Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2017) **Correction**

Question 1. *Prouvez par récurrence que, pour tout naturel $n \geqslant 0$,*

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Cas de base. On vérifie la propriété pour $n = 0$. On a $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0^2$ et le second membre vaut 0 puisque son numérateur est multiple de n, qui vaut 0.

Pas de récurrence. Supposons que l'égalité est vérifiée pour les naturels n entre 0 et k, c'est-à-dire $0 \leqslant n \leqslant k$. Sous cette hypothèse, prouvons l'égalité pour $n = k+1$. Le premier membre devient $\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \left(\sum_{i=0}^{k} i^2\right) + (k+1)^2$, grâce à l'hypothèse de récurrence dans le cas $n = k$, on obtient

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)\big(6(k+1)+k(2k+1)\big)}{6}.$$

Puisque $6(k+1)+k(2k+1) = (k+2)(2k+3) = ((k+1)+1)(2(k+1)+1)$ on a prouvé l'égalité des deux membres de l'égalité dans le cas $n = k+1$.

Question 2. *Soient D_1 et D_2 deux droites d'équations*

$$D_1 \equiv (x,y) = (0,2) + \lambda(1,-3), \qquad \textit{où } \lambda \in \mathbb{R},$$
$$D_2 \equiv (x,y) = \left(\frac{2}{3},0\right) + \mu(-3,9), \qquad \textit{où } \mu \in \mathbb{R}.$$

Donnez l'ensemble S qui décrit l'intersection des droites D_1 et D_2. Expliquez votre raisonnement.

Remarquons que D_1 et D_2 sont deux droites parallèles. En effet, $(1,-3)$ est un vecteur directeur de D_1 et $(-3,9)$ est un vecteur directeur de D_2. Or $(-3,9) = -3(1,-3)$, ce qui signifie que ces deux vecteurs ont la même direction.

Si de plus, ces deux droites ont un point en commun, nous pourrons en déduire qu'elles sont confondues. Montrons que $(0,2) \in D_2$, c'est-à-dire

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \quad (0,2) = \left(\frac{2}{3},0\right) + \mu(-3,9).$$

Par les opérations sur les vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, on cherche $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$0 = \frac{2}{3} - 3\mu \tag{1}$$
$$2 = 9\mu \tag{2}$$

Ces deux équations sont équivalentes à $\mu = \frac{2}{9}$. Donc $(0,2)$ est à la fois un point de D_1 et de D_2. Ces droites sont donc confondues.
Pour écrire S, remarquons par exemple que $D_1 \equiv (x,y) = (\lambda, 2-3\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a

$$S = \big\{(\lambda, 2-3\lambda) \bigm| \lambda \in \mathbb{R}\big\}.$$

Solution alternative : On peut rechercher une équation cartésienne de D_1 et de D_2, puis résoudre le système formé par ces deux équations.

Question 3.

(a) *Complétez les équivalences suivantes afin que les membres de droite ne comportent plus de valeurs absolues. Les distinctions par cas ne sont pas acceptées.*

$$\forall \xi, a \in \mathbb{R}, \qquad |\xi| \leqslant a \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-a \leqslant \xi \text{ et } \xi \leqslant a}$$

$$\forall \xi, a \in \mathbb{R}, \qquad |\xi| \geqslant a \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\xi \leqslant -a \text{ ou } a \leqslant \xi}$$

(b) *En utilisant uniquement les équivalences données au point (a) pour éliminer les valeurs absolues, résolvez l'inéquation suivante :*

$$|x^2 - x + 1| \leqslant |x| + 1$$

La solution doit être formulée sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

En utilisant la première équivalence de (a) avec $\xi = x^2 - x + 1$ et $a = |x| + 1$, on obtient que

$$\begin{aligned} |x^2 - x + 1| \leqslant |x| + 1 \qquad &\Leftrightarrow \qquad -|x| - 1 \leqslant x^2 - x + 1 \quad \text{et} \quad x^2 - x = 1 \leqslant |x| + 1 \\ &\Leftrightarrow \qquad |x| \geqslant -x^2 + x - 2 \quad \text{et} \quad |x| \geqslant x^2 - x. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la seconde équivalence de (a) sur chacune des deux inégalités, on obtient la formule équivalente :

$$(x \leqslant x^2 - x + 2 \text{ ou } -x^2 + x - 2 \leqslant x) \quad \text{et} \quad (x \leqslant -x^2 + x \text{ ou } x^2 - x \leqslant x).$$

Ou encore

$$(x^2 - 2x + 2 \geqslant 0 \text{ ou } x^2 + 2 \geqslant 0) \quad \text{et} \quad (x^2 \leqslant 0 \text{ ou } x^2 - 2x \leqslant 0). \tag{3}$$

Notons que $x^2 + 2 \geqslant 0$ est vrai quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$. Comme une formule du type « P ou vrai » est tout le temps vraie, c'est le cas pour le membre de gauche du « et ». De plus, « vrai et Q » est équivalent à « Q ». Dès lors, (3) est équivalent à

$$x^2 \leqslant 0 \text{ ou } x^2 - 2x \leqslant 0. \tag{4}$$

On a que $x^2 > 0$ sauf si $x = 0$. Donc, $x^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x = 0$. Par ailleurs, le tableau de signe de $x^2 - 2x$ est

x		0		2	
$x^2 - 2x$	$+$	0	$-$	0	$+$

Par conséquent, (4) devient « $x = 0$ ou $x \in [0,2]$ », ce qui est équivalent à $x \in [0,2]$.
En conclusion, $|x^2 - x + 1| \leqslant |x| + 1 \Leftrightarrow x \in [0,2]$.

Question 4. *Donnez la forme trigonométrique des complexes suivants et placez-les dans le plan ci-dessous.*

- $z_1 := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$
- $z_2 := -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$
- $z_3 := \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\boldsymbol{i}$
- $z_4 := z_1^2$

(a) On a $|z_1| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus, z_1 vérifie que $\Im\mathrm{m}(z_1) = -\Re\mathrm{e}(z_1)$ et est dans le quatrième quadrant, donc $\mathrm{Arg}(z_1) = \frac{7\pi}{4}$.

Donc, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$.

(b) On a $|z_2| = \sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$. Puisque $\Im\mathrm{m}(z_2) = \frac{1}{2}$ et z_2 est dans le deuxième quadrant ($\Re\mathrm{e}(z_2) < 0$), il est à l'intersection du cercle trigonométrique et de la droite d'équation $Y = \frac{1}{2}$. Son argument $\mathrm{Arg}(z_2) = \frac{5\pi}{6}$, donc $z_2 = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$.

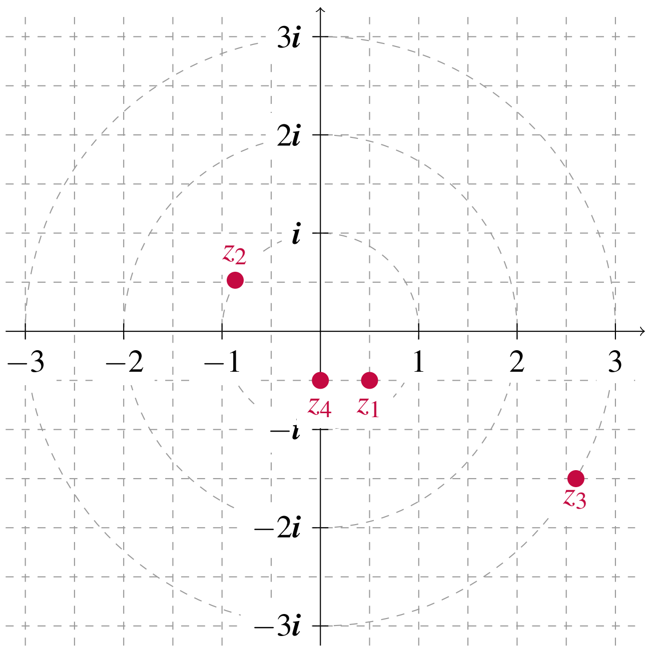
(c) $z_3 = -3(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}) = -3z_2$. Par conséquent, $|z_3| = |-3| \cdot |z_2| = 3 \cdot 1 = 3$.

De plus, $\mathrm{Arg}\, z_3 = \frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}$.

Donc, $z_3 = 3 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$.

(d) On a $|z_4| = |z_1^2| = |z_1| \cdot |z_1| = |z_1|^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$. Par la formule de De Moivre, on obtient

$$z_1^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{14\pi}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{6\pi}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}.$$



Question 5.

(a) *Donnez une équation paramétrique de la droite D_1 passant par le point $(42,-3)$ et parallèle à la droite $D \equiv -2x+1=0$.*

(b) *Donnez une équation cartésienne de la droite D_2 dont l'ordonnée à l'origine vaut -5 et qui est perpendiculaire à la droite D' passant par les points $(2,0)$ et $(0,-3)$.*

Voir correction du test 3, 29 septembre 2010, question 6.

Question 6. *Considérons l'équation d'une droite D :*

$$\alpha x+\beta y=0$$

où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

(a) *Sous quelle(s) condition(s) sur α et β cette droite est-elle le graphe d'une fonction ? Expliquez votre démarche.*

(b) *Montrez que si (a_1,b_1) et (a_2,b_2) sont des points de la droite D, alors $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)$ est aussi un point de la droite D.*

Voir correction du test 4, 8 octobre 2012, question 5.