

Mathématique Élémentaire

Examen

(8 janvier 2019)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Il est interdit d'avoir son GSM sur soi. Il doit être en mode silencieux dans votre cartable.

Question 1. La formule $A \Rightarrow B$ est-elle équivalente à la formule $\neg A \vee B$? Justifiez votre réponse.

/2

Question 2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. **Exceptionnellement**, vous ne devez pas justifier votre réponse.

/3

- | | |
|---|---|
| (a) Vrai : <input type="checkbox"/> Faux : <input type="checkbox"/> $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$. | (d) Vrai : <input type="checkbox"/> Faux : <input type="checkbox"/> $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \wedge \neg B$. |
| (b) Vrai : <input type="checkbox"/> Faux : <input type="checkbox"/> $\emptyset \in \{\emptyset\}$. | (e) Vrai : <input type="checkbox"/> Faux : <input type="checkbox"/> $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 2 \neq 0$. |
| (c) Vrai : <input type="checkbox"/> Faux : <input type="checkbox"/> $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$. | (f) Vrai : <input type="checkbox"/> Faux : <input type="checkbox"/> $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2 = 0$. |

Question 3. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Son graphe est tracé ci-dessous.

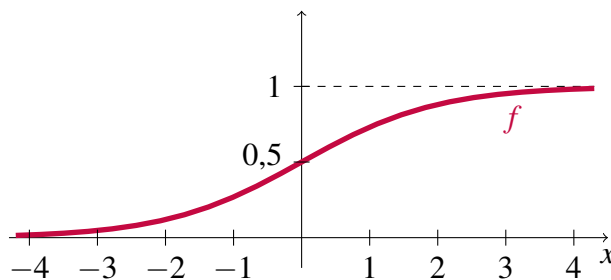
/6

- (a) Calculez la fonction dérivée ∂f de f et montrez que $\forall x \in \text{Dom } f, \partial f(x) = f(x) - (f(x))^2$.
- (b) Nous sommes intéressés par la fonction réciproque g de f . En vous servant du graphique ci-dessous, complétez la *définition* de g (il n'est pas demandé d'avoir une « formule explicite » pour g).

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto x$ tel que

Dom $g =$

- (c) Écrivez les relations qui expriment que la fonction g est la fonction réciproque de f . Faites attention à quantifier correctement ces relations et aux ensembles sur lesquels elles ont lieu.
- (d) Des relations données en (c) et de la dérivée des fonctions composées, déduisez une formule explicite pour $\partial_y g(y)$ en tout point y de son domaine. Détaillez et justifiez vos calculs.



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Donnez en français correct la contraposée de la phrase ci-dessous.

« Si 35 est un nombre premier, alors 22 est un nombre impair. »

/ 1

Question 5. Donnez en français correct la négation de la phrase ci-dessous.

« Si 35 est un nombre premier, alors 22 est un nombre impair. »

/ 1

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{Z} \exists b \in \mathbb{Z} a^2 - b = 0.$

(b) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{Z} \exists b \in \mathbb{Z} a - b^2 = 0.$

(c) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} a - b^2 = 0.$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan β d'équation $x - 2y + 5z = 3$ et contenant la droite D passant par le point $(2, 1, 1)$ et dont un vecteur directeur est $(-1, 2, 1)$.

/5

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. Prouvez par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

/4

Question 9. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculez, si possible, $(BA^t - 2C)^t$. (Pour rappel, si X est une matrice, X^t désigne la transposée de X .)

/3

Question 10. Soit la droite D passant par les points (α_1, β_1) et (α_2, β_2) où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (il n'est par contre pas exclu que $\beta_1 = \beta_2$). Donnez une équation cartésienne de D . Expliquez votre démarche.

/3

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 11. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda^2 x + 4y = 2\lambda \\ \lambda x + y = \lambda/2 \end{cases}$$

/5

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 12. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \alpha(x+1)^7 + \sin(e^{\alpha(x-1)} - x^\alpha)$ où α est un paramètre réel. Déterminez l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles la droite D d'équation $(\alpha+1)x - (8\alpha)^2y + 2018 = 0$ est perpendiculaire à la tangente au graphe de f en $x = 1$.

/5

Question 13. Soient les deux ensembles suivants :

$$A = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha, \beta) \text{ est une solution du système } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$B = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u, v) \text{ est orthogonal à } \left(1, \frac{3}{2}\right) \right\}$$

(a) Montrez que A est contenu dans B .

(b) A-t-on $A = B$? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 14.

/4

- (a) Donnez une équation paramétrique de la droite D_1 passant par le point $(\sqrt{2}, -5)$ et parallèle à la droite $D \equiv -5x + 3 = 0$.
- (b) Donnez une équation cartésienne de la droite D_2 dont l'ordonnée à l'origine vaut -7 et qui est perpendiculaire à la droite D' passant par les points $(-2, 0)$ et $(0, -6)$.