Mathématique Élémentaire

Examen (31 mai 2019)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Il est interdit d'avoir son GSM sur soi. Il doit être en mode silencieux dans votre cartable.

Question 1. La formule $A \Leftrightarrow B$ est-elle équivalente à la formule $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$? Justifiez votre réponse. $/2$

Question 2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. **Exceptionnellement**, vous ne devez pas justifier votre réponse. $/3$

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\mathbb{N} \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{Z}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \Rightarrow \neg B$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$.

(f) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall a \in \mathbb{R} \quad a^3 + 1 \neq a^2 + 1$.

Mathématique Élémentaire

Examen (31 mai 2019)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$. Son graphe est tracé ci-dessous. $/7$

(a) Calculez la fonction dérivée ∂f de f et montrez que $\forall x \in \operatorname{Dom} f,\ \partial f(x) = f(x) - \big(f(x)\big)^2$.

(b) Nous sommes intéressés par la fonction réciproque g de f. En vous servant du graphique ci-dessous, complétez la *définition* de g (il n'est pas demandé d'avoir une « formule explicite » pour g).

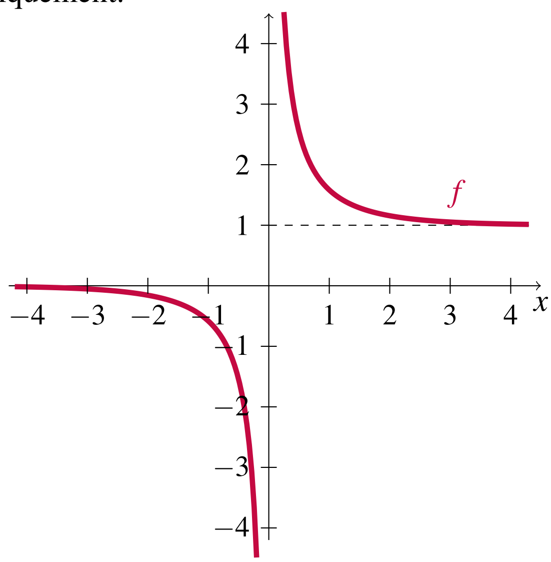
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto x$ tel que

$\operatorname{Dom} g =$

(c) Écrivez les relations qui expriment que la fonction g est la fonction réciproque de f. Faites attention à quantifier correctement ces relations et aux ensembles sur lesquels elles ont lieu.

(d) Des relations données en (c) et de la dérivée des fonctions composées, déduisez une formule explicite pour $\partial_y g(y)$ en tout point y de son domaine. Détaillez et justifiez vos calculs.

(e) La fonction f est-elle décroissante ? Justifiez graphiquement.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Donnez en français correct la contraposée de la phrase ci-dessous. /1

« Si 7 est divisible par 2, alors 3 est impair. »

Question 5. Donnez en français correct la négation de la phrase ci-dessous. /1

« Si la fonction identité est continue, alors la fonction identité est dérivable. »

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : ________

Question 6. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists a \in \mathbb{Z} \quad a^2 - a = 0 \wedge a \neq 0.$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists b \in \mathbb{Z} \quad |a| < b.$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a < b) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad a < c < b.$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(-1,0,2)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x+2y+2z=-1$ et $3x-2y+3z=7$.

/5

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Prouvez par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

/4

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \\ 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9.

/5

(a) Écrivez explicitement la matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par

$$M_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } |i-j| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, $\det(BA)$, C^tB, $\det D$ et AD.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses. /6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le point $(\frac{1}{4}, \frac{7}{2})$ appartient à la droite $D \equiv (x,y) = (-5,0) + \lambda(-3,-2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La droite $D \equiv x = \frac{1}{2}y - 5$ possède $(\pi^{-1}, 2\pi^{-1})$ comme vecteur directeur.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Les droites $D_1 \equiv (x,y) = (7,-1) + \mu(-3,-2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $D_2 \equiv -4x + 6y = 1$ sont confondues.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \alpha \operatorname{tg}\big((x-1)^2\big) + \sin(\mathrm{e}^{2\alpha(x-1)} - x^{\alpha})$ où α est un paramètre réel. Déterminez l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles la droite D d'équation $(\alpha+1)x - 8\alpha^2 y + 2018 = 0$ est perpendiculaire à la tangente au graphe de f en $x = 1$. /5

Mathématique Élémentaire

Examen (31 mai 2019)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Soient les deux ensembles suivants :

/4

$$A = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha, \beta) \text{ est une solution du système } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$B = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u, v) \text{ est orthogonal à } \left(1, \frac{3}{2}\right) \right\}$$

(a) Montrez que A est contenu dans B.

(b) A-t-on $A = B$? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 13. Soit le système

$$\begin{cases} x - \lambda y + \lambda^2 = 0 \\ x + \lambda^2 y + \lambda = 0 \end{cases}$$

/4

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une infinité de solutions ? Expliquez votre raisonnement.

(b) Pour la ou les valeurs trouvées au point précédent, donnez l'ensemble des solutions du système.