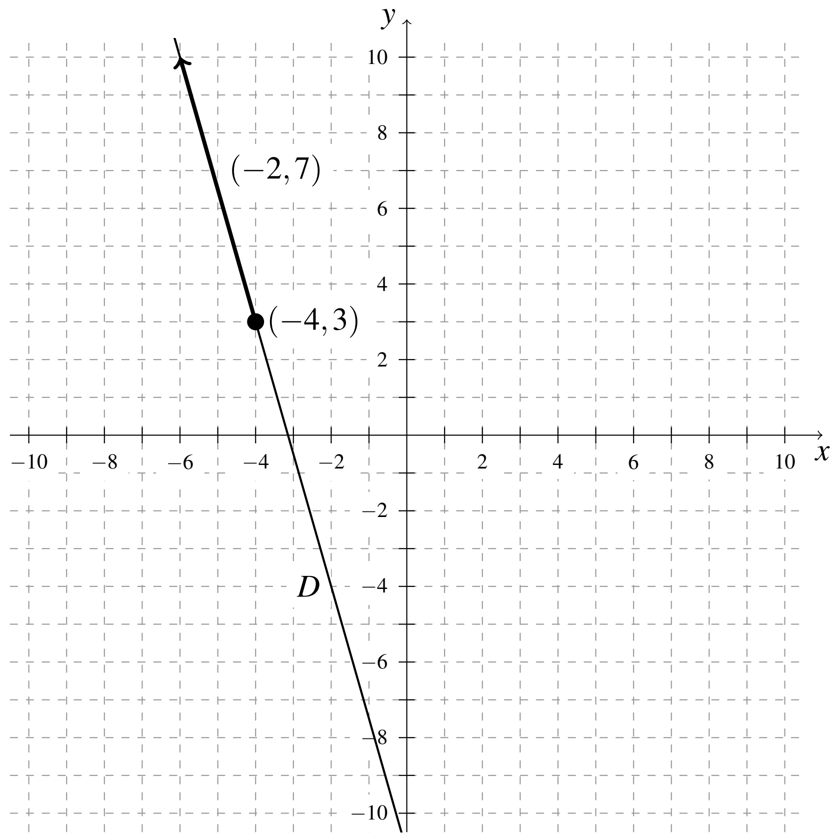
[1] On déduit de cette règle que $|z^n|=|z|^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$..

(ii) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le vecteur* $\left(\frac{2\pi}{7}, -\pi\right)$ *est un vecteur directeur de D.*
Un vecteur directeur de D est $(-2,7)$. Tout vecteur colinéaire à $(-2,7)$ est encore un vecteur directeur de D. Or $(\frac{2\pi}{7}, -\pi) = \frac{-\pi}{7}(-2,7)$. Les vecteurs $(-2,7)$ et $(\frac{2\pi}{7}, -\pi)$ sont donc colinéaires et donc $(\frac{2\pi}{7}, -\pi)$ est bien un vecteur directeur de D.

(b) *Représentez graphiquement la droite D dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

On constate que $(-4,3)$ est un point de D. On l'obtient en prenant $\lambda = 0$ dans l'équation.
En prenant par exemple $\lambda = 1$, on obtient un autre point de D : on a

$$(x,y) = (-4,3) + (-2,7) = (-6,10).$$



Question 4. *Prouvez que* $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant |x|$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ arbitraire. Distinguons deux cas.

- Si $x \geqslant 0$, on a par définition de la valeur absolue que $|x| = x$. Ce qu'il faut montrer devient $x \leqslant x$, ce qui est évidemment vrai.
- Si $x < 0$, on a que $|x| = -x$. Dès lors, ce qu'il faut montrer devient $x \leqslant -x$. C'est vrai car $x < 0 < -x$.

Question 5. *Écrivez l'ensemble des solutions de* $2|x+1| < x+4$ *sous la forme d'une union disjointe d'intervalles.*

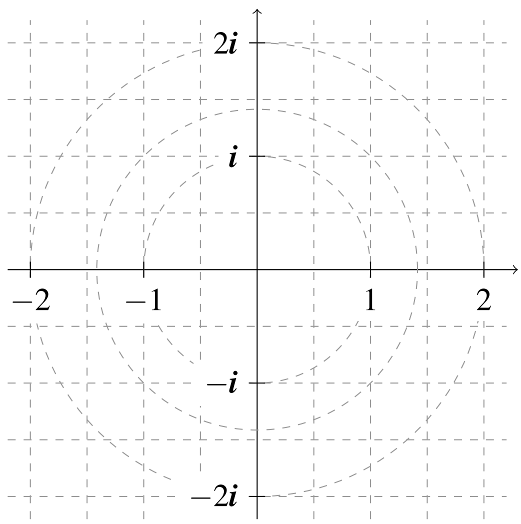
Pour résoudre cette inéquation, distinguons deux cas.

- Si $x+1 \geqslant 0$, c'est à dire si $x \geqslant -1$, l'inéquation devient
$$2(x+1) < x+4$$
ou encore $x < 2$.
En tenant compte qu'on ne travaille ici qu'avec des valeurs de $x \geqslant -1$, on déduit que les solutions pour ce cas sont $x \in [-1,2[$.
- Si $x+1 < 0$, c'est à dire si $x < -1$, l'inéquation devient
$$-2(x+1) < x+4$$
ce qui est équivalent à $3x > -6$ ou encore $x > -2$. Vu les valeurs de x avec lesquelles on travaille, les solutions pour ce cas sont $x \in]-2,-1[$.

En conclusion, les solutions de l'inéquation sont données en rassemblant les solutions données par chacun des cas :
$$x \in]-2,-1[\cup [-1,2[=]-2,2[.$$

Question 6. *Calculez l'*argument *des complexes suivants et placez les dans le plan ci-dessous, en justifiant.*

- $z_1 := 1-\sqrt{3}\boldsymbol{i}$,
- $z_2 := \sqrt{3}+\boldsymbol{i}$,
- $z_3 := \overline{1-\sqrt{3}\boldsymbol{i}}$,
- $z_4 := (1-\sqrt{3}\boldsymbol{i})^{-1}$ *et*
- $z_5 := -1+\sqrt{3}\boldsymbol{i}$.



Voir correction du test 4, 7 octobre 2013, question 7.

Question 7. *Soit p et q deux nombres réels, $\Delta = q^2/4 + p^3/27$ et supposons que $\Delta \geqslant 0$. Prouver que*

$$r = r_1 + r_2 \quad \textit{avec} \quad r_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} \quad \textit{et} \quad r_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$.

Voir correction du test 5, 17 octobre 2016, question 7.

Question 8. *Pour tous les $z, z' \in \mathbb{C}$, on a les égalités suivantes :*

(a) $\overline{-z} = -\overline{z}$;

(b) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

(c) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$;

(d) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

- *Prouver uniquement l'égalité (b).*

  Posons $z = a + b\boldsymbol{i}$ et $z' = a' + b'\boldsymbol{i}$. On a $\overline{z + z'} = \overline{a + b\boldsymbol{i} + a' + b'\boldsymbol{i}} = \overline{a + a' + (b + b')\boldsymbol{i}} = a + a' - b\boldsymbol{i} - b'\boldsymbol{i} = a - b\boldsymbol{i} + a' - b'\boldsymbol{i} = \overline{z} + \overline{z'}$.

- *Soit un polynôme $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$. En utilisant (a), (b), (c) et (d), prouver que si $z \in \mathbb{C}$ est une solution de $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, alors $\overline{z}$ est également solution de cette équation.*

Voir correction du test 3, 1er octobre 2001, question 9.