Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 2 (24 septembre 2018) **Correction**

Question 1. *Donnez la table de vérité de la formule* $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$.

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

Question 2. *Donnez en français correct la contraposée de l'affirmation ci-dessous.*

$$\text{Si } \underbrace{\text{la fonction identité est dérivable en } 2}_{A} \text{ alors } \underbrace{\text{la fonction identité est continue en } 2}_{B}.$$

La formule associée à la phrase ci-dessus est $A \Rightarrow B$. La contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\neg B \Rightarrow \neg A$. En français, $\neg B \Rightarrow \neg A$ se traduit par *« Si la fonction identité n'est pas continue en* 2*, alors la fonction identité n'est pas dérivable en* 2*. »*

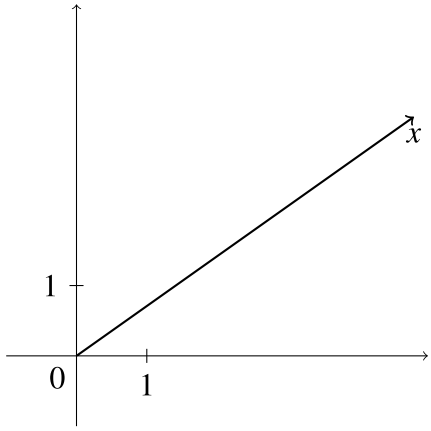
Question 3. *Soient les vecteurs* $u = (-1,-3,2)$ *et* $v = (0,1,4)$. *Calculez*

- $(u|v) =$
- $\|2u - v\| =$
- *la distance entre u et v.*

Voir correction du test 2, 25 septembre 2017, Question 1.

Question 4. *Soit* $x \in \mathbb{R}^2$ *le vecteur représenté ci-dessous. Construisez, sur ce même graphique, le vecteur* $v = x/\|x\|$. *Expliquez comment vous réalisez votre construction.*

Voir correction du test 2, 25 septembre 2017, Question 5.



Question 5.

(a) *On considère deux fonctions dérivables $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans le cadre qui suit, donnez la règle de dérivation de la fonction $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(g(x))$ en un point a.*

$$\boxed{\partial_x(f \circ g)(a) = \partial f\big(g(a)\big)\, \partial g(a)}$$

(b) *On considère les fonctions*

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \arctan\left(\frac{t}{t^2+1}\right) \qquad \text{et} \qquad v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{\tan x^2}.$$

Calculez les fonctions dérivées de u et v. Les règles de calcul utilisées à chaque étape doivent être clairement indiquées. Pour v, chaque fois que vous appliquez la règle donnée en (a), veuillez préciser les fonctions f et g considérées. Simplifiez les fractions qui pourraient se trouver dans les expressions finales.

Pour la fonction u.

$$\begin{aligned}\partial_t u(t) &= \partial_t \left(\arctan y \big|_{y=\frac{t}{t^2+1}} \right) \\ &= \big(\partial_y \arctan y\big)\big|_{y=\frac{t}{t^2+1}} . \partial_t \left(\frac{t}{t^2+1}\right) \qquad \text{(règle de dérivation des fonctions composées)} \\ &= \frac{1}{1+y^2}\bigg|_{y=\frac{t}{t^2+1}} \cdot \frac{\partial_t t \cdot (t^2+1) - t \cdot \partial_t (t^2+1)}{(t^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité résulte de la dérivée de la fonction élémentaire arctan et, pour le facteur de droite, de la règle de dérivation d'un quotient. On a donc

$$\begin{aligned}\partial_t u(t) &= \frac{1}{1+\frac{t^2}{(t^2+1)^2}} \cdot \frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{(t^2+1)^2 \qquad (1-t^2)}{\big((t^2+1)^2+t^2\big)(t^2+1)^2} \\ &= \frac{1-t^2}{t^2+(t^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Pour la fonction v. Par la règle de dérivation d'un quotient, on a

$$\partial_x v(x) = \frac{\partial_x x \cdot \tan x^2 - x \cdot \partial_x \left(\tan x^2\right)}{(\tan x^2)^2}.$$

Par ailleurs, $\tan x^2 = f(g(x))$ avec $f(y) = \tan y$ et $g(x) = x^2$. Par la règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$\partial_x(\tan x^2) = \partial_y f\big(g(x)\big) \cdot \partial_x g(x) = \big(1+(\tan x^2)^2\big) \cdot 2x,$$

où la dernière égalité résulte du fait que $\partial f(y) = \partial_y(\tan y) = 1+(\tan y)^2$ et $\partial g(x) = \partial_x(x^2) = 2x$. Dès lors

$$\partial_x v(x) = \frac{\tan x^2 - 2x^2(1+\tan^2 x^2)}{\tan^2 x^2}.$$

Question 6. *Soit $f : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables définies sur tout $\mathbb{R}$. Donnez une formule pour le calcul de la dérivée de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \big(f(x)\big)^{g(x)}$ en fonction de f, g et de leurs dérivées. Détaillez les différentes étapes de votre raisonnement.*

Comme pour tout $s \in]0,+\infty[$, $\mathrm{e}^{\ln s} = s$ (vu que l'exponentielle et le logarithme sont des fonctions réciproques), on peut écrire h comme $h(x) = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$ en se rappelant que $\ln a^b = b \ln a$ quels que soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Dès lors

$$\begin{aligned}
\partial_x h(x) &= \partial_x \left(\mathrm{e}^y|_{y=g(x)\ln f(x)}\right) \\
&= (\partial_y \mathrm{e}^y)|_{y=g(x)\ln f(x)} \cdot \partial_x\big(g(x)\ln f(x)\big) && \text{(dérivée de fonctions composées),} \\
&= \mathrm{e}^y\big|_{y=g(x)\ln f(x)} \big(\partial g(x)\cdot \ln f(x) + g(x)\cdot \partial_x(\ln f(x))\big) && \text{car } \partial_y \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^y \text{ et dérivée d'un produit,} \\
&= \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} \Big(\partial g(x) \ln f(x) + g(x) \partial_x(\ln z|_{z=f(x)})\Big) \\
&= \big(f(x)\big)^{g(x)} \big(\partial g(x) \ln f(x) + g(x)(\partial_z \ln z)|_{z=f(x)}\, \partial f(x)\big) && \text{(dérivée de fonctions composées),} \\
&= (f(x))^{g(x)} \left(\partial g(x) \ln f(x) + g(x)\frac{\partial f(x)}{f(x)}\right) && \text{car } \partial_z \ln z = \frac{1}{z}.
\end{aligned}$$

Question 7. *Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *La formule $\neg(P \wedge \neg P)$ est une tautologie.*

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *La négation de la formule $P \Rightarrow Q$ est équivalente à la formule $P \Rightarrow \neg Q$.*

(a)

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$\neg(P \wedge \neg P)$
1	0	0	1
0	1	0	1

Vu que la dernière colonne n'est composée que de 1, $\neg(P \wedge \neg P)$ est une tautologie.

(b)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \Rightarrow \neg Q$	$(\neg(P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0

On voit que $(\neg(P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$ n'est pas une tautologie. Donc $\neg(P \Rightarrow Q)$ n'est pas équivalente à $P \Rightarrow \neg Q$.

Question 8. *Soit la droite* $D \equiv (x,y) = (-4,3) + \lambda(-2,7)$, *où* $\lambda \in \mathbb{R}$.

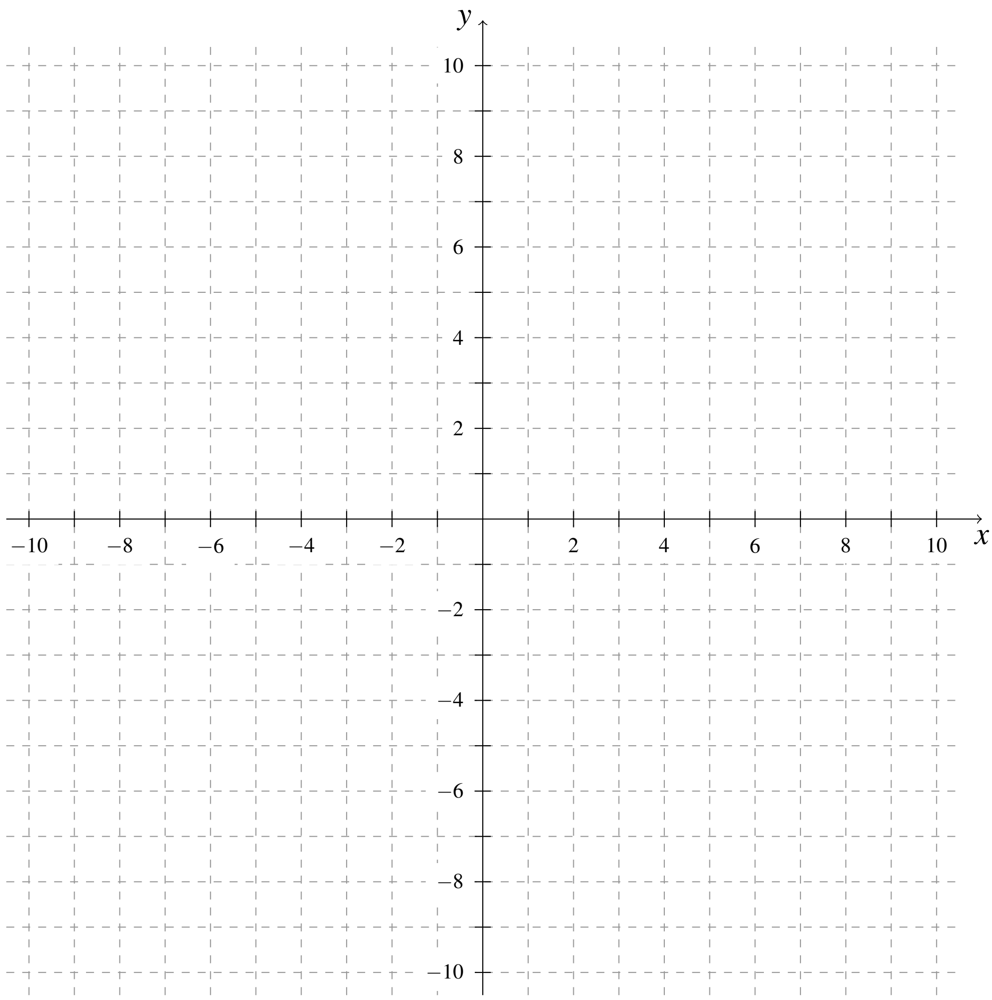
(a) *Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(i) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☐ *Le point* $\left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *appartient à la droite D.*

(ii) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☐ *Le vecteur* $\left(\frac{2\pi}{7}, -\pi\right)$ *est un vecteur directeur de D.*

(b) *Représentez graphiquement la droite D dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

Voir correction du test 3, 2 octobre 2017, Question 3.



Algèbre I

Test n° 1 (24 septembre 2018)

Correction

- Cette partie concerne uniquement les mathématiciens et les physiciens.
- Les consignes que pour la partie de « Mathématique Élémentaire » restent d'application.

Question 1. *Soit p et q deux nombres réels, $\Delta = q^2/4 + p^3/27$ et supposons que $\Delta \geqslant 0$. Prouver que*

$$r = r_1 + r_2 \quad \textit{avec} \quad r_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} \quad \textit{et} \quad r_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$.

Voir correction du test 3, 2 octobre 2017, Question 7.