Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (22 octobre 2018) **Correction**

Question 1. *Soient les matrices $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définies par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculez $\det A$ *et* $\det B$.

Par la méthode des cofacteurs, en développant par rapport à la première ligne de A, on a

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0-1) = -1$$

Pour $\det B$, si on développe par rapport à la première ligne de B, on a

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ ca & ab \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ bc & ab \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ bc & ca \end{vmatrix} \\ & = 1 \cdot (ab^2 - ac^2) - 1 \cdot (a^2b - bc^2) + 1 \cdot (a^2c - b^2c) \\ & = ab^2 - ac^2 - a^2b + bc^2 + a^2c - b^2c \end{aligned}$$

Question 2. *Soit le système*

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

(a) *Résolvez ce système dans le plan $\mathbb{R}^2$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

(b) *Résolvez ce système dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

Voir correction du Test 4, 6 octobre 2014, Question 2.

Question 3. *Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(-1,0,2)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x+2y+2z=-1$ et $3x-2y+3z=7$.*

On a $\alpha \equiv ax+by+cz=d$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et (a,b,c) est un vecteur normal au plan.

Appelons D la droite d'intersection des deux plans. Comme α est perpendiculaire à D, (a,b,c) est un vecteur directeur de D. D'autre part, $(4,2,2)$ est un vecteur normal du plan d'équation $4x+2y+2z=-1$ et $(3,-2,3)$ est un vecteur normal du plan d'équation $3x-2y+3z=7$. Comme D est contenue dans chaque plan, (a,b,c) sera simultanément orthogonal à $(4,2,2)$ et à $(3,-2,3)$. On est donc amené à résoudre le système

$$\begin{cases} 4a+2b+2c=0 & (1) \\ 3a-2b+3c=0 & (2) \end{cases}$$

où chaque équation exprime que le produit scalaire de (a,b,c) avec chaque vecteur est nul. De (1) on a $2b=-4a-2c$. En remplaçant dans (2), on a : $3a+4a+2c+3c=0$, c'est-à-dire $7a=-5c$, c'est-à-dire $a=\frac{-5}{7}c$. En remplaçant dans (1), on a $2b=\frac{20}{7}c-2c=\frac{6}{7}c$, c'est-à-dire $b=\frac{3}{7}c$. En prenant $c=7$, on trouve que $(-5,3,7)$ est un vecteur directeur de D et donc c'est un vecteur normal de α.

Donc $\alpha \equiv -5x+3y+7z=d$. Comme $(-1,0,2)\in\alpha$, on trouve d en remplaçant x par -1, y par 0 et z par 2 : $5+0+14=d$, c'est-à-dire $d=19$. En conclusion $\alpha \equiv -5x+3y+7z=19$.

Question 4. *Montrez par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \;=\; 2^{n+1}-1.$$

On doit prouver par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 2^k \;=\; 2^{n+1}-1}_{P(n)}.$$

Cas de base : On montre que $P(0)$ est vraie. On doit donc montrer que

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k \;=\; 2^{0+1}-1.$$

Ce qui est vrai car $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1$ et $2^{0+1}-1=2-1=1$.

Cas général : On montre que $\forall n\in\mathbb{N} \quad P(n)\Rightarrow P(n+1)$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie (hypothèse de récurrence), on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \;=\; 2^{n+1}-1. \tag{3}$$

On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie, on veut donc montrer :

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1. \tag{4}$$

Si on ajoute 2^{n+1} aux deux membres de l'égalité (3), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}.$$

Ce qui est équivalent à

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

On retrouve l'équation (4), ce que l'on voulait démontrer.

Question 5. *Prouvez à l'aide d'une* ***preuve directe*** *l'affirmation suivante. Veillez à soigner la présentation et la structure de la preuve.*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 6n+4 \textit{ est pair}.$$

Pour rappel, un naturel n est pair si et seulement si $\exists a \in \mathbb{Z} \quad n = 2a$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour prouver que $6n+4$ est pair, il suffit de trouver un entier a tel que $6n+4 = 2a$.
On a que $6n+4 = 2(3n+2)$, en prenant $a = 3n+2$, on a clairement que $6n+4 = 2a$. De plus $3n+2 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Question 6. *Prouvez à l'aide d'une preuve par* ***contraposée*** *l'affirmation suivante. Veillez à soigner la présentation et la structure de la preuve.*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 3n+2 \textit{ est pair} \Rightarrow n \textit{ est pair}.$$

La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Nous allons donc prouver

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \text{ est impair} \Rightarrow 3n+2 \text{ est impair}.$$

Pour rappel un nombre naturel n est impair si et seulement si $\exists a \in \mathbb{Z} \quad n = 2a+1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que n est impair, donc il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2a+1$.
On doit montrer que $3n+2$ est impair. On donc donc trouver $b \in \mathbb{Z}$ tel que $3n+2 = 2b+1$.
Vu que $n = 2a+1$, on a que $3n+2 = 3(2a+1)+2 = 6a+3+2 = 6a+5 = 6a+4+1 = 2(3a+2)+1$.
En prenant $b = 3a+2$, on a bien que $3n+2 = 2b+1$. De plus, $b \in \mathbb{Z}$, car $3 \in \mathbb{Z}$.

Question 7.

(a) *Calculez* $(\sin x\ \cos x)\big|_{x=\pi} = \sin\pi\cos\pi = 0\cdot(-1) = 0.$

(b) *Écrivez l'expression qui correspond au calcul complet expliqué ci-dessous en français en plusieurs étapes. Il ne faut donc* pas *effectuer un quelconque calcul mais simplement écrire une « formule » qui reflète parfaitement la description en français.*

(i) *On part de l'expression* $x+1$.

(ii) *On multiplie cette dernière par* $1+\cos x$.

(iii) *On ajoute* 1 *au résultat.*

(iv) *On divise le tout par* $1+x^2$.

Réponse :

$$\frac{(x+1)\cdot(1+\cos x)+1}{1+x^2}$$

Si vous désirez montrer les différentes étapes utilisées pour obtenir cette réponse, faites-le ici.

Les expressions obtenues aux différentes étapes sont

(i) $x+1$, l'expression de départ.

(ii) $(x+1)\cdot(1+\cos x)$ en n'oubliant pas les parenthèses vu qu'on veut multiplier les deux expressions entre elles et que la multiplication a priorité sur l'addition.

(iii) $(x+1)\cdot(1+\cos x)+1$ où on n'a pas besoin de parenthèses additionnelles vu la priorité des opérations.

(iv) $\frac{(x+1)\cdot(1+\cos x)+1}{1+x^2}$.

(c) *Écrivez le résultat obtenu en substituant, dans l'expression* a^2b+c*, la variable* a *par* $1+x^2$*, la variable* b *par* $1-x^2$ *et la variable* c *par* -1*. Développez ensuite le résultat.*

Puisqu'on doit élever toute l'expression au carré, il ne faut pas oublier les parenthèses dans $a^2\big|_{a=1+x^2} = \left(1+x^2\right)^2$. De nouveau, la multiplication par b, qui va être remplacé par une somme, nécessite des parenthèses. On a donc, qu'après substitution, l'expression a^2b+c devient

$$\begin{aligned}
(1+x^2)^2(1-x^2)+(-1) &= (1+2x^2+x^4)(1-x^2)-1 \\
&= 1-x^2+2x^2-2x^4+x^4-x^6-1 \\
&= -x^6-x^4+x^2 \\
&= -x^2(x^4+x^2-1) \qquad \text{(si on veut mettre } x^2 \text{ en évidence).}
\end{aligned}$$