Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 6 (23 octobre 2017) **Correction**

Question 1. *Soient les vecteurs $v_1 = (-2,9,6)$, $v_2 = (-3,2,1)$ et $v_3 = (1,7,5)$. Existe-t-il des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \ ?$$

Si oui, donnez les tous. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Voir correction du test 6, 23 octobre 2006, question 2.

Question 2. *Calculez les sommes suivantes :*

- $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} 1 = n-1.$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} i = ni$ car i est constant par rapport à j.
- $$\sum_{t=0}^{n}(3t^2-2t+1) = 3\sum_{t=0}^{n} t^2 - 2\sum_{t=0}^{n} t + \sum_{t=0}^{n} 1 = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
  $$= (n+1)\Big(n^2 - \frac{n}{2} + 1\Big)$$

Question 3. *Donnez une formule en terme de $\wedge$, $\vee$, $\neg$ pour la table suivante :*

A	B	C	$F(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$F(A,B,C) \equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$

En effet, F est vraie si et seulement si on est sur la première ligne grisée ou ($\vee$) sur la seconde ligne grisée. Être sur la première ligne signifie que A est faux, B vrai et C vrai. Ceci correspond à la véracité de la formule $\neg A \wedge B \wedge C$. L'analyse est similaire pour la seconde ligne.

Question 4. *Calculez la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} + \operatorname{arctg}(q/x)$ où p et q sont des paramètres réels.*

Voir test 6, 18 octobre 2010, question 2.

Question 5. *Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^{x+x^2} - \alpha \sin x$. Pour quelle(s) valeur(s) de α la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = \pi$ est-elle horizontale ?*

Voir examen du 30 octobre 2010, question 13

Question 6.

(a) *Soit $x \in \mathbb{R}$. Donnez la contraposée de la phrase suivante : « Si la valeur absolue de x est plus petite que tous les réels de la forme $1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, alors x est nul ».*

(b) *Prouvez que $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ est une tautologie.*

Voir question 2, test du 26 octobre 2009

Question 7.

- *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « A est antisymétrique ».*
- *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $M_{ij} = i^{42} - j^{42}$. Montrez que M est une matrice antisymétrique.*
- *Utilisez le point précédent pour calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^{42} - j^{42})$. Expliquez votre démarche.*

Voir correction du test 7, 25 octobre 2010, question 2.

Question 8. *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3 = -8$. Donnez les solutions sous les formes $a + b\boldsymbol{i}$ et trigonométrique. Représentez ces solutions dans le plan complexe.*

Voir correction de la question 3, test du 26 octobre 2009.