

Mathématique Élémentaire

Examen

(29 octobre 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Il est interdit d'avoir son GSM sur soi. Il doit être en mode silencieux dans votre cartable.

Question 1. Prouvez que la formule $\neg(A \Rightarrow B)$ est équivalente à la formule $A \wedge \neg B$.

/2

Question 2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. **Exceptionnellement**, vous ne devez pas justifier votre réponse.

/3

- | | | | | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|---|-------------------------------------|---------------------------------|---|
| (a) Vrai : <input type="checkbox"/> | Faux : <input type="checkbox"/> | $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. | (d) Vrai : <input type="checkbox"/> | Faux : <input type="checkbox"/> | $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \vee \neg B$. |
| (b) Vrai : <input type="checkbox"/> | Faux : <input type="checkbox"/> | $\emptyset \in \{\emptyset\}$. | (e) Vrai : <input type="checkbox"/> | Faux : <input type="checkbox"/> | $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2 \neq 0$. |
| (c) Vrai : <input type="checkbox"/> | Faux : <input type="checkbox"/> | $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$. | (f) Vrai : <input type="checkbox"/> | Faux : <input type="checkbox"/> | $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 2 = 0$. |

Question 3. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x}{1 - e^x}.$$

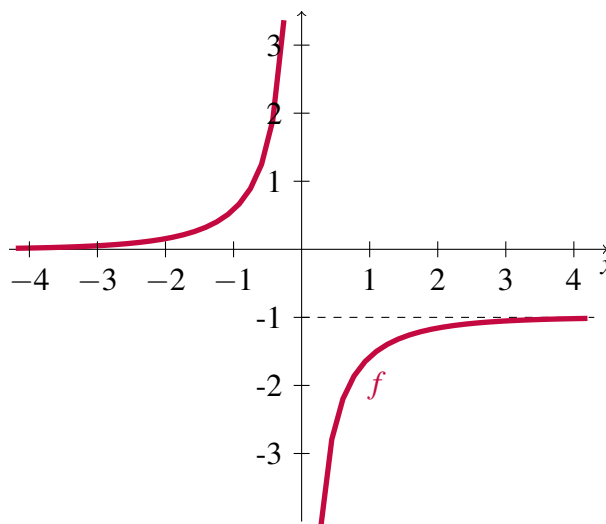
Son graphe est tracé ci-dessous.

/6

- (a) Calculez la fonction dérivée ∂f de f et montrez que $\forall x \in \text{Dom } f, \partial f(x) = f(x) + (f(x))^2$.
- (b) Nous sommes intéressés par la fonction réciproque g de f . En vous servant du graphique ci-dessous, complétez la *définition* de g (il n'est pas demandé d'avoir une « formule explicite » pour g).

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto x$ tel que

- (c) Écrivez les relations qui expriment que la fonction g est la fonction réciproque de la fonction f . Faites attention à quantifier correctement ces relations et aux ensembles sur lesquels elles ont lieu.
- (d) Des relations données en (c) et de la dérivée des fonctions composées, déduisez une formule explicite pour $\partial_y g(y)$ en tout point y de son domaine. Détaillez et justifiez vos calculs.



Mathématique Élémentaire

Examen

(29 octobre 2018)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Donnez en français correct la contraposée de la phrase ci-dessous.

« Si je conduis, alors je ne bois pas d'alcool. »

/ 1

Question 5. Donnez en français correct la négation de la phrase ci-dessous.

« Si je conduis, alors je ne bois pas d'alcool. »

/ 1

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2.$

(b) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a+b)^2 \neq a^2 + b^2.$

(c) Vrai : Faux : $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2.$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Recherchez l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, x_3) de \mathbb{R}^3 qui sont orthogonaux aux droites D_1 et D_2 définies par

/5

$$D_1 \equiv 1 - x = \frac{y + 2}{-3} = \frac{-z + 2}{-1}$$

$$D_2 \equiv (x, y, z) = (3\lambda + 1, -\lambda - 2, 5 + \lambda), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Décrivez géométriquement l'ensemble obtenu.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. Prouvez par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Soient les matrices

$$A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \text{ définie par } A_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } j \geq i, \\ 2^j & \text{sinon,} \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

/4

- (a) Donnez explicitement la matrice A .
- (b) Calculez, si possible, $B^t \cdot C$ et $\det D$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 10. Soit le système

$$\begin{cases} (\cos \theta)x - (\sin \theta)y = 1 \\ (\sin \theta)x + (\cos \theta)y = 1 \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel. Résolvez ce système dans \mathbb{R}^2 en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 11. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (e^{\alpha(x^5-1)} + \sin(\alpha^2x + x^4 - \alpha^2 - 1))^3$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles la droite D d'équation $\frac{1}{3}x - (\alpha + 1)y + 2018 = 0$ est perpendiculaire à la tangente au graphe de f en $x = 1$.

/5

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 12. Soit $S = \left\{ \left(\alpha, \frac{2\alpha - 7}{5} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ l'ensemble des solutions d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

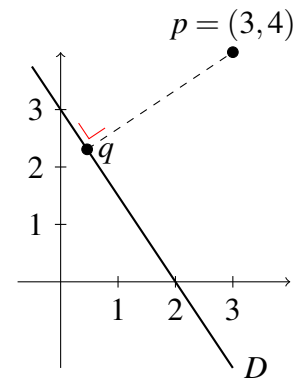
/6

- (a) Les couples $(-11, -3)$ et $(-5, 2)$ sont-ils solutions du système ? Détaillez votre raisonnement.
- (b) Représentez l'ensemble S dans le plan cartésien \mathbb{R}^2 .
- (c) Soit l'ensemble $A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{le produit scalaire entre } (s, t) \text{ et } (2, -5) \text{ est positif}\}$. Montrez que S est contenu dans A et que A n'est pas contenu dans S .

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 13. Considérons la droite D ainsi que les points p et q représentés sur le dessin ci-contre.

- (a) Recherchez les coordonnées de q . Expliquez votre raisonnement.
- (b) Calculez la distance entre p et q .



/ 4