Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2017)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Soit la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, /3

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 2. Soit le système

$$\begin{cases} (\lambda-3)x+y=0, \\ x+(\lambda-3)y=0, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Montrez que, quelle que soit la valeur de λ, le système n'est jamais impossible.

(b) Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Soient les matrices /2

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, $(BA^t - 2C)^t$. (Pour rappel, si X est une matrice, X^t désigne la transposée de X.)

Question 4. Donnez la forme trigonométrique des nombres complexes suivants : /4

- $z_1 := 2 - 2\boldsymbol{i}$,
- $z_2 := \overline{2 - 2\boldsymbol{i}}$,
- $z_3 := (2 - 2\boldsymbol{i})^{-1}$,
- $z_4 := -(2 - 2\boldsymbol{i})$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5.

/5

- Complétez l'équivalence suivante afin qu'elle soit vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\geqslant 0},\ \forall a \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{x} > a \ \Leftrightarrow \ \boxed{} .$$

- Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) ci-dessous sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

$$\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{3-x}-2|x|\right) > 0 \tag{1}$$

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2017)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$,

/5

(a) $X^2 = \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,

(b) $\boldsymbol{i}X^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{8} = 0$.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2017)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7.

/3

(a) Prouvez que $1 - 2\boldsymbol{i}$ est solution de

$$Z^3 = -11 + 2\boldsymbol{i}. \tag{2}$$

(b) En utilisant (a), donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de (2).

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2017)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soit $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

/4

(a) Prouvez que si u est solution de $X^n = 1$, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, u^k est solution de $X^n = 1$.

(b) Prouvez que si u est solution de $X^n = 1$, alors, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $u^\ell = u^{\ell \bmod n}$.