Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (1 octobre 2018) **Correction**

Question 1. *Donnez en français correct la négation de l'affirmation ci-dessous.*

$$\text{Quel que soit } n \text{ un nombre naturel, } \underbrace{\text{si } n \text{ est pair}}_{P(n)}, \text{ alors } \underbrace{n^2 \text{ est pair}}_{Q(n)}.$$

La formule associée à la phrase ci-dessus est

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow Q(n).$$

La négation de la formule ci-dessus est la formule :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad P(n) \wedge \neg Q(n).$$

En français, cela se traduit par

« Il existe un naturel n tel que n est pair et n^2 n'est pas pair. »

Question 2. *Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considérons la droite D d'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.*

(a) Donnez la pente de D.

(b) Donnez une équation paramétrique de D.

(c) Donnez une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à la droite D et passant par l'origine du repère.

Voir correction du Test 3, 28 septembre 2015, Question 2.

Question 3. *Pour chacune des formules ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 2x + 1 = 0.$

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad ab = 1.$

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad ab = 1.$

(a) Pour prouver que la formule est fausse. On va montrer que sa négation est vraie. La négation de la formule $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 2x + 1 = 0$ est la formule $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 2x + 1 \neq 0$.

Pour montrer que la formule $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 2x + 1 \neq 0$ est vraie, **on choisit** $x = 0$, on a clairement que $0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0$.

(b) Pour prouver que la formule est fausse. On va montrer que sa négation est vraie. La négation de la formule $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad ab = 1$ est la formule $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad ab \neq 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ **(quelconque)**, on **choisit** $b = 0$, on a clairement que $ab = a \cdot 0 = 0 \neq 1$.

(c) Pour prouver que la formule est fausse. On va montrer que sa négation est vraie. La négation de la formule $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad ab = 1$ est la formule $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad ab \neq 1$.

On **choisit** $a = 0$, **quel que soit** $b \in \mathbb{R}$, on clairement que $ab = 0 \cdot b = 0 \neq 1$.

Question 4.

(a) Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 dont l'ordonnée à l'origine vaut -5 et qui est perpendiculaire à la droite $D \equiv y - 3x = 4$.

(b) Donnez une équation paramétrique de la droite D_2 passant par les points $(4, -5)$ et $(-2, -4)$.

(c) Donnez une équation paramétrique de la droite D_3 passant par le point $(-\sqrt{5}, \sqrt{2})$ et parallèle à l'axe des y.

(a) On a $D \equiv -3x + y = 4$. Un vecteur normal de D est $(-3, 1)$. Le vecteur $(1, 3)$ est orthogonal à $(-3, 1)$ car $\big((1,3)|(-3,1)\big) = -3 + 3 = 0$. C'est donc un vecteur normal de D_1 car D_1 et D sont perpendiculaires.

Donc $D_1 \equiv x + 3y = c$. On sait de plus que l'ordonnée à l'origine de D_1 vaut -5. Autrement dit, $(0, -5)$ est un point de D_1. On trouve c en remplaçant x par 0 et y par -5 dans l'équation de D_1 : $0 + 3 \cdot (-5) = c$, c'est-à-dire $c = -15$.

Donc $D_1 \equiv x + 3y = -15$.

(b) Un vecteur directeur de D_2 est $(-2 - 4, -4 + 5) = (-6, 1)$. On connaît aussi un point de D_2, par exemple $(4, -5)$. Donc $D_2 \equiv (x, y) = (4, -5) + \lambda(-6, 1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Un vecteur directeur de l'axe des y est par exemple, $(0, 1)$. C'est donc un vecteur directeur de D_3 puisque les droites sont parallèles. On connaît aussi un point de D_3.

Donc $D_3 \equiv (x, y) = (-\sqrt{5}, \sqrt{2}) + \lambda(0, 1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 5. *Soient les propositions P, Q, R définies par*

$P :=$ *les deux droites d'équations* $x+y+1=0$ *et* $y=x+1$ *sont parallèles.*

$Q :=$ *la droite d'équation* $2-y=3$ *est le graphe d'une fonction.*

$R :=$ *l'implication* $P \Rightarrow Q$ *est vraie.*

Quelle est la valeur de vérité de la proposition

$$(P \vee Q) \wedge R\,?$$

Expliquez votre démarche.

Cherchons d'abord la valeur de vérité des propositions P, Q et R.
P est fausse. En effet, deux droites sont parallèles si elles ont la même pente. Or la pente de la droite d'équation $x+y+1=0$ vaut -1 car cette équation s'écrit $y=-x-1$ (la pente est le coefficient de x), et la pente de la droite d'équation $y=x+1$ vaut 1. Ces deux pentes sont différentes.
La valeur de vérité de P est donc 0.
Q est vraie puisque l'équation s'écrit $y=-1$. Cette droite horizontale est le graphe de la fonction constante $f(x)=-1$. La valeur de vérité de Q est donc 1.
R est vraie puisque la prémisse P de l'implication est fausse.
On a donc

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$
0	1	1	1	1

La proposition $(P \vee Q) \wedge R$ a donc 1 comme valeur de vérité.

Question 6. *Décrivez géométriquement les ensembles suivants et représentez les graphiquement. Détaillez les arguments qui vous permettent de décrire l'objet représenté par chaque ensemble.*

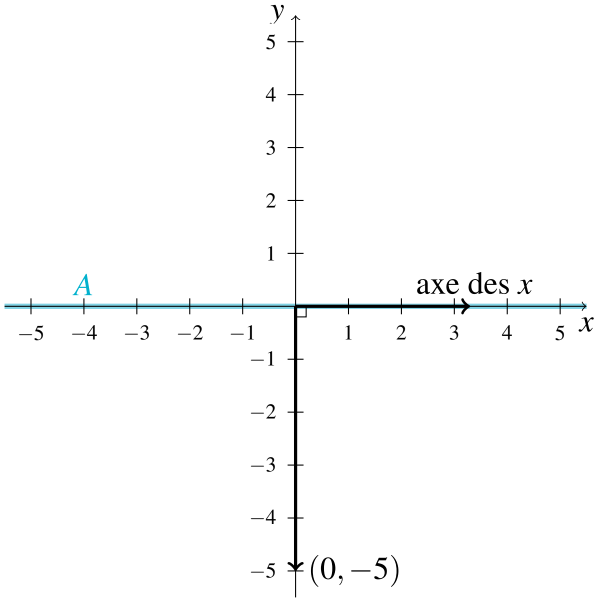
(a) *A est l'ensemble des vecteurs (α, β) de $\mathbb{R}^2$ tels que (α, β) est un vecteur orthogonal au vecteur $(0,-5)$.*

(b) *B est l'ensemble des vecteurs (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tels que (α, β, γ) est un vecteur orthogonal au vecteur $(0,-5,0)$.*

(a) A est l'ensemble des vecteur (α, β) tels que $\big((\alpha,\beta)|(0,-5)\big)=0$, c'est-à-dire $\alpha \cdot 0 + \beta \cdot (-5) = 0$, c'est-à-dire $-5\beta = 0$, c'est-à-dire $\beta = 0$.

A est donc l'ensemble des vecteurs (α, β) tels que $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta = 0$. C'est l'axe des x.

Remarque : Un dessin de la forme suivante peut aider à déterminer l'ensemble A.



(b) B est l'ensemble des vecteurs (α,β,γ) tels que $\big((\alpha,\beta,\gamma)|(0,-5,0)\big)=0$, c'est-à-dire $-5\beta=0$, c'est-à-dire $\beta=0$. B est donc l'ensemble des vecteurs (α,β,γ) tels que $\alpha\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}$, et $\beta=0$. C'est le plan OXZ.

Remarque : un dessin de la forme suivante peut aider à déterminer l'ensemble B.