

Mathématique Élémentaire

Examen

(17 juin 2020)

Nom :

Prénom :

Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- L'examen dure 2 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte.
- Veillez à *identifier clairement la question* à laquelle vous répondez. De plus, vos fichiers seront nommés Q1 . pdf (si vous regroupez différentes pages répondant à la première question) ou Q1-1 . jpg, Q1-2 . jpg,... (avec un extension . jpg, . gif ou . png) et ainsi de suite.
- Téléversez vos réponses à la fin du temps imparti sur le devoir de « Moodle examen ».
- En cas de *problème technique* :

(a) Utilisez la fiche de diagnostic de l'UMONS et vérifiez l'état des services. Si un voyant est rouge, le problème est général et l'université y travaille déjà.

(b) En cas d'impossibilité de se connecter ou si le problème subsiste, signalez et enregistrez le problème via le Helpdesk de l'UMONS par :

- ▶ le formulaire sur www.umons.ac.be/2323 ;
- ▶ mail à 2323@umons.ac.be en indiquant vos nom, prénom, matricule, téléphone, description du problème, code de l'AA si applicable ;
- ▶ téléphone au +32 65 37 2323 (lun-ven 7:30-21:30 et sam 7:30-16:30).

Si vous avez accès à internet, privilégiez le contact par formulaire ou par email. Téléphonez en dernier recours. N'oubliez pas de nous prévenir dans les 24 heures.

- Comme le recteur vous l'a annoncé, nous vous accordons notre confiance durant ces examens en vous rappelant néanmoins l'article 34 de l'Annexe 0 du règlement des études.
- Rédigez les réponses à des questions séparées sur des feuilles séparées.

Question 1. Choisissez une (et une seule) affirmation correcte parmi celles énoncées ci-dessous. Prouvez que l'affirmation que vous avez choisie est effectivement correcte (vous ne devez pas prouver que les autres sont fausses).

- (a) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, n est impair si et seulement si $2n$ est pair.
- (b) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, n est pair si et seulement si $2n + 1$ est pair.
- (c) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, n est pair si et seulement si $2n + 1$ est impair.
- (d) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, n est pair si et seulement si $n^2 + 3$ est impair.
- (e) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, n est impair si et seulement si $n^2 + 3$ est impair.

/4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. On note $P(n)$ le prédicat « $n^3 - n$ est un multiple de 3 ».

On note $Q(n)$ le prédicat suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

Choisissez une (et une seule) affirmation correcte parmi celles énoncées ci-dessous. Prouvez que l'affirmation que vous avez choisie est effectivement correcte (vous ne devez pas prouver que les autres sont fausses).

- (a) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
- (b) $P(0)$ est fausse, mais quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 1$ alors $P(n)$ est vraie.
- (c) $P(0)$ et $P(1)$ sont fausses, mais quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 2$ alors $P(n)$ est vraie.
- (d) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 1$ alors $Q(n)$ est vraie.
- (e) $Q(1)$ est fausse, mais quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 2$ alors $Q(n)$ est vraie.

/4

Question 3.

- (a) Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 passant par $(1, -3)$ et perpendiculaire à la droite D dont une équation paramétrique est $(x, y) = (-1, 4) + \lambda(3, -5)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (b) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D_2 passant par le point $(-5, 0, 2)$ et perpendiculaire au plan d'équation $2x - z = 3$.

/4

Question 4. Soit le système

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$$

- (a) Résolvez ce système dans le plan \mathbb{R}^2 . Interprétez géométriquement les résultats obtenus.
- (b) Résolvez ce système dans l'espace \mathbb{R}^3 . Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

/4

Question 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Définissez « b est la racine carrée de a ».
- (b) À partir de cette définition, prouvez que $\forall a \in [0, +\infty[$, $\sqrt{a} \geq 0$.

La qualité de votre rédaction est importante.

/2

Question 6. En tenant compte des conditions d'existence, dites pour quel ensemble A de valeurs de $x \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence suivante :

$$\sqrt{|x+42|-4} \geq \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow |x+42|-4 \geq \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$$

L'ensemble A doit être exprimé sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Justifiez en détail votre réponse.

/4