

Mathématique Élémentaire

Examen

(13 août 2019)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Il est interdit d'avoir son GSM sur soi. Il doit être en mode silencieux dans votre cartable.

Question 1. La formule $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ est-elle une tautologie ? Justifiez votre réponse.

/2

Question 2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. **Exceptionnellement**, vous ne devez pas justifier votre réponse.

/3

- (a) Vrai : Faux : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.
- (b) Vrai : Faux : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^n + 3^n = 3^{n+1}$.
- (c) Vrai : Faux : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \cdot 2^n = 4^n$.
- (d) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{R}_0 \forall b \in \mathbb{R}_0 \quad a < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
- (e) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{R}_0 \forall b \in \mathbb{R}_0 \quad a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
- (f) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \quad (a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.

Question 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. Son graphe est tracé ci-dessous.

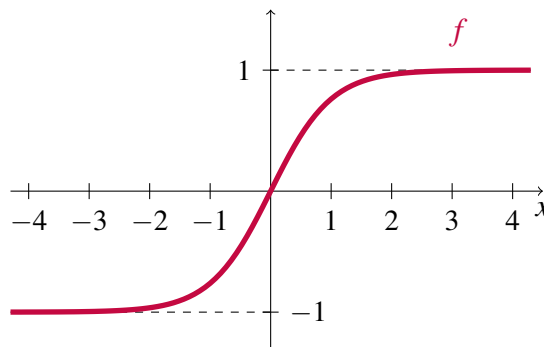
/7

- (a) Calculez la fonction dérivée ∂f de f et montrez que $\forall x \in \text{Dom } f, \partial f(x) = 1 - (f(x))^2$.
- (b) Nous sommes intéressés par la fonction réciproque g de f . En vous servant du graphique ci-dessous, complétez la *définition* de g (il n'est pas demandé d'avoir une « formule explicite » pour g).

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto x$ tel que

Dom $g =$

- (c) Écrivez les relations qui expriment que la fonction g est la fonction réciproque de f . Faites attention à quantifier correctement ces relations et aux ensembles sur lesquels elles ont lieu.
- (d) Des relations données en (c) et de la dérivée des fonctions composées, déduisez une formule explicite pour $\partial_y g(y)$ en tout point y de son domaine. Déterminez et justifiez vos calculs.
- (e) La fonction f est-elle croissante? Justifiez graphiquement si la définition de croissance est vérifiée ou non.



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Donnez en français correct la contraposée de la phrase ci-dessous.

« *Si l'exponentielle est holomorphe et continue, alors l'exponentielle est conforme .* »

/ 1

Question 5. Donnez en français correct la négation de la phrase ci-dessous.

« *Quel que soit n un naturel, si n est premier, alors n est impair.* »

/ 1

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : Faux : $\exists a \in \mathbb{N} \quad a^2 + a = 0 \wedge a \neq 0.$

(b) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = 1.$

(c) Vrai : Faux : $\exists a \in \mathbb{Z} \quad \exists b \in \mathbb{Z} \quad (a < b) \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad a < c < b.$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. Soit le plan α d'équation $\alpha \equiv 2x - 3y - z = -6$ et le point p de coordonnées $(0, 1, -8)$.

/5

(a) Donnez une équation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point p et perpendiculaire au plan α .

(b) Recherchez le point d'intersection entre la droite D et le plan α .

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. Prouvez par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9.

/5

(a) Écrivez explicitement la matrice $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie par

$$M_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ i & \text{sinon.} \end{cases}$$

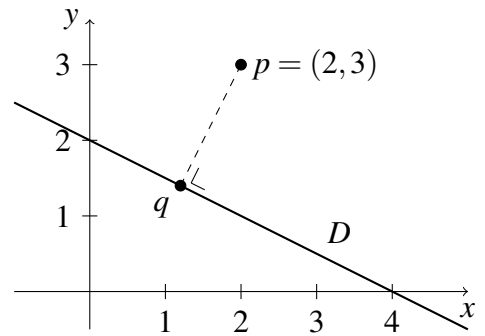
Calculez ensuite $\det M$.

(b) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = (5 \ 2 \ -1), \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = (-3 \ 4).$$

Calculez, si possible, BA , CD^t , $\det C^2$.

Question 10. Considérons la droite D ainsi que les points p et q représentés sur le dessin ci-contre. Recherchez les coordonnées du point s qui est le symétrique orthogonal du point p par rapport à la droite D .



/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 11. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \alpha \operatorname{tg}((x-1)^2) + \sin(e^{2\alpha(x-1)} - x^\alpha)$ où α est un paramètre réel. Déterminez l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles la droite D d'équation $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}x - 8y + 2019 = 0$ est perpendiculaire à la tangente au graphe de f en $x = 1$.

/5

Question 12. Soient les deux ensembles suivants :

$$A = \left\{ \left(\lambda, \frac{2\lambda - 7}{5} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{le produit scalaire entre } (\alpha, \beta) \text{ et } (2, -5) \text{ est positif} \right\}$$

(a) Montrez que A est contenu dans B .

(b) A-t-on $A = B$? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 13. Soit le système

$$\begin{cases} x - \lambda y = 2\lambda \\ \lambda x + y = 1 + \lambda^2 \end{cases}$$

/5

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez une interprétation géométrique des résultats obtenus. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.