Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (8 octobre 2018) Correction

Question 1. *Donnez en extension l'ensemble ci-dessous.*

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{(1 \leqslant n \leqslant 10)}_{P(n)} \wedge \underbrace{(n \textit{ est pair } \Rightarrow n+1 \textit{ est un multiple de } 3)}_{Q(n)}\}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour que n soit un élément de S, il faut qu'il satisfasse la formule $P(n) \wedge Q(n)$. En particulier vu qu'il s'agit d'une conjonction, n doit satisfaire $P(n)$, i.e n est un nombre dans l'ensemble $\{1, \ldots, 10\}$. Parmi les nombres de cet ensemble, on va identifier ceux qui satisfont $Q(n)$. Le prédicat $Q(n)$ est une implication, de la forme $A(n) \Rightarrow B(n)$, où $A(n)$ signifie « n est pair » et $B(n)$ signifie « $n+1$ est un multiple de 3 ».

Pour rappel, la table de vérité de l'implication est donnée ci-dessous.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Pour satisfaire l'implication, soit $A(n)$ et $B(n)$ doivent être tous les deux vrais, soit $A(n)$ doit être faux. De façon formelle, on a que $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. Donc n satisfait $Q(n)$ si et seulement si soit n est impair, soit n est pair et $n+1$ est un multiple de 3. On peut donc écrire S sous forme extensive :

$$S = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}.$$

On remarque que les seuls éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, 10\}$ qui ne sont pas dans S sont 4, 6 et 10. Ces trois éléments sont les seuls à ne pas satisfaire $Q(n)$. On a que ces trois éléments satisfont la négation de $Q(n)$, c'est-à-dire $\neg\big(A(n) \Rightarrow B(n)\big) \equiv A(n) \wedge \neg B(n)$. En français : « n est pair et $n+1$ n'est pas un multiple de 3 ». On a bien que 4 est pair et $4+1 = 5$ n'est pas un multiple de 3. Il en est de même pour 6 et 10.

Question 2.

(a) *Donnez une équation cartésienne du plan α comprenant le point $(3, -2, 4)$ et parallèle au plan $\beta \equiv x = z$.*

(b) *Donnez une équation paramétrique de la droite D passant par le point $(-2, 3, 4)$ et parallèle à la droite D_1 d'équations $x - 2 = \dfrac{3-y}{-2} = \frac{1}{3}(z-4)$*

(a) On a $\beta \equiv x - z = 0$. Un vecteur normal de β est donc $(1,0,-1)$. C'est aussi un vecteur normal de α puisque les deux plans sont parallèles. Donc $\alpha \equiv x - z = d$. Comme $(3,-2,4) \in \alpha$, on trouve d en remplaçant x par 3 et y par -2 et z par 4 dans l'équation : $3 + 0 \cdot (-2) - 4 = d$. Donc $d = -1$. En conclusion $\alpha \equiv x - z = -1$.

(b) On a

$$D_1 \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

Un vecteur directeur de D_1 est donc $(1,2,3)$. Comme $D \parallel D_1$, $(1,2,3)$ est aussi un vecteur directeur de D. En conclusion $D \equiv (x,y,z) = (-2,3,4) + \lambda(1,2,3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 3. *Calculez les dérivées des fonctions f, g et h suivantes en détaillant les différentes étapes de vos calculs.*

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \tan^3 x$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \sqrt{1+\sqrt{s}}$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \dfrac{1+\mathrm{e}^{t^2}}{t^{3/5}}$

- Pour f :

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x) &= \partial_x(\tan^3 x) \\
&= \partial_y y^3\Big|_{y=\tan x} \cdot \partial_x(\tan x) && \text{(Dérivée de fonctions composées)} \\
&= 3y^2\Big|_{y=\tan x} \cdot (1+\tan^2 x) \\
&= 3\tan^2 x \cdot (1+\tan^2 x)
\end{aligned}$$

- Pour g :

$$\begin{aligned}
\partial_s g(s) &= \partial_s \sqrt{1+\sqrt{s}} \\
&= \partial_y \sqrt{y}\Big|_{y=1+\sqrt{s}} \cdot \partial_s(1+\sqrt{s}) && \text{(Dérivée de fonctions composées)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big|_{y=1+\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{s}} && \text{(Dérivée de } \sqrt{\cdot} \text{ et d'une somme)} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{1+\sqrt{s}}\,\sqrt{s}}
\end{aligned}$$

- Pour h :

$$\begin{aligned}\partial_t h(t) &= \partial_t\left(\frac{1+\mathrm{e}^{t^2}}{t^{3/5}}\right)\\ &= \frac{\partial_t(1+\mathrm{e}^{t^2})\cdot t^{3/5} - (1+\mathrm{e}^{t^2})\cdot \partial_t t^{3/5}}{(t^{3/5})^2} \qquad \text{(Dérivée d'un quotient)}\\ &= \frac{\partial_y \mathrm{e}^y\big|_{y=t^2}\cdot \partial_t t^2 \cdot t^{3/5} - (1+\mathrm{e}^{t^2})\cdot \frac{3}{5}\cdot t^{\frac{3}{5}-1}}{t^{6/5}}\end{aligned}$$

où on a utilisé la dérivée de fonctions composées pour le premier terme et la dérivée de $t \to t^\alpha$ pour le second. On a donc

$$\begin{aligned}\partial_t h(t) &= \frac{2t^{8/5}\cdot \mathrm{e}^{t^2} - \frac{3}{5}\cdot t^{-2/5}\cdot(1+\mathrm{e}^{t^2})}{t^{6/5}}\\ &= 2t^{2/5}\mathrm{e}^{t^2} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{t^2}}{t^{8/5}} \qquad \text{(autre forme possible)}\end{aligned}$$

Question 4. *Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\{1,2,3\}\cap\{3,4,5\} = \{5\}$.

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\{x\in\mathbb{N} \mid (1\leqslant x)\vee(x\leqslant 3)\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$.

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+1=0\}\subseteq\{n\in\mathbb{Z}\mid n^6-n^3+1=0\}$.

(a) Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si $A\subseteq B$ et $B\subseteq A$. Pour montrer que deux ensembles sont différents, il suffit de prouver qu'une des deux inclusions n'est pas satisfaite.

On peut prouver que $\{5\}\not\subseteq\{1,2,3\}\cap\{3,4,5\}$.

Rappels :

- $A\subseteq B$ si et seulement si $\forall x\ (x\in A)\Rightarrow(x\in B)$.
- On a donc que $A\not\subseteq B$ si et seulement si $\exists x\ (x\in A)\wedge(x\notin B)$.

Pour prouver que $\{5\}\not\subseteq\{1,2,3\}\cap\{3,4,5\}$, il suffit donc de trouver un élément de $\{5\}$ qui n'est pas dans $\{1,2,3\}\cap\{3,4,5\}$. On **prend** 5, on a clairement que $5\in\{5\}$. Il reste à prouver que $5\notin\{1,2,3\}\cap\{3,4,5\}$. Par définition de l'intersection de deux ensembles, $5\in\{1,2,3\}\cap\{3,4,5\}$ si et seulement si $5\in\{1,2,3\}$ **et** $5\in\{3,4,5\}$. Clairement, $5\notin\{1,2,3\}$, et donc $5\notin\{1,2,3\}\cap\{3,4,5\}$.

(b) Au vu du rappel du point (a), pour prouver que l'inclusion est fausse, il suffit de trouver x tel que $x\in\big\{x\in\mathbb{N}\bigm|(1\leqslant x)\vee(x\leqslant 3)\big\}$ et $x\notin\{1,2,3,4,5\}$. On **prend** $x=7$. On a que $7\in\{x\in\mathbb{N}\mid(1\leqslant x)\vee(x\leqslant 3)\}$, car la formule $(1\leqslant 7)\vee(7\leqslant 3)$ est satisfaite, vu que $1\leqslant 7$ est vraie. De plus, on a clairement que $7\notin\{1,2,3,4,5\}$.

(c) L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$ est vide. On sait que pour tout ensemble B, on a que l'ensemble vide est inclus à B. En effet, soit B un ensemble, pour montrer que $\varnothing \subseteq B$, il faut montrer que $\forall x \quad x \in \varnothing \Rightarrow x \in B$. Par définition de l'ensemble vide, quel que soit x, on a nécessairement que $x \in \varnothing$ est faux. Donc, au vu de la table de vérité de l'implication, quel que soit x, on a que $x \in \varnothing \Rightarrow x \in B$ est vraie.

Question 5. *Considérons la droite D_1 passant par les points $(0,2)$ et $(4,0)$ ainsi que la droite D_2 passant par $(2,3)$ et perpendiculaire à D_1. Recherchez l'ensemble S qui décrit l'intersection des droites D_1 et D_2. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Recherchons tout d'abord une équation cartésienne de chaque droite.
La pente de D_1 vaut $\frac{0-2}{4-0} = \frac{-1}{2}$. Comme D_1 n'est pas une droite verticale (puisque sa pente est bien définie), une équation cartésienne de D_1 est de la forme $y = m \cdot x + p$ avec $m = -\frac{1}{2}$. Comme $(0,2) \in D_1$, on trouve p en remplaçant x par 0 et y par 2 : $2 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + p$. Donc $p = 2$. Ainsi $D_1 \equiv y = -\frac{1}{2}x + 2$.
Comme D_1 et D_2 sont perpendiculaires, la pente de D_2 vaut 2 car le produit des pentes de deux droites perpendiculaires vaut -1. On a donc $D_2 \equiv y = 2x + p$. Comme $(2,3) \in D_2$, on trouve p en remplaçant x par 2 et y par 3 : $3 = 2 \cdot 2 + p$. Donc $p = -1$. Ainsi $D_2 \equiv y = 2x - 1$.
On trouve l'ensemble S en résolvant le système formé par les équations de D_1 et D_2 :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

On en déduit que

$$-\frac{1}{2}x + 2 = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2}x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6}{5}.$$

En remplaçant par exemple dans la deuxième équation on a $y = 2 \cdot \frac{6}{5} - 1$, c'est-à-dire $y = \frac{7}{5}$.
Il y a donc un unique point d'intersection entre D_1 et D_2 qui est $\left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$. En conclusion $S = \left\{\left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)\right\}$.