Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 5 (15 octobre 2018) **Correction**

Question 1.

(a) Complétez la définition suivante de la fonction arccos *:*

$$\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R} : y \mapsto x \text{ tel que } \cos x = y \text{ et } x \in [0,\pi].$$

(b) Écrivez les relations qui expriment que la fonction arccos *est la fonction réciproque de la fonction* cos. *Faites attention à quantifier correctement ces relations et aux ensembles sur lesquels elles ont lieu.*

$$\forall x \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos x) = x,$$

et

$$\forall y \in [-1,1], \quad \cos(\arccos y) = y.$$

(c) À partir des relations données en (b), retrouvez la formule usuelle de la dérivée de la fonction arccos. *Détaillez et justifiez vos calcul*

Nous allons employer la seconde relation de (b). Comme l'égalité est vraie pour tout y, il s'agit de l'égalité de deux fonctions, leurs dérivées sont donc égales. On a

$$\begin{aligned} 1 = \partial_y y = \partial_y(\cos(\arccos y)) \\ &= \partial_x \cos x|_{x=\arccos y} \cdot \partial_y(\arccos y) \\ &= -\sin x|_{x=\arccos y} \cdot \partial_y(\arccos y) \end{aligned}$$

Par la relation fondamentale de la trigonométrie, on a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Lorsque $x = \arccos y$, on a $x \in [0,\pi]$ et donc $\sin x \geqslant 0$. Dès lors

$$\sin x|_{x=\arccos y} = \sqrt{1-\cos^2 x}\Big|_{x=\arccos y} = \sqrt{1-y^2}$$

où la seconde égalité découle de la seconde relation de (b). En remplaçant dans le calcul de la dérivée, on obtient

$$1 = -\sqrt{1-y^2} \cdot \partial_y(\arccos y)$$

Si $y \in \{-1,+1\}$, cette équation ne peut être vraie pour une valeur réelle de $\partial_y \arccos y$, ce qui est le témoin que cette dérivée n'existe pas en ces points. Pour $y \in \,]-1,1[$, on a

$$\partial_y(\arccos y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Question 2. *Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse.* ***Exceptionnellement****, vous ne devez pas justifiez votre réponse.*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$.
(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\varnothing \in \mathbb{N}$.
(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $a \in \{\{a\}, b\}$.
(d) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $b \in \{\{a\}, b\}$.
(e) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\{a\} \in \{\{a\}, b\}$.
(f) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\varnothing \subseteq \varnothing$.
(g) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\mathbb{N} = \mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$.
(h) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $a \subseteq \{\{a\}, b\}$.
(i) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $b \subseteq \{\{a\}, b\}$.
(j) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\{a\} \subseteq \{\{a\}, b\}$.

Question 3. *Soit le système*

$$\begin{cases} (\lambda - 3)x + y = 0 \\ x + (\lambda - 3)y = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Montrez que, quelle que soit la valeur de λ, le système n'est jamais impossible.*

(b) *Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

Voir la correction du test 4, 8 octobre 2007, Question 7.

Question 4. *Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\forall A \subseteq \mathbb{N} \quad A \subseteq \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$.

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall A \subseteq \mathbb{N} \quad \forall B \subseteq \mathbb{N} \quad \forall C \subseteq \mathbb{N} \quad (A \subseteq B \cup C) \Rightarrow (A \subseteq B) \vee (B \subseteq C)$.

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\forall A \subseteq \varnothing \quad \forall B \subseteq \varnothing \quad A \cap B = A \cup B$.

(a) **Soit** $A \subseteq \mathbb{N}$. On sait (vu au cours) que $\varnothing \subseteq A$, quel que soit A un ensemble. Si $A \subseteq \varnothing$, on a donc que $\varnothing \subseteq A$ et $A \subseteq \varnothing$, donc $A = \varnothing$ par définition de l'égalité de deux ensembles.

(b) Pour montrer que la formule est fausse, on va montrer que la négation de la formule est vraie. La négation de la formule

$$\forall A \subseteq \mathbb{N} \quad \forall B \subseteq \mathbb{N} \quad \forall C \subseteq \mathbb{N} \quad (A \subseteq B \cup C) \Rightarrow (A \subseteq B) \vee (B \subseteq C)$$

est la formule

$$\exists A \subseteq \mathbb{N} \quad \exists B \subseteq \mathbb{N} \quad \exists C \subseteq \mathbb{N} \quad (A \subseteq B \cup C) \wedge (A \not\subseteq B) \wedge (B \not\subseteq C).$$

En effet, on a que $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ et $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$, comme le prouve la table de vérité ci-dessous.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$P \wedge \neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1

On **choisit** $A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$ et $C = \{2\}$. On a que $B \cup C = \{1,2\}$. On a que $A = B \cup C$, donc en particulier (vu la définition de l'égalité de deux ensembles) $A \subseteq B \cup C$.

Pour prouver que $A \not\subseteq B$ (au vu de la négation de la définition de $A \subseteq B$), il faut montrer que la formule suivante est vraie : $\exists x\, x \in A \wedge x \notin B$. On **choisit** $x = 2$, on a clairement que $2 \in \{1,2\} = A$ et $2 \notin \{1\} = B$. On montre de la même façon que $B \not\subseteq C$.

(c) **Soient** $A \subseteq \varnothing$ et $B \subseteq \varnothing$, par le point (a), on peut conclure que nécéssairement $A = \varnothing = B$. Vu que $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing = \varnothing \cap \varnothing$, on a prouvé l'assertion.

Question 5. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \arctan(ax + \sin^2 x)$ où a est un paramètre réel. Déterminez toutes les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la droite $D \equiv ax - (10\pi a - 8)y + 42 = 0$ est parallèle à la tangente au graphe de f en $x = \pi$.*

Pour commencer, rappelons que deux droites sont parallèles si

(a) leurs pentes existent et sont égales, ou

(b) ces deux droites sont verticales (auquel cas aucune des deux droites n'a de pente).

Dans le cas de l'énoncé, vu qu'une de ces droites est une tangente au graphe d'une fonction f en $x = \pi$, elle a une pente qui est donnée par $\partial f(\pi)$. La droite D doit donc elle aussi posséder une pente et cette dernière doit être égale à $\partial f(\pi)$. Distinguons deux cas :

(a) Si $10\pi a - 8 = 0$, i.e., si $a = \frac{4}{5\pi}$, alors la droite D est verticale et elle ne peut donc être parallèle à la tangente.

(b) Si au contraire $a \neq \frac{4}{5\pi}$, on peut écrire l'équation de D comme

$$D \equiv y = \frac{ax + 42}{10\pi a - 8}$$

et on en déduit que sa pente m_D vaut

$$m_D = \frac{a}{10\pi a - 8}$$

(c'est le coefficient de x). Par ailleurs, calculons la dérivée de f

$$\begin{aligned}
\partial f(x) &= \big(\partial_y \arctan y\big)\big|_{y=ax+\sin^2 x} \cdot \partial_x\big(ax + \sin^2 x\big) \\
&= \frac{1}{1+y^2}\bigg|_{y=ax+\sin^2 x} \cdot \Big(\partial_x(ax) + \partial_z z^2\big|_{z=\sin x} \cdot \partial_x \sin x\Big) \\
&= \frac{1}{1 + \big(ax + \sin^2 x\big)^2} \cdot (a + 2\sin x \cdot \cos x)
\end{aligned}$$

Dès lors, la pente de la tangente au graphe de f en $x=\pi$ vaut :

$$\partial f(\pi) = \frac{a+2\sin\pi\cos\pi}{1+(a\pi+\sin^2\pi)^2} = \frac{a}{1+\pi^2a^2}.$$

Le critère de parallélisme rappelé ci-dessus nous dit qu'on veut déterminer les $a\in\mathbb{R}$ tels que $\partial f(\pi) = m_D$, c'est-à-dire

$$\frac{a}{1+\pi^2a^2} = \frac{a}{10\pi a-8}.$$

On voit que $a=0$ est une solution. Si $a\neq 0$, on peut simplifier a et multiplier par les dénominateurs, ce qui donne

$$10\pi a - 8 = 1+\pi^2a^2$$

ou encore

$$\pi^2a^2 - 10\pi a + 9 = 0.$$

Le discriminant Δ de cette équation du second degré vaut $\Delta = 100\pi^2 - 4\pi^2\cdot 9 = 64\pi^2$. Les deux solutions sont donc

$$\frac{10\pi+\sqrt{\Delta}}{2\pi^2} = \frac{10\pi+8\pi}{2\pi^2} = \frac{9}{\pi} \qquad \text{et} \qquad \frac{10\pi-\sqrt{\Delta}}{2\pi^2} = \frac{1}{\pi}.$$

Notons que ces valeurs sont bien différentes de $\frac{4}{5\pi}$, aucune n'est donc à exclure. En conclusion, l'ensemble des valeurs de a qui vérifient la condition de l'énoncé est $\{0, \frac{1}{\pi}, \frac{9}{\pi}\}$.

Question 6. *Soient les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculez, si possible :

- $$\begin{aligned} CB - 2A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10+12+56 & -4+6+35 \\ -10-12+24 & 4-6+15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 78 & 37 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 & 37 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

- $$ED = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 10 \\ -2 & 1 & -5 \\ 10 & -5 & 25 \end{pmatrix}$$

Algèbre I

Test n° 2 (15 octobre 2018)

Correction

- Cette partie concerne uniquement les mathématiciens et les physiciens.
- Les consignes données pour la partie de « Mathématique Élémentaire » restent d'application.

Question 1. *Donnez la forme trigonométrique des complexes suivants (expliquez votre démarche) :*

- $z_1 := \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\boldsymbol{i}}{2} = \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ car $|z_1| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
- $z_2 := -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\boldsymbol{i}}{2} = -z_1 = -\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ par position relative de z_1 et $-z_1$.
- $z_3 := \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^{-1} = z_2^{-1} = \left(\operatorname{cis}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right)^{-1} = \overline{\operatorname{cis}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)} = \operatorname{cis}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$
- $z_4 := \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^{3} = z_1^3 = \left(\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^{3} = \operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{6}\right)$ par la formule de De Moivre.

Pour chacun des nombres complexes précédents z_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, représentez graphiquement z_i et $-\boldsymbol{i}\cdot z_i$ dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.

On a que $-\boldsymbol{i} = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, donc $-\boldsymbol{i}\cdot z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$. On procède de la même manière pour z_2, z_3 et z_4.