Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (16 octobre 2017) **Correction**

Question 1. *Soit la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,*

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Cas de base. Vérifions la propriété lorsque $n = 1$. Pour le premier membre, on a $M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ par définition de M et pour le second membre, on a $\begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les deux membres sont donc égaux.

Pas de récurrence. Soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On suppose que la propriété est vérifiée pour tous les naturels n entre 1 et k. Sous cette hypothèse, montrons la propriété pour $n = k+1$, c'est-à-dire $M^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
M^{k+1} &= M^k M && \text{(règle sur les exposants)}\\
&= \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} && \text{(par hypothèse de récurrence dans le cas } n = k\text{)}\\
&= \begin{pmatrix} 2^{k-1}+2^{k-1} & 2^{k-1}+2^{k-1} \\ 2^{k-1}+2^{k-1} & 2^{k-1}+2^{k-1} \end{pmatrix} && \text{(par définition du produit matriciel)}\\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{k-1} & 2\cdot 2^{k-1} \\ 2\cdot 2^{k-1} & 2\cdot 2^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En conclusion, on a montré que $\forall n \geqslant 1,\ M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Question 2. *Soit le système*

$$\begin{cases} (\lambda-3)x + y = 0, \\ x + (\lambda-3)y = 0, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Montrez que, quelle que soit la valeur de λ, le système n'est jamais impossible.*

(b) *Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

Voir correction du test 4, 5 octobre 2015, question 3.

Question 3. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, $(BA^t - 2C)^t$. *(Pour rappel, si* X *est une matrice,* X^t *désigne la transposée de* X*.)*

Voir correction du test 5, 15 octobre 2007, question 1.

Question 4. *Donnez la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :*

- $z_1 := 2 - 2\boldsymbol{i}$,
- $z_2 := \overline{2 - 2\boldsymbol{i}}$,
- $z_3 := (2 - 2\boldsymbol{i})^{-1}$,
- $z_4 := -(2 - 2\boldsymbol{i})$.

- $z_1 = 2 - 2\boldsymbol{i} = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}) = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$ car $|2 - 2\boldsymbol{i}| = 2\sqrt{2}$, $\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.
- $z_2 = \overline{z_1} = \overline{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ par position relative de z_1 et $\overline{z_1}$.
- $z_3 = z_1^{-1} = (2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4})^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ car $(\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4})^{-1} = \overline{\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$
- $z_4 = -z_1 = -2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4} = 2\sqrt{2}(-\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$ par position relative de z_1 et $-z_1$.

Question 5.

- *Complétez l'équivalence suivante afin qu'elle soit vraie :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\geqslant 0},\ \forall a \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{x} > a \ \Leftrightarrow \ \boxed{\begin{cases} x > a^2 & \text{si } a \geqslant 0, \\ \text{toujours vrai} & \text{si } a < 0. \end{cases}}\ .$$

- *Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation* (1) *ci-dessous sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).*

$$\left(\sqrt{x+4} - 2\right)\left(\sqrt{3-x} - 2|x|\right) > 0 \tag{1}$$

Commençons par regarder les conditions d'existence. Comme il y a deux racines carrées, il faut que l'argument de chacune d'elle soit positif. Ceci revient à

$$x + 4 \geqslant 0 \text{ et } 3 - x \geqslant 0,$$

ou encore

$$x \geqslant -4 \text{ et } x \leqslant 3.$$

Les conditions d'existence donnent donc $x \in [-4, 3]$.

Déterminons maintenant le signe des deux facteurs du produit.

- Regardons d'abord quand $\sqrt{x+4}-2>0$. Ceci est équivalent à $\sqrt{x+4}>2$ ou encore, au vu de l'équivalence de la première partie, $x+4>4$, i.e. $x>0$. Le même raisonnement à partir du cas d'égalité $\sqrt{x+4}-2=0$ dit que c'est équivalent à $x=0$. Pour tous les autres x, on a donc $\sqrt{x+4}-2<0$. Au final, on a donc le tableau de signe suivant :

x		0	
$\sqrt{x+4}-2$	$-$	0	$+$

- Regardons maintenant quand $\sqrt{3-x}-2|x|>0$. Ceci est équivalent à $\sqrt{3-x}>2|x|$ ou encore, toujours au vu de l'équivalence de la première partie,

$$3-x>(2|x|)^2=4x^2$$

c'est-à-dire

$$4x^2+x-3<0.$$

Les racines du polynôme sont -1 et $\frac{3}{4}$. Le signe du coefficient de x^2 étant positif, on a le tableau de signe suivant :

x		-1		$\frac{3}{4}$	
$4x^2+x-3$	$+$	0	$-$	0	$+$

Par conséquent,

$$\sqrt{3-x}-2|x|>0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2+x-3<0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left]-1,\frac{3}{4}\right[.$$

Comme précédemment, le cas d'égalité $\sqrt{3-x}-2|x|=0$ devient au final $4x^2+x-3=0$ (refaire le raisonnement) et a donc pour solution $x\in\{-1,\frac{3}{4}\}$. Les autres valeurs de x donnent donc une valeur <0 à $\sqrt{3-x}-2|x|$. On résume la discussion par le tableau suivant :

x		-1		$\frac{3}{4}$	
$\sqrt{3-x}-2|x|$	$-$	0	$+$	0	$-$

Connaissant maintenant le signe des deux facteurs, on peut calculer celui de leur produit :

x	-4		-1		0		$\frac{3}{4}$		3
$\sqrt{x+4}-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\sqrt{3-x}-2|x|$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
produit	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

Au vu de ce tableau, qui tient compte du fait que $x\in[-4,3]$ à cause des conditions d'existence, on déduit que

$$(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{3-x}-2|x|)>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in[-4,-1[\cup\left]0,\frac{3}{4}\right[.$$

Question 6. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$,

(a) $X^2 = \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,

(b) $\boldsymbol{i}X^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{8} = 0.$

(a) On a $\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$. Donc une solution de $X^2 = \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$ puisque par la formule de De Moivre $(\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6})^2 = \operatorname{cis}\frac{10\pi}{6} = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$. L'autre solution est $-\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{cis}\frac{11\pi}{6}$.

(b) Le discriminant Δ de cette équation est

$$\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2 - 4\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{2}{4} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'équation auxiliaire est donc

$$Y^2 = \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

dont les solutions ont été calculées en (a), c'est-à-dire

$$y_1 = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$$

Les solutions de l'équation (b) sont donc

$$x_1 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + y_1\Big)(2\boldsymbol{i})^{-1} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\Big)$$
$$x_2 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + y_2\Big)(2\boldsymbol{i})^{-1} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\Big)$$

ou encore

$$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{3})\boldsymbol{i}$$
$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{3})\boldsymbol{i}.$$

Question 7.

(a) Prouvez que $1 - 2\boldsymbol{i}$ *est solution de*

$$Z^3 = -11 + 2\boldsymbol{i}. \tag{2}$$

(b) En utilisant (a), donner les solutions dans $\mathbb{C}$ *de* (2).

(a) $(1 - 2\boldsymbol{i})^3 = (1 - 2\boldsymbol{i})^2(1 - 2\boldsymbol{i}) = (-3 - 4\boldsymbol{i})(1 - 2\boldsymbol{i}) = -11 + 2\boldsymbol{i}.$

(b) Par la théorie vue au cours, on sait que les solutions de (2) sont de la forme $(1-2\boldsymbol{i})u$ avec u solution de $Z^3 = 1$ c'est à dire $(1-2\boldsymbol{i})$, $(1-2\boldsymbol{i})\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $(1-2\boldsymbol{i})\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$.

Si on veut la forme cartésienne des solutions (pas demandé) les solutions sont

$$1-2\boldsymbol{i}, \quad (1-2\boldsymbol{i})\Big(-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad \text{et} \quad (1-2\boldsymbol{i})\Big(-\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

ou encore

$$1-2\boldsymbol{i}, \quad \frac{2\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}\boldsymbol{i} \quad \text{et} \quad -\frac{2\sqrt{3}+1}{2}+\frac{-\sqrt{3}+2}{2}\boldsymbol{i}.$$

Question 8. *Soit $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Prouvez que si u est solution de $X^n = 1$, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, u^k est solution de $X^n = 1$.

(b) Prouvez que si u est solution de $X^n = 1$, alors, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $u^\ell = u^{\ell \bmod n}$.

(a) Prouver que u^k est solution de $X^n = 1$, revient à prouver que $(u^k)^n = 1$. Par les règles sur les exposants, on a $(u^k)^n = u^{kn} = (u^n)^k$. Par hypothèse $u^n = 1$ (car u est solution de $X^n = 1$), donc $(u^n)^k = 1$.

(b) Soit $\ell \in \mathbb{N}$, par division entière de ℓ par n, on sait qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\ell = qn + (\ell \bmod n).$$

Donc, en utilisant les règles sur les exposants et l'hypothèse $u^n = 1$, on a

$$\begin{aligned} u^\ell &= u^{qn+\ell \bmod n} \\ &= u^{qn}\, u^{\ell \bmod n} \\ &= (u^n)^q\, u^{\ell \bmod n} \\ &= 1^q\, u^{\ell \bmod n} \\ &= u^{\ell \bmod n}. \end{aligned}$$