Table des matières

I. Fonctions et inéquations polynomiales

1 Notions de base

1.1 Fonctions affines

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ est dite *affine* si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax + b$$

pour certains $a, b \in \mathbb{R}$. Le *graphe* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que y est l'image de x par f. On le note $\operatorname{Graph} f$. Plus concisément,

$$\operatorname{Graph} f := \big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \text{ existe} \big\}.$$

Il est important de remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il y a *au plus un* $y \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) \in \operatorname{Graph}(f)$. Le graphe d'une fonction affine est une droite. Plus précisément, le graphe de la fonction $f(x) = ax + b$ est la droite d'équation cartésienne $y = ax + b$ et d'équation paramétrique

$$(x, y) = (0, b) + \lambda(1, a), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La relation entre les équations cartésiennes et paramétriques est expliquée à la section 23, page 39.

Le a d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ s'appelle le *coefficient angulaire*, la *pente* ou encore la *dérivée* de f. Si $a > 0$, la fonction est croissante ; si $a < 0$, elle est décroissante ; si $a = 0$, elle est constante. [1] Si (x_1, y_1) est un vecteur directeur d'une droite avec $x_1 \neq 0$, cette droite est [2] le graphe d'une fonction affine dont le coefficient angulaire est y_1 / x_1.

1.2 Ordre sur $\mathbb{R}$ et valeur absolue

L'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés élémentaires suivantes :

1. Vous êtes invités à essayer de donner des définitions formelles (donc pas seulement une intuition) des notions « f est croissante », « f est décroissante » et « f est constante ».
2. Démontrez le !

- réflexivité : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$;
- antisymétrie : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors $x = y$;
- transitivité : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$.
- compatibilité avec l'addition : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors $x + y \geqslant 0$.
- compatibilité avec la multiplication : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors $xy \geqslant 0$.

La valeur absolue $|x|$ d'un nombre réel x est définie par

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Notez que $\sqrt{x^2}$ vaut $|x|$ et non x (essayez avec des valeurs numériques !). Pour la résolution d'inéquations comportant des valeurs absolues, on peut revenir à la définition et distinguer les différents cas possibles ou, plus efficacement, utiliser les équivalences

$$\begin{aligned} |x| < r &\iff (-r < x \text{ et } x < r) \\ |x| > r &\iff (x < -r \text{ ou } r < x) \end{aligned}$$

qui sont valides pour tout[3] $r \in \mathbb{R}$. Nous vous laissons le soin de déduire les équivalences analogues pour $\leqslant$ (resp. $\geqslant$) au lieu de $<$ (resp. $>$). Il est attendu que vous puissiez tracer le graphe de $|f|$ à partir du graphe de f. Vous devez être également capables de résoudre graphiquement des inéquations.

1.3 Polynôme du second degré

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un *polynôme du second degré* si f peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

pour certains a, b, $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Le graphe d'une telle fonction est une parabole de sommet $-b/2a$. Si $a > 0$, la parabole est « tournée vers le haut » ; si $a < 0$, elle est « tournée vers le bas ».

2 Exercices

I.1. Tracez le graphe des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2x - 3$

3. Évidemment, si $r \leqslant 0$, on a des équivalences plus simples...

- $g(x) = 2x$
- $h(x) = 2x + 3$

I.2. Quelle est la fonction affine dont le graphe est la droite passant par $(1,1)$ et de vecteur directeur $(2,7)$?

I.3. Quelle est la fonction affine dont le graphe est la droite perpendiculaire à $D \equiv y = 2x + 3$ et passant par $(1,1)$?

I.4. Toutes les droites sont-elles le graphe de fonctions affines ?

I.5. Tracer sur un même graphique le graphe des fonctions suivantes :

- $f(x) = |x|$
- $g(x) = |x - 2|$
- $h(x) = |x + 2|$

I.6. (Examen du 19 janvier 2000) Résolvez algébriquement et graphiquement l'inéquation $|x^2 - 2x - 3| \leqslant x^2 - 1$.

3 Exercices supplémentaires

I.7. Résolvez algébriquement et graphiquement les inéquations suivantes :

(1) $|x| < |x - 1|$

(2) $|x| + |x - 1| \leqslant 3$

(3) $1 + |\pi - x| < 1 - |\pi + x|$

(4) $|x^2 - x| < 2x$

(5) $x|x| > x$

(6) $|x| + |y| \leqslant 3$

I.8. Montrez que $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Déduisez en qu'on a $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$.

I.9. Donnez les ensembles de solutions sur $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes (indiquer au préalable les conditions d'existence).

(1) $|3x+5| \leqslant 2$

(2) $|x^2+3x-3| \geqslant 1$

(3) $\left|\dfrac{x+1}{x^2+2}\right| \leqslant 3$

(4) $|x^2-3| < 3x+2$

(5) $\left|\dfrac{x+2}{x^2-x-6}\right| \leqslant 2$

(6) $3x+2 \leqslant 2|x^2+x-1|$

(7) $\dfrac{2x^2-x-3}{3x^2-2x-5} \leqslant 5$

(8) $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

(9) $\dfrac{\sqrt{x^3(x-1)}}{x} \leqslant \dfrac{3}{8}$

(10) $\dfrac{1}{x(x-1)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x(x+9)}}$

(11) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} \leqslant x$

(12) $\dfrac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2} > 1$

(13) $-3\sqrt{-x^2-x+6} < 2(2x+1) < 3$

(14) $(2x+\sqrt{x})^4+4(2x+\sqrt{x})^2 \leqslant 5$

(15) $2x+1+\sqrt{6-x-x^2} > 0$

(16) $1-\sqrt{\dfrac{x+1}{2x+1}} > \sqrt{\dfrac{4-x}{2x+1}}$

(17) $\ln\big(x-\sqrt{1-x^2}\big) < 0$

(18) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-5x+6}} \leqslant \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-4}$

(19) $\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{2-x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(20) $\left(\dfrac{3-2x}{x-1}\right)^2 \leqslant \left(\dfrac{6-5x}{x+2}\right)^2$

(21) $\log_2(x+1)+\log_4 x < 1$

(22) $|\sin x+1| \leqslant 1$

(23) $\left|2\cos x-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$

(24) $2 \leqslant |x^2+4x-1| < 4$

(25) $|\sin x| \leqslant \cos x$

I.10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} 3x-5 > 2x-1 \\ 5x-8 \leqslant 3x+2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x+1)(x^2+2x-1) > 0 \\ -(x+1)(x^2+x-2) < 0 \end{cases}$

I.11. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le trinôme x^2+mx+m est-il strictement positif dans l'intervalle $[0,1]$?

I.12. Donner, pour chaque valeur réelle m, le nombre de racines strictement supérieures à 1 du trinôme $x^2+2mx+7m-10$.

I.13. Déterminer tous les nombres réels α pour lesquels on a que $\alpha x^2-x+\alpha \geqslant 0$ pour tout $x > 0$.

I.14. Résoudre, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les inéquations :

(1) $\dfrac{x+1}{m} - \dfrac{2x-1}{2} \leqslant 1$

(2) $\dfrac{mx}{m-2} < \dfrac{2x+3}{4} + \dfrac{x-1}{3}$

(3) $\dfrac{2x-1}{m+1} - \dfrac{2x-5}{2(m+1)} > \dfrac{x+2}{3}$

(4) $\dfrac{m}{x} - \dfrac{1}{x-1} > 1$

I.15. Pour quelles valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ a-t-on $\left|\dfrac{x^2+mx+1}{x^2+x+1}\right| < 3$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$?

I.16. Soit $p \in \,]1,+\infty[$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant selon les valeurs de p, l'inéquation $p^{x^2-1} > 5^{x-1}$.

I.17. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (x,y) vérifiant chacun des systèmes d'inéquations suivants.

(1) $\begin{cases} x+y-2 \geqslant 0 \\ -x+6y-3 < 0 \\ 2x-y-8 < 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-y+1 > 0 \\ x+y-4 < 0 \\ x-6y+3 < 0 \end{cases}$

(3) $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$

(4) $|x+y| \leqslant 1$

(5) $0 \leqslant |x|-|y| \leqslant 1$

(6) $\big||x|-|y|\big| \leqslant 1$

I.18. Prouver que les relations suivantes sont vraies pour n'importe quelles valeurs de $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $\max\{x,y\} = \frac{1}{2}\big(x+y+|x-y|\big)$

(2) $\min\{x,y\} = \frac{1}{2}\big(x+y-|x-y|\big)$

(3) $(x+y)^+ := \max\{x+y,0\} \leqslant x^+ + y^+$

(4) $(x+y)^- := \max\{-x-y,0\} \leqslant x^- + y^-$

I.19. (Examen de novembre 1998) Dessinez l'ensemble des solutions du système d'inéquations

$$\begin{cases} 3x+2y \leqslant 5 \\ x \geqslant 1/2 \\ y \geqslant 1/2 \end{cases}$$

I.20. (Test du 4 octobre 1999) Résoudre algébriquement et graphiquement

$$\sqrt{25-x^2} < x.$$

I.21. (Examen du 3 novembre 1999) Résoudre algébriquement et graphiquement l'inéquation suivante :

$$\sqrt{12x+9} < x^2 - 2x - 3$$

(Indiquer au préalable les conditions d'existence.)

II. Fonctions élémentaires et manipulation de graphes

4 Manipulations de base

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

fonction	Le graphe de f subit une...
$x \mapsto f(x-a)$	translation horizontale de a vers la droite si $a > 0$, ou de $\lvert a\rvert$ vers la gauche si $a < 0$.
$x \mapsto f(x)+b$	translation verticale de b vers le haut si $b > 0$, ou de $\lvert b\rvert$ vers le bas si $b < 0$.
$x \mapsto f(x-a)+b$	translation par le vecteur (a,b).
$x \mapsto f(-x)$	symétrie par rapport à l'axe des y.
$x \mapsto -f(x)$	symétrie par rapport à l'axes des x.
$x \mapsto \lvert f(x)\rvert$	symétrie par rapport à l'axes des x des valeurs négatives de f, les valeurs positives ou nulles de f restant inchangées.
$x \mapsto \alpha f(x)$	« homothétie verticale » de rapport α.
$x \mapsto f(\alpha x)$	« homothétie horizontale » de rapport $1/\alpha$; autrement dit, « contraction » horizontale de rapport α si $\alpha \geqslant 1$, « dilatation » horizontale de rapport $1/\alpha$ si $\alpha \leqslant 1$.
$x \mapsto \alpha f(x/\alpha)$	homothétie de centre $(0,0)$ et de rapport α.

5 Exercices

II.1. Parmi les graphes ci-dessous, reconnaissez ceux des fonctions élémentaires suivantes :

(1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

(2) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 4x$

(3) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

(4) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x$

(5) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$

(6) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{2/3}$

(7) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{1/3}$

(8) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lvert x\rvert$

(9) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$

(10) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$

(11) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$

(12) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{tg}(x)$

(13) $[-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \arcsin(x)$

(14) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{arctg}(x)$

(15) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x+\pi/2)$

(16) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x+\pi)$

(17) $\mathbb{R} \circ\!\!\!\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(1/x)$

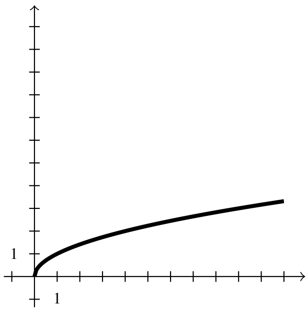
(18) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{x}$

(19) $\mathbb{R} \circ\!\!\!\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$

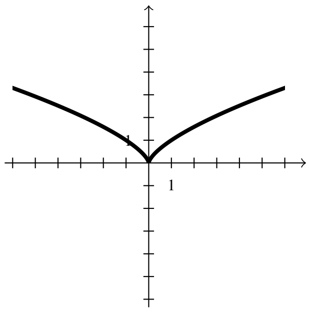
(20) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$

(21) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{sh}(x) := \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

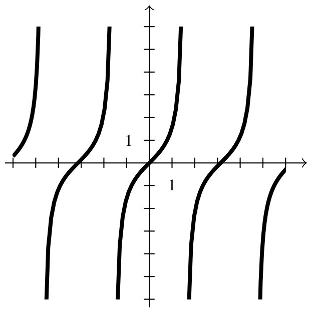
(22) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{ch}(x) := \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$



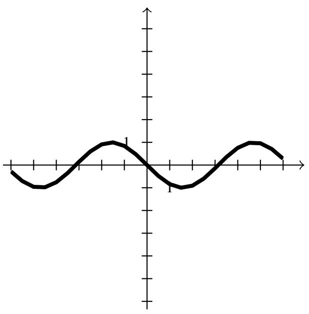
Graphe 1



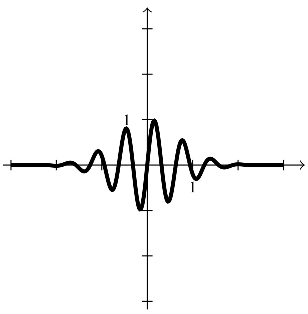
Graphe 2



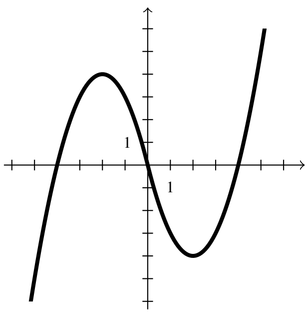
Graphe 3



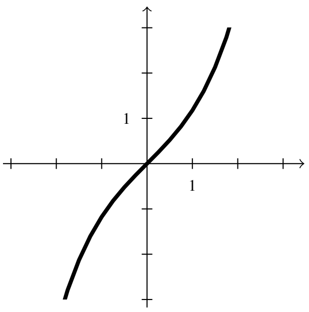
Graphe 4



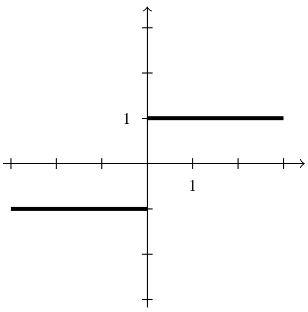
Graphe 5



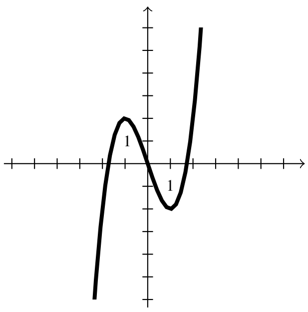
Graphe 6



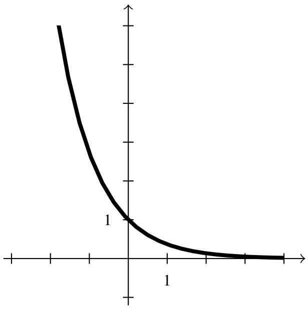
Graphe 7



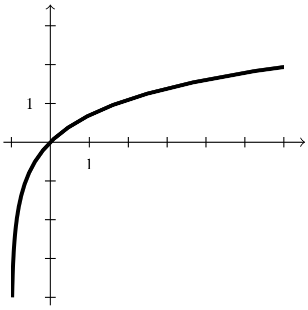
Graphe 8



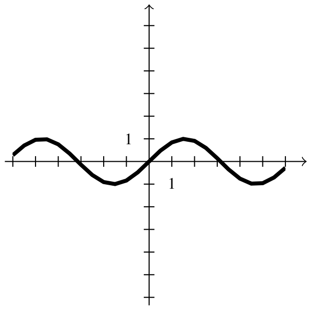
Graphe 9



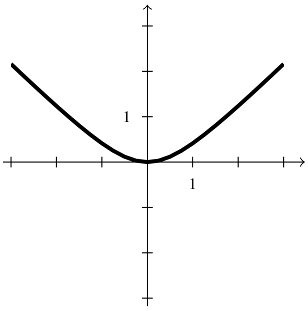
Graphe 10



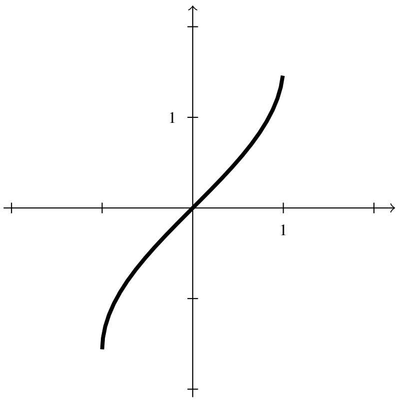
Graphe 11



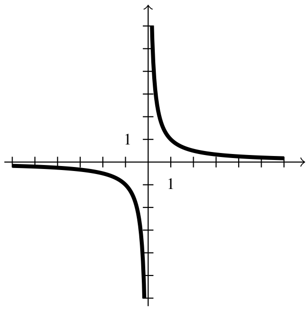
Graphe 12



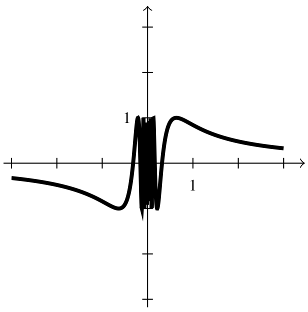
Graphe 13



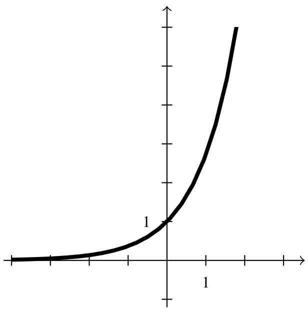
Graphe 14



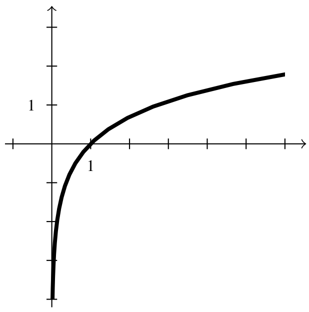
Graphe 15



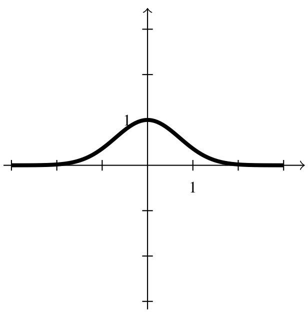
Graphe 16



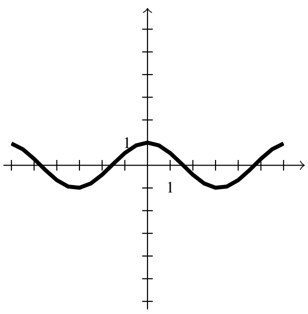
Graphe 17



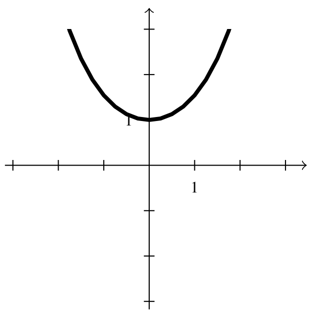
Graphe 18



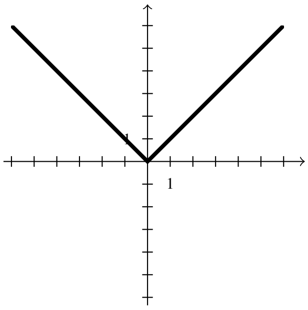
Graphe 19



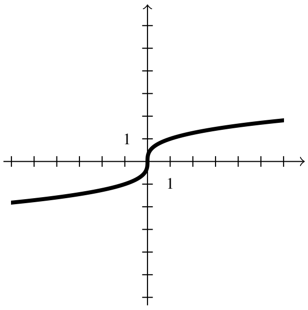
Graphe 20



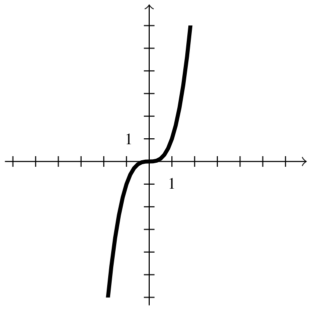
Graphe 21



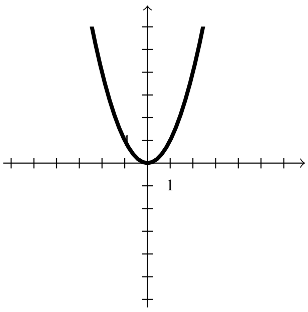
Graphe 22



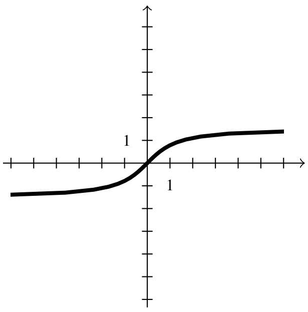
Graphe 23



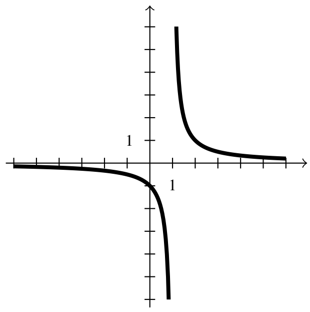
Graphe 24



Graphe 25

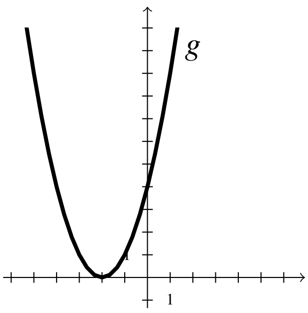


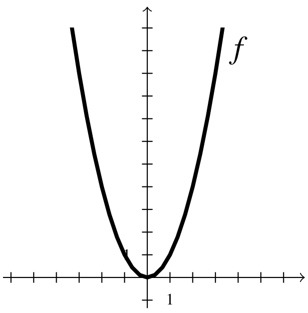
Graphe 26

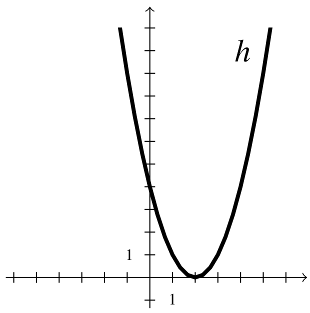


Graphe 27

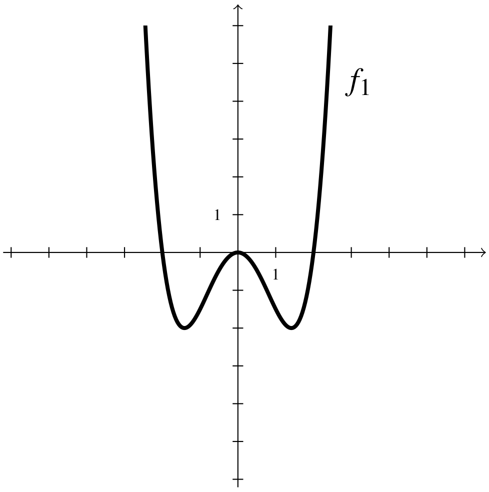
II.2. Quelle est la relation entre les graphes suivants. Exprimez g et h en termes de la fonction f.

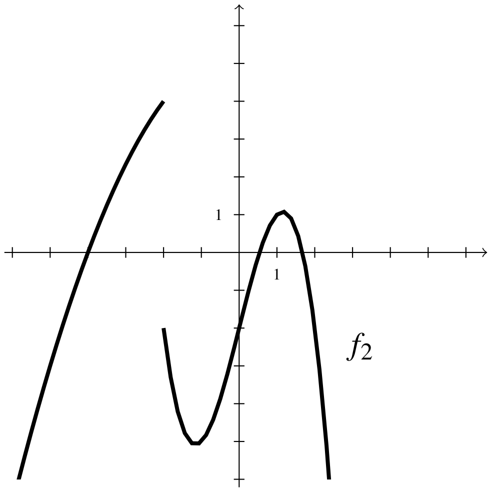






II.3. À partir des graphes ci-dessous représentant différentes fonctions f_i, dessinez le graphe de la fonction g_i définie par $g_i(x) := 1/f_i(x-2)$.





6 Exercices supplémentaires

II.4. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \circ\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ est *paire* (resp. *impaire*) si, pour tout $x \in \operatorname{Dom} f$, on a $-x \in \operatorname{Dom} f$ et $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$). Lesquelles des fonctions suivantes (données par une expression ou par leur graphe) sont paires ou impaires ?

(1) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$

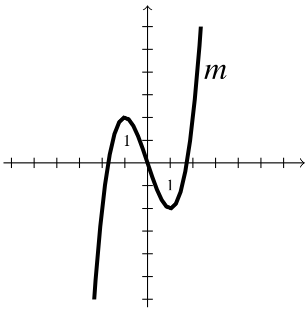
(2) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^5 - x^3 + x$

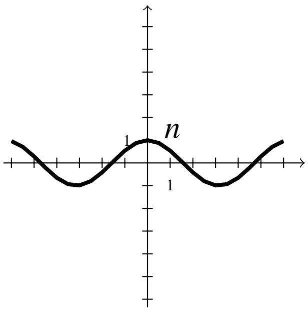
(3) $c : \mathbb{R} \circ\!\!\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

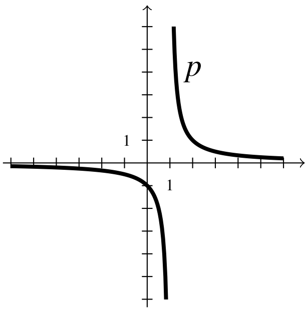
(4) $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \theta \mapsto \sin^2(\theta) + \cos(\theta)$

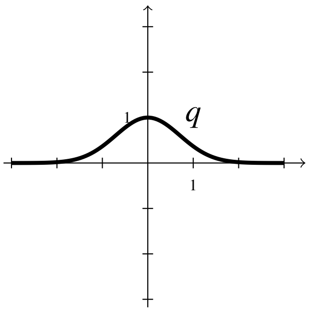
(5) $e : \mathbb{R} \circ\!\!\rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sqrt{2+(1-x)^2}$

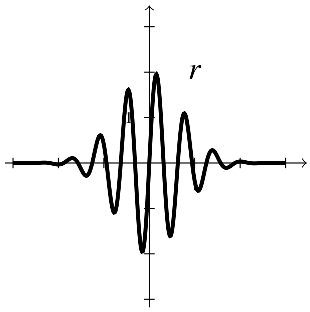
(6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (1-x)^2 + (1+x)^2$

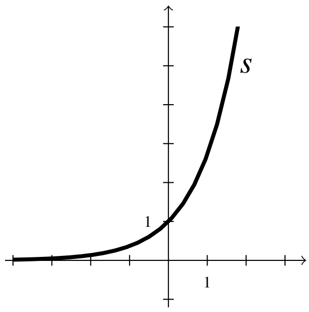




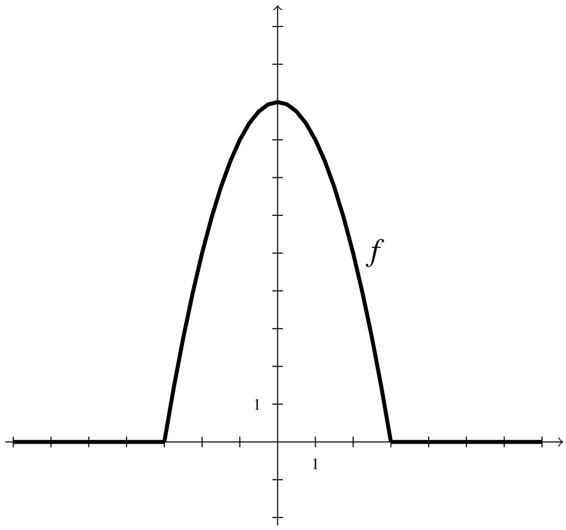








II.5. (Examen du 5 novembre 1997) Tracez (approximativement) le graphe de la fonction g définie par $g(x) := \frac{1}{2} f(x-3)$ où f est donnée par :



II.6. Soit $f : \mathbb{R} \looparrowright \mathbb{R}$ une fonction paire. Déterminez si les fonctions suivantes dont paires ou impaires (ou aucun des deux). Justifiez votre affirmation par une petite démonstration ou un contre-exemple.

(1) $f_1(x) := f(-x)$

(2) $f_2(x) := f(x-1)$

(3) $f_3(x) := f(x) - 1$

(4) $f_4(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ -f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(5) $f_5(x) := \big(f(x)\big)^2$

(6) $f_6(x) := \sqrt{f(x)}$

(7) $f_7(x) := |f(x)| + f(x)$

(8) $f_8(x) := x f(x)$

(9) $f_9 := g \circ f$ où $g : \mathbb{R} \looparrowright \mathbb{R}$ est paire (resp. impaire).

II.7. Refaites l'exercice II.6 en supposant maintenant que f est impaire.

III. Notion générale de fonction

7 Similis de définitions

Une fonction se compose

- d'un ensemble de départ A ;
- d'un ensemble d'arrivée B ;
- d'une association qui fait correspondre, à chaque élément x de A, *au plus un* élément $f(x)$ de B appelé l'image de x par f.

On écrit $f : A \circ\!\!\rightarrow B : x \mapsto f(x)$ et on le lit « f est une fonction de A vers ($\rightarrow$) B et à $x \in A$ fait correspondre ($\mapsto$) $f(x) \in B$ ». Il n'est pas nécessaire que la correspondance s'écrive à l'aide d'une « formule ».

L'ensemble des éléments de A qui ont une image par f s'appelle le *domaine* de f. L'ensemble des points de B qui sont des images par f de points x de A est appelé (logiquement) l'*image* de f.

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in A : f(x) \text{ existe}\}, \qquad \operatorname{Im} f := \{f(x) \in B : x \in \operatorname{Dom} f\}.$$

Lorsque $\operatorname{Dom} f = A$, c'est-à-dire lorsque f est partout définie sur A, on utilise la notation[4] $f : A \to B$ et on appelle f une *fonction totale* ou une *application*. L'*image d'un ensemble* $C \subseteq A$ *par* f est définit par $f(C) := \bigl\{f(x) \in B : x \in (\operatorname{Dom} f) \cap C\bigr\}$. On a alors que $\operatorname{Im} f = f(A)$.

Il résulte de la définition que *deux fonctions* $f : A \circ\!\!\rightarrow B : x \mapsto f(x)$ et $g : C \circ\!\!\rightarrow D : y \mapsto g(y)$ *sont égales* si et seulement si les ensembles de départ sont égaux ($A = C$), les ensembles d'arrivée sont égaux ($B = D$), les fonctions sont simultanément calculables ($\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$) et les valeurs sont les mêmes (pour tout $t \in \operatorname{Dom} f$, $f(t) = g(t)$)

La *composée* d'une fonction $f : A \circ\!\!\rightarrow B$ avec une fonction $g : B \circ\!\!\rightarrow C$ est la fonction $g \circ f : A \circ\!\!\rightarrow C : a \mapsto g\bigl(f(a)\bigr)$. Le domaine de $g \circ f$ est $\operatorname{Dom}(g \circ f) := \{a \in A : f(a) \in \operatorname{Dom} g\}$.

4. Dans la plupart des textes mathématiques, on emploie l'unique notation $f : A \to B$. Le fait que f soit définie partout sur A est alors soit explicitement précisé, soit découle implicitement du contexte.

8 Exercices

III.1. Un mineur se trouve en un point A, à la profondeur de 100 mètres. Il doit creuser un tunnel vers un point B situé à la profondeur de 300 mètres et à 600 mètres à l'est de A. Le tunnel doit être composé de segments de droite. Au dessus de A et en à la profondeur de A, la roche est tendre. En dessous, elle est dure. Le prix d'un mètre de tunnel dans la roche tendre est de 5 francs, dans la roche dure il est de 13. Les pentes des tunnels sont sans importance. Calculer le prix minimal et le trajet correspondant.

III.2. Pour chacune des « définitions » suivantes, dites s'il s'agit bien d'une fonction et précisez son ensemble de départ et d'arrivée.

(1) plaque $\mapsto$ marque de la voiture

(2) marque de la voiture $\mapsto$ plaque

(3) $\mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto 2x$

(4) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$

(5) $\mathbb{N} \circ\!\!\to \mathbb{N} : x \mapsto x-1$

(6) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto x-1$

(7) $\mathbb{N} \circ\!\!\to \mathbb{N} : x \mapsto 1/x$

(8) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$

(9) Soit $b_0 \in B$; $A \to B : a \mapsto b_0$

(10) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto \min\{t : xt^2 = 0\}$

(11) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto \min\{t : xt^2 = 1\}$

(12) $(m,n) \mapsto$ le plus grand entier k tel que $km \leqslant n : \mathbb{Z}^2 \circ\!\!\to \mathbb{N}$

(13) $f \mapsto \int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s$

(14) $S \subseteq \mathbb{Z} \mapsto \max S$

(15) $S \subseteq \mathbb{R} \mapsto \max S$

(16) $\mathbb{R}^3 \circ\!\!\to \mathbb{R}^2 : (a,b,c) \mapsto (x_1,x_2)$ où $x_1 < x_2$ sont les solutions de $ax^2 + bx + c$

III.3. Donnez le domaine et l'image des fonctions de l'exercice précédent.

III.4. Donnez le domaine des fonctions suivantes de $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2 \circ\!\!\to \mathbb{R}$.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$;

(2) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$;

(3) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$;

(4) $\ell(s,t) = \dfrac{s-t}{s^2+t^2}$;

(5) $m(u,v) = \sqrt{u(v-2)}$.

III.5. Déterminez les images des fonctions suivantes.

(1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto (s,s)$

(2) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto (s,s^2)$

(3) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto (s^2,s)$

(4) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto (s-1,s)$

(5) $[0,1] \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto (s,0)$

(6) $[0,1] \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto (s,s)$

(7) $[0,4] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t,-t^2+4t)$

(8) $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$

(9) $[0,\pi] \to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto (\sin\theta, \cos\theta)$

(10) $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto (2\cos\theta, \sin\theta)$

(11) $[0,4\pi] \to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto \theta(\cos\theta, \sin\theta)$

(12) $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto \big(\cos(2\theta), \sin\theta\big)$

(13) $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto \big(\sin(2\theta), \sin\theta\big)$

III.6. Soit $f : \mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2-1$ et $g : \mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : y \mapsto 1/y$. Calculez $g \circ f$ et $f \circ g$ et déterminez leur domaine.

9 Exercices supplémentaires

III.7. Déterminez si les définitions suivantes donnent lieu à des fonctions. Le cas échéant, déterminez leurs domaines et images.

(1) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $xy = 1$.

(2) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto y$ où $y^3 = x$.

(3) $\mathbb{R}^2 \circ\!\!\to \mathbb{R} : (t,s) \mapsto u$ où u est solution de $u(t^2-s) = t-s-1$.

(4) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto z$ où z est solution de $(4x^2-y^2)z = 2x+y$.

(5) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto z$ où z est solution de $(x^2-y^2)z = 2x+y$.

(6) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y^3 = x^2$.

(7) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : t \mapsto \theta$ tel que $\cos\theta = t$.

(8) $\mathbb{R}^{2\times 2} \circ\!\!\to \mathbb{R} : A \mapsto \det A$

(9) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : \lambda \mapsto \min\{x \in \mathbb{R} : x^3 + \lambda x + 1 = 0\}$

(10) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : \lambda \mapsto \min\{x \in \mathbb{R} : x^4 + \lambda x + 1 = 0\}$

(11) $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R}^{2\times 2} : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Montrez que l'image est $\mathrm{SO}(2) := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^{\mathrm{t}}A = \mathbb{1} \text{ et } \det A > 0\}$.

III.8. Donnez le domaine des fonctions suivantes de $\mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2 \circ\!\!\to \mathbb{R}$.

(1) $f(x) = \mathrm{tg}(2x + \pi/3)$

(2) $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

(3) $h(s) = \dfrac{1}{|2s+3| - |s+1|}$

(4) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(5) $g(x,y) = \arcsin(xy)$
(6) $\varphi(\xi,\eta) = \ln(\xi - \eta)$
(7) $\psi(s,t) = \arccos(s+t)$
(8) $h(x_1,x_2) = \dfrac{\sin x_1}{\cos x_2}$
(9) $k(y_1,y_2) = \dfrac{y_1+y_2}{y_1-y_2}$
(10) $m(\delta) = \sqrt[3]{\delta^2-1}$

III.9. Tracez les images des fonctions suivantes :

(1) $f : [0,5] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t-2, 2t+3)$
(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (-2+t^2, 1+2t^2)$
(3) $h : [-1,4] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1-2t, 1+t)$
(4) $k : [-2,2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3+1, t^3-1)$
(5) $\ell : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto (2\sin\theta, 3\cos\theta)$
(6) $m :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto (\operatorname{tg}\theta, 1)$
(7) $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin^2 t, \sin t)$
(8) $p : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$
(9) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \to (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t})$
(10) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$
(11) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big((t+1)^3, (t+2)^2\big)$
(12) $\delta : [\pi/3, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1+\cos t, 1+\sin t)$
(13) $\zeta : [0, \pi/4] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1+\operatorname{tg} t, 1)$

III.10. Trouvez une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dont l'image est la courbe que décrit un point P fixé à une roue lorsque celle-ci roule. (La courbe s'appelle une cycloïde.)

III.11. Traduisez mathématiquement les idées suivantes en utilisant la notion de fonction. Soulevez les problèmes éventuels, même si vous n'êtes pas capable d'y apporter une solution à ce stade.

(1) Une courbe dans $\mathbb{R}^2$? Dans $\mathbb{R}^3$?
(2) Une surface dans $\mathbb{R}^3$?
(3) Une symétrie de $\mathbb{R}^2$?

III.12. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x^2, \sin x)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (y_1,y_2) \mapsto \sin(y_1) + y_2$. Calculez $g \circ f$ et $f \circ g$ et déterminez (sans calculs ?) leurs domaines de définition.

IV. Fonctions inverses, fonctions périodiques

10 Définitions

Une fonction $f : A \circ\!\!\rightarrow B$ est *injective* ssi pour tout $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f$, si $x_1 \neq x_2$ alors $f(x_1) \neq f(x_2)$. De manière équivalente, f est injective ssi pour tout $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f$,

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Une fonction $f : A \circ\!\!\rightarrow B$ est *surjective* ssi pour tout $y \in B$, on peut trouver un $x \in \operatorname{Dom} f$ tel que $f(x) = y$. En d'autres mots, f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = B$. Une fonction $f : A \circ\!\!\rightarrow B$ est *bijective* si $\operatorname{Dom} f = A$ et f est injective et surjective.

Si une application $f : A \rightarrow B$ est bijective, elle admet un *inverse*, c'est-à-dire qu'il existe une fonction, notée f^{-1}, telle que $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_A$ et $f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_B$. Ici, la notation $\mathbb{1}_X$, où X est un ensemble, désigne la *fonction identité* ou l'*application identité*, c'est-à-dire l'application $\mathbb{1}_X : X \rightarrow X : x \mapsto x$.

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *périodique* de période $T > 0$ ssi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x+T) = f(x).$$

11 Exercices

IV.1. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont injectives, bijectives, périodiques (et de quelle période) ?

- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3x - 2$
- $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -3x^2 + 4x + 5$
- $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$
- $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x$
- $f_5 : \mathbb{R} \circ\!\!\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{tg} x$
- $f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$
- $f_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin^2 x$
- $f_8 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \theta \mapsto \sin\theta \cos\theta$
- $f_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \theta \mapsto \cos^2\theta + \sin\theta$

12 Exercices supplémentaires

IV.2. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont injectives, bijectives, périodiques (et de quelle période) ?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 2|x|$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - 2|x|$
- $h_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \theta \mapsto \sin\theta$
- $h_1 : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R} : \theta \mapsto \sin\theta$
- $h_2 : \mathbb{R} \to [-1,1] : \theta \mapsto \sin\theta$
- $h_3 : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1] : \theta \mapsto \sin\theta$
- $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$
- $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \bigl(\sin(2t), \sin t\bigr)$
- $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \bigl(\cos(2t), \sin t\bigr)$
- $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, \sin t)$
- $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- $A : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

IV.3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction injective (resp. surjective). Les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ sont-elles injectives (resp. surjectives) ?

- $g(x) := f(-x)$
- $h(x) := f(x^2)$
- $k(x) := f(x^3)$
- $\ell(x) := (f(x))^2$
- $m(x) := (f(x))^3$
- $n(x) := -f(x)$
- $p(\theta) := f(\sin\theta)$
- $q(x) := \sin(f(x))$

IV.4. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction *continue*.

- Prouvez que f est injective si et seulement si f est strictement croissante ou strictement décroissante. (Aide : pensez à la propriété de « valeur intermédiaire ».)
- Trouvez un contre-exemple qui montre que l'hypothèse « f continue » ne peut être supprimée.

V. Dérivée des fonctions d'une variable réelle

13 Définition et interprétation géométrique

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}^N$ et $x_0 \in]a,b[$. On dit que f *est dérivable en* x_0 si et seulement si

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \in \mathbb{R}^N, \quad \text{càd} \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \ell \in \mathbb{R}^N.$$

Dans ce cas, sa *dérivée au point* x_0 est la valeur de la limite ℓ. On note cette dérivée[5] $f'(x_0)$ ou $\partial_x f(x_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$, ce qu'on note $f \in \mathscr{C}^1(]a,b[;\mathbb{R}^N)$, si f est dérivable en chaque point x de $]a,b[$ et si la fonction $]a,b[\to \mathbb{R}^N : x \mapsto \partial_x f(x)$ est continue.

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Les principales règles de dérivation sont les suivantes.

(1) Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}^N$ et $g :]a,b[\to \mathbb{R}^N$ sont dérivables en x_0, $f+g :]a,b[\to \mathbb{R}^N$ est dérivable en x_0 et

$$\partial_x\big(f+g\big)(x_0) = \partial_x f(x_0) + \partial_x g(x_0).$$

(2) Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}^N$ et $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ sont dérivables en x_0, alors $gf :]a,b[\to \mathbb{R}^N$ est dérivables en x_0 et

$$\partial_x\big(gf\big)(x_0) = \partial_x g(x_0) f(x_0) + g(x_0)\partial_x f(x_0).$$

(3) Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (et $f(x_0) > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{Z}$),[6] alors $f^\alpha :]a,b[\hookrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et

$$\partial_x(f^\alpha)(x_0) = \alpha\, f^{\alpha-1}(x_0)\, \partial_x f(x_0).$$

(4) Plus généralement, si $f :]a,b[\to]c,d[: x \mapsto f(x)$ est dérivable en x_0 et $g :]c,d[\to \mathbb{R}^N : y \mapsto g(y)$ est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f :]a,b[\to \mathbb{R}^N : x \mapsto g(f(x))$ est dérivable en x_0 et

$$\partial_x\big(g\circ f\big)(x_0) = \partial_y g\big(f(x_0)\big)\, \partial_x f(x_0).$$

5. Dans ce cours la notation préférée sera $\partial_x f(x_0)$ car elle nomme explicitement la variable par rapport à laquelle on dérive et ainsi se généralise naturellement aux fonctions de plusieurs variables.

6. On pourrait donner des conditions plus précises. Le tout est de s'assurer que $y \mapsto y^\alpha$ a un sens et est dérivable pour y proche de $f(x_0)$.

La dérivée d'une fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}^N : x \mapsto f(x)$ admet plusieurs interprétations.

- Lorsque l'ensemble d'arrivée de f est (une partie de) $\mathbb{R}$, la dérivée de f en x_0 est la *pente de la tangente* au *graphe* de f au point $\big(x_0, f(x_0)\big)$ (voir fig. 1).
- Plus généralement, lorsque l'ensemble d'arrivée est (une partie de) $\mathbb{R}^N$, la dérivée de f en x_0 est un *vecteur directeur de la tangente* à l'image de f au point $f(x_0)$ (voir fig. 2).
- Lorsque la variable x de f représente le temps (on la note alors plus volontier t), la dérivée de f au temps x_0 est la *vitesse* du mobile dont la trajectoire ($= \operatorname{Im} f$) est décrite par f. La vitesse est tangente à la trajectoire. La dérivée seconde $\partial_x^2 f(x_0)$ de f en x_0 donne l'accélération du mobile.
- On peut aussi voir la tangente en x_0 comme une *approximation affine* de f au voisinage du point $f(x_0)$ si bien qu'on écrit :

$$f(x) \approx f(x_0) + \partial_x f(x_0)(x - x_0).$$

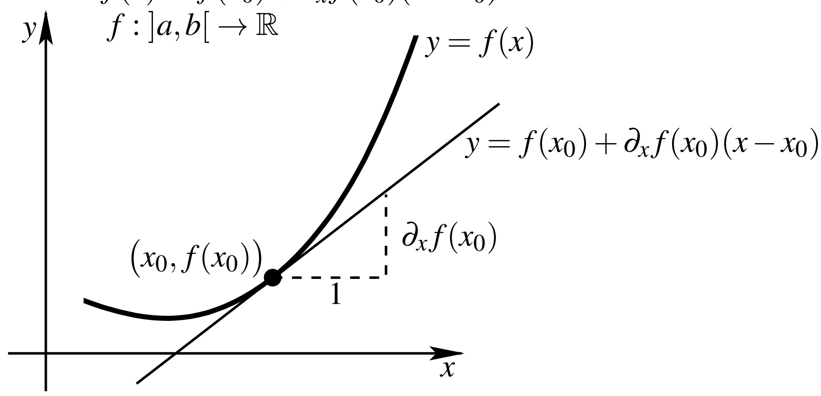


FIGURE 1 – Dérivée vue comme pente de la tangente

Pour les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$, la dérivée a aussi un rapport avec la croissance de la fonction. Plus précisément, on a les quatres relations suivantes : soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$; on a

- f est croissante [7] ssi $\forall x \in]a,b[, \partial f(x) \geqslant 0$;
- f est strictement croissante [8] lorsque $\forall x \in]a,b[, \partial f(x) > 0$;
- f est décroissante [9] ssi $\forall x \in]a,b[, \partial f(x) \leqslant 0$;
- f est strictement décroissante [10] lorsque $\forall x \in]a,b[, \partial f(x) < 0$;

7. Par définition f est *croissante* ($f \nearrow$) ssi, pour tout x_1, x_2 de $]a,b[$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
8. On dit que f est *strictement croissante* ($f \nearrow$) ssi, pour tout $x_1, x_2 \in]a,b[$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
9. On dit que f est *décroissante* ($f \searrow$) ssi, $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
10. On dit que f est *strictement décroissante* ($f \searrow$) ssi, $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

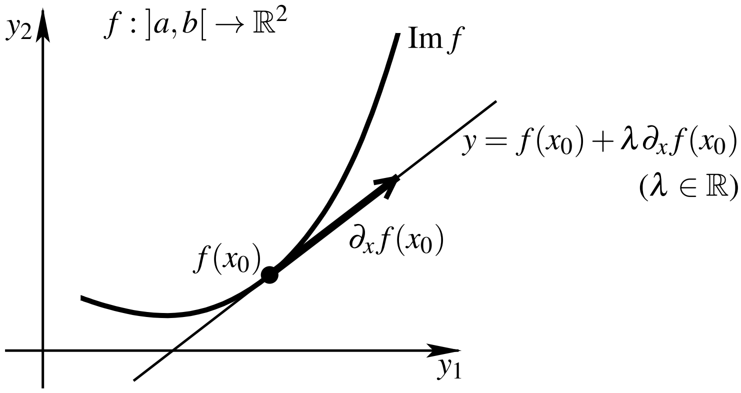


FIGURE 2 – Dérivée vue comme vecteur directeur de la tangente

14 Exercices

V.1. Calculez les dérivées suivantes.

(1) $\partial_x(2x^2 - 5)$
(2) $\partial_y(2y^2 - 13y + 5)$
(3) $\partial_x(2/x)$
(4) $\partial_x\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
(5) $\partial_x\sqrt{x}$
(6) $\partial_y\sqrt{y^2 + y}$
(7) $\partial_z(z^3 - 3z)$
(8) $\partial_x\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$
(9) $\partial_x(ax^2 + bx + c)$
(10) $\partial_a(ax^2 + bx + c)$
(11) $\partial_x(x^2 + 2x, \sin x)$
(12) $\partial_t(\cos t, \sin t)$
(13) $\partial_t^2(\cos t, \sin t)$

V.2. Quelle est la tangente au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ en $x = 1$.

V.3. Quelle est la tangente au graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$ en $x = 0$.

V.4. Estimez $f(0{,}01)$ où $f(x) := \sqrt{1 + x}$.

V.5. Calculez l'équation cartésienne de la tangente à la courbe décrite par la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ au point $(1,0)$.

15 Exercices supplémentaires

V.6. Calculez la pente de la tangente au graphe de f au point $(2, f(2))$ et déduisez en l'équation cartésienne de cette tangente où f est respectivement :

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x+2$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x^2 - 4x$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$

V.7. Soit $f : \mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(\operatorname{tg} x - 1)$.
- Cherchez une équation de la tangente au graphe de f en $\big(2{,}5, f(2{,}5)\big)$.
- Employez l'équation trouvée ci-dessus pour estimer $f(2{,}6)$.

V.8. Calculez l'équation cartésienne de la tangente à l'image de f au point qui correspond au point $t = 1$ où f est successivement l'une des fonctions suivantes :

(1) $f : [-2,2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2+1, t^2-1)$

(2) $f :]-2,2[\to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3+1, t^3-1)$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (4t^2-5, 2t+3)$

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3, t^2)$

(5) $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (2\sin t, 3\cos t)$

(6) $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t - 2, \sin t + 3)$

V.9. Cherchez les points de la courbe C en lesquels la tangente est soit horizontale, soit verticale où $C = \operatorname{Im} f$ avec f étant respectivement l'une des fonctions suivantes :

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (4t^2, t^3 - 12t)$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3+1, t^2-2t)$

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$

(5) $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (3t^2-6t, \sqrt{t})$

V.10. Calculez l'approximation linéaire de $f(b)$ si la variable passe de a à b.
- $f(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 5$, $a = 1$, $b = 1{,}03$;
- $f(x) = -3x^3 + 8x - 7$, $a = 4$, $b = 3{,}96$;
- $f(x) = x^4$, $a = 1$, $b = 0{,}98$;
- $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5$, $a = 2$, $b = 2{,}01$.

V.11. (Examen du 3 novembre 1999) Soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(2x^2 + x)$.

- Dans un repère orthonormé, quel est l'angle formé par l'horizontale et la tangente à z en $x = 0$?
- Trouvez une valeur approchée de $z(0{,}01)$ en utilisant l'équation de la tangente en 0 plutôt que la fonction définie ci-dessus.

V.12. Pour trainer un objet de poids P sur une surface plane horizontale, il faut appliquer une force à la corde qui lui est attachée. Si la corde fait un angle θ avec l'horizontale, l'amplitude de la force est donnée par :

$$F(\theta) = \frac{\mu P}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

où μ est une constante appelée le coefficient de frottement. On suppose qu'une caisse de 100 Kg est ainsi tirée sur le sol et que $\mu = 0{,}2$. De combien la force appliquée doit-elle varier si θ change de 45° à 46° ?

VI. Fonctions à deux variables et courbes de niveau

16 Définitions

Soit $f : A \circ\!\!\rightarrow B$ une fonction et $C \subseteq A$. L'*image inverse de C par f* ou la *préimage de C par f* est l'ensemble

$$f^{-1}(C) := \{a \in A : a \in \operatorname{Dom} f \text{ et } f(a) \in C\}.$$

La *courbe de niveau* de f de niveau $c \in B$ est l'ensemble $f^{-1}(\{c\})$. Notons que l'appellation de « coubre » est quelque peu trompeuse — $f^{-1}(\{c\})$ pouvant être n'importe quel sous ensemble de A. Nous verrons au cours d'analyse une condition qui assure que $f^{-1}(\{c\})$ est bien une courbe.

17 Exercices

VI.1. Donner le domaine de la fonction définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\rightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}.$$

VI.2. Représentez le graphe des fonctions suivantes et dessinez quelques courbes de niveau.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2+y^2$
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2-y^2$
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2-y$
- $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$

VI.3. Quelle est l'équation de la courbe de niveau de $f : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ qui passe par le point P ?

- $f(x,y) = y \operatorname{arctg}(x), \quad P = (1,4)$;
- $f(x,y) = (2x+y^2)\mathrm{e}^{xy}, \quad P = (0,2)$.

18 Exercices supplémentaires

VI.4. Quel est le domaine de définition des fonctions suivantes $\mathbb{R}^2 \multimap \mathbb{R}$? Calculez les valeurs demandées.

- $f(x,y) = 2x - y^2$, $\quad f(-2,5)$, $\quad f(5,-2)$, $\quad f(0,-2)$;
- $g(x,y) = \dfrac{y+2}{x}$, $\quad g(3,1)$, $\quad g(1,3)$, $\quad g(0,2)$;
- $h(u,v) = \dfrac{uv}{u-2v}$, $\quad h(2,3)$, $\quad h(-1,4)$, $\quad h(0,1)$;
- $k(r,s) = \sqrt{1-r} - \mathrm{e}^{r/s}$, $\quad k(1,1)$, $\quad k(0,4)$, $\quad k(-3,3)$.

VI.5. Représentez le graphe des fonctions suivantes et dessinez quelques courbes de niveau.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto ax^2 + by^2$
- $g : \mathbb{R}^2 \multimap \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$
- $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{1}{6}\sqrt{9x^2+4y^2}$
- $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 6 - 2x - 3y$
- $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+25}$
- $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy$

VII. Dérivées de fonctions de deux variables réelles

19 Définitions

Soit $f :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto f(x,y)$ et $(x_0,y_0) \in]a,b[\times]c,d[$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[\times]c,d[$, ce qu'on note $f \in \mathscr{C}^1(]a,b[\times]c,d[)$, si les *dérivées partielles* existent pour chaque (x,y) (c'est-à-dire si les limites qui les définissent existent) :

$$\partial_x f(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad \text{et} \quad \partial_y f(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

et si elles sont continues, c'est-à-dire si les fonctions $\partial_x f :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \partial_y f(x,y)$ sont continues.

Pratiquement, $\partial_x f(x,y)$ revient à calculer la dérivée de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x,y)$, c'est-à-dire qu'on dérive uniquement par rapport à x en considérant y comme une constante. Il en va de manière analogue pour $\partial_y f(x,y)$. En conséquence les règles de dérivation pour les fonctions d'une variable sont encores valables ici. Une seule de ces règles nécessite une généralisation pour tenir compte de la complexité accrue de deux variables : il s'agit de la dérivée de fonctions composées. Soit donc $f : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto f(x,y)$, $g : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto g(u,v)$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto h(u,v)$. On a

$$\begin{aligned}
\partial_u\big(f(g(u,v),h(u,v))\big)(u_0,v_0) &= \partial_x f\big(g(u_0,v_0),h(u_0,v_0)\big)\,\partial_u g(u_0,v_0) \\
&\quad + \partial_y f\big(g(u_0,v_0),h(u_0,v_0)\big)\,\partial_u h(u_0,v_0) \\
\partial_v\big(f(g(u,v),h(u,v))\big)(u_0,v_0) &= \partial_x f\big(g(u_0,v_0),h(u_0,v_0)\big)\,\partial_v g(u_0,v_0) \\
&\quad + \partial_y f\big(g(u_0,v_0),h(u_0,v_0)\big)\,\partial_v h(u_0,v_0)
\end{aligned}$$

et les dérivées à gauche de l'égalité existent dès que toutes les dérivées à droite existent.

Par définition, le *gradient* de f au point (x_0,y_0) est le vecteur

$$(\operatorname{grad} f)(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = \big(\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0)\big).$$

Le gradient de f en (x_0,y_0) est perpendiculaire à la courbe de niveau d'équation $f(x,y) = f(x_0,y_0)$. En d'autres mots, la droite tangente à la courbe de niveau d'équation $f(x,y) = c$ au point (x_0,y_0) — qui appartient à la courbe, càd $f(x_0,y_0) = c$ — a pour normale $\nabla f(x_0,y_0)$.

20 Exercices

VII.1. Pour les fonctions f suivantes, calculez $\partial_x f(x,y)$, $\partial_y f(x,y)$, $\partial_x f(1,2)$, $\partial_y f(0,1)$, et $\partial_x^2 f(x,y)$, $\partial_{xy} f(x,y)$, $\partial_y^2 f(x,y)$.

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^3y^2 - 2x^2y + 3x$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy^2\,\mathrm{e}^{xy}$

VII.2. Calculez la tangente à la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$ au point $(1,0)$.

VII.3. Calculez $\partial_x k(x,y)$ et $\partial_y k(x,y)$ où $k(x,y) = f\big(g(x,y), h(x,y)\big)$ avec $f(r,s) = r^3 + s^2$, $g(x,y) = xy^2$ et $h(x,y) = x^2 \sin y$.

21 Exercices supplémentaires

VII.4. Calculez les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto (x^3 - y^2)^5$
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (s,t) \mapsto \sqrt{s^2 + t^2}$
- $k : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\to \mathbb{R} : (s,t) \mapsto \dfrac{t}{s} - \dfrac{s}{t}$
- $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x\,\mathrm{e}^y + y \sin x$
- $m : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^x \ln(xy)$

VII.5. Calculer $\partial_x \varphi$ et $\partial_y \varphi$ où $\varphi(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$ dans les cas suivants :

- $f(u,v) = u \sin v, \quad g(x,y) = x^2 + y^2, \quad h(x,y) = xy$;
- $f(u,v) = uv + v^2, \quad g(x,y) = x \sin y, \quad h(x,y) = y \sin x$.

VIII. Éléments d'algèbre linéaire

22 Optimisation linéaire

Introduction

Les problèmes étudiés dans ce chapitre consistent à trouver la valeur optimale (maximum ou minimum) d'une fonction dont les variables sont soumises à certaines restrictions. Par exemple :

- comment un agriculteur répartira-t-il ses cultures de manière à réaliser un bénéfice maximum tout en tenant compte du prix de revient de chaque culture, du nombre de jours de travail dont il dispose,...
- si deux substances contiennent chacunes trois ingrédients A, B, C dont le coût est donné, comment composer ces deux produits pour obtenir le mélange le moins coûteux contenant 14 % de A, 20 % de B et 10 % de C ?
- comment trouver la valeur maximum de la fonction $f(x,y) = 2x+3y$ si on la soumet aux contraintes
$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant 3 \\ x-y \leqslant 2 \\ x+y \leqslant 3 \end{cases}$$

Pour les deux premiers exemples, il s'agit de choisir, parmi toutes les solutions possibles, celle qui maximisera la fonction « bénéfice » dans le premier cas ou celle qui minimisera la fonction « prix de revient » dans le second. Le dernier exemple est purement mathématique. On cherche parmi tous les couples (x,y) qui satisfont le système des contraintes, celui qui fournira la plus grande valeur prise par la fonction f.

Dans ces notes, la fonction f à optimiser sera une fonction affine de deux variables, c'est-à-dire de la forme
$$f(x,y) = ax+by+c$$
et ces deux variables seront soumises à des *contraintes* définies par des inéquations linéaires $a'x+b'y+c' \leqslant 0$ ou $\geqslant 0$.

22.1 Notions de base

Plaçons-nous dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ muni d'un repère orthonormé. Supposons, sans perte de généralité, que l'origine de tous les vecteurs considérés coïncide avec l'origine o du repère. À chaque point p de coordonnées (x,y), on peut donc associer un vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{op}$ et réciproquement. On dit que c'est une correspondance 1-1 et on écrira $\overrightarrow{v} = (x,y)$.

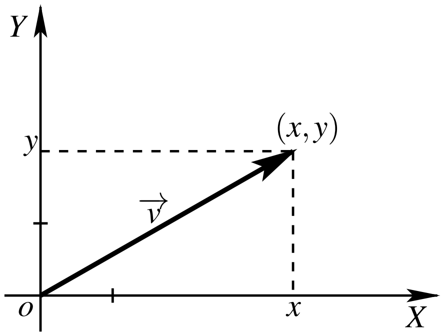


FIGURE 3 – Un vecteur de $\mathbb{R}^2$

La *norme* (ou longueur) d'un vecteur $\overrightarrow{v} = (x,y)$ est $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (x_1,y_1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (x_2,y_2)$ du plan est donné par

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := x_1x_2 + y_1y_2 = \|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|\cos\theta \tag{1}$$

où θ est un des deux angles formé par les deux vecteurs [11] comme le montre la figure 4.

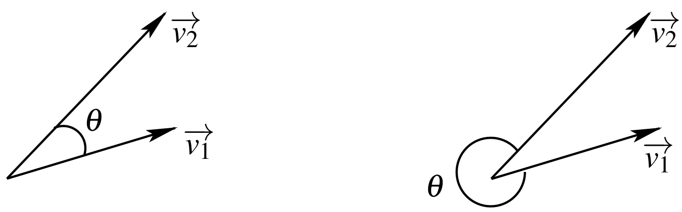


FIGURE 4 – Produit scalaire de deux vecteurs

Remarquons que le produit scalaire de deux vecteurs du plan est un nombre réel et pas un vecteur. Par exemple, $(1,-3)\cdot(-2,-1) = 1$.

11. $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ définissent à priori deux angles. Vous pouvez choisir n'importe lequel des deux pour calculer le produit scalaire. En effet, ces deux angles ont le même cosinus. Justifiez pourquoi.

De (1), nous déduisons que le produit scalaire de deux vecteurs est nul si et seulement si ils sont orthogonaux (Voyez-vous pourquoi ?). Ainsi, tous les vecteurs (x,y) orthogonaux à $(2,1)$ vérifient l'égalité $2x+y=0$. Nous reconnaissons l'équation d'une droite, notée D_0, qui passe par l'origine du repère. De même , l'ensemble des vecteurs (x,y) dont le produit scalaire avec $(2,1)$ vaut 3 est la droite d'équation $2x+y=3$. Remarquons que ces droites sont parallèles.

Plus généralement, les droites d'équation $2x+y=c$, $c \in \mathbb{R}_0$, forment un faisceau de droites parallèles à D_0. De plus, la figure 5 montre que le vecteur $(2,1)$ est perpendiculaire à chaque droite du faisceau.

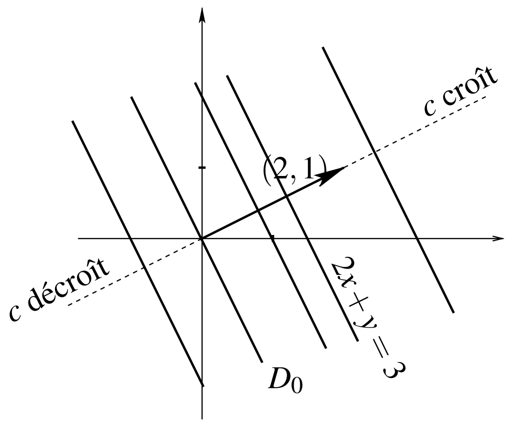


FIGURE 5 – Droites parallèles

CONCLUSIONS :

- L'équation générale d'une droite D du plan est $ax+by=c$. C'est l'ensemble des couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ dont le produit scalaire avec (a,b) vaut c. Le vecteur (a,b) est perpendiculaire à cette droite ; il est appelé *vecteur normal* ou *gradient* [12].
- Toute droite d'équation $ax+by=c'$ est parallèle à D.
- La figure 5 montre également que la valeur de c augmente (respectivement diminue) lorsque nous nous déplaçons dans le même sens (respectivement dans le sens opposé) que le *gradient*. Ce dernier argument sera capital dans la résolution des problèmes d'optimisation.

12. La notion de gradient sera abordée plus largement dans le cours d'analyse. Pour le moment, contentons-nous de remarquer que $(a,b) = \big(\partial_x(ax+by), \partial_y(ax+by)\big)$.

22.2 Optimiser une fonction

➢ Optimiser la fonction $f(x,y) = 2x + y$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ -x + y \leqslant 1 \\ x + y \leqslant 4 \end{cases}$$

Commençons par représenter graphiquement le système d'inéquations déterminé par les contraintes (voir figure 6). Nous obtenons ainsi le domaine Δ des solutions possibles du problème. Ce domaine est délimité par les sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,1)$ et $(3,0)$. C'est le *polygone des contraintes*. Considérons ensuite le faisceau de droites

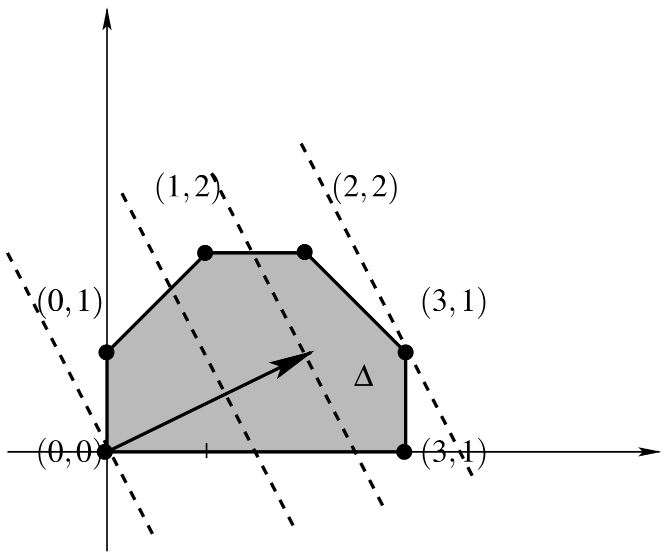


FIGURE 6 – Polygone des contraintes

D_c d'équations $2x + y = c$ associé à la fonction f à optimiser. Son gradient est le vecteur $(2,1)$.

Nous pouvons maintenant envisager la recherche du maximum et du minimum comme ceci : l'idée est de « balayer » le domaine Δ dans la même direction que le gradient de manière à faire varier c. Dès lors, trouver le maximum (respectivement le minimum) revient à trouver la plus grande (respectivement la plus petite) valeur de c telle que $D_c \cap \Delta$ ne soit pas vide.

La représentation du domaine Δ montre que nous pouvons supposer $c \in \mathbb{R}^+$. Le « balayage » s'effectuera donc uniquement dans le même sens que le gradient.

Nous déduisons facilement de ce graphique que le minimum de la fonction objectif $f(x,y) = 2x + y$ est atteint au sommet[13] $(0,0)$. C'est le premier point rencontré lors du balayage. Le maximum sera quant à lui atteint au dernier point du domaine qui intersecte une droite du faisceau, c'est-à-dire le sommet $(3,1)$ défini par l'intersection des droites d'équations $x = 3$ et $x + y = 4$.

En conclusion, le minimum de la fonction $f(x,y) = 2x + y$ sur Δ vaut 0 $(= f(0,0))$ et son maximum vaut 7 $(= f(3,1))$.

À priori, tous les points du domaine Δ sont des solutions possibles du problème. Toutefois, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit une fonction f définie par $f(x,y) = ax + by + c$ soumise à des contraintes de la forme $a_i x + b_i y \leqslant c_i$ (ou $\geqslant c_i$), avec $i = 1, \ldots, n$. Si la valeur optimale (maximum ou minimum) de la fonction f existe, alors elle est atteinte en au-moins un sommet du domaine Δ délimité par les contraintes.*

C'est une propriété générale que nous ne démontrerons pas ici. Son intérêt est de restreindre la recherche du maximum ou du minimum à un nombre fini de points.

➢ Maximiser la fonction $f(x,y) = x + 2y + 1$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x - 2y \geqslant -8 \\ x/2 + y \leqslant 6 \\ 3x + 2y \leqslant 24 \end{cases}$$

Le vecteur $(1,2)$ est le gradient de la fonction. Nous avons représenté le domaine Δ déterminé par les contraintes à la figure 7 . En balayant le domaine Δ dans le même sens que le gradient, nous voyons que le maximum est atteint en tous les points du segment joignant les sommets $(2,5)$ et $(6,3)$. Cela montre qu'il n'y a pas systématiquement unicité de la solution. Cette constatation se justifie ici par le fait que la droite passant par ces deux sommets a pour équation $x/2 + y = 6$ (cf. le système des contraintes), ce qui peut encore s'écrire $x + 2y = 12$. Nous reconnaissons alors l'équation d'une droite du faisceau défini par la fonction. Le maximum de la fonction $f(x,y) = x + 2y + 1$ vaut donc 13.

➢ Soit la fonction $f(x,y) = -x - 2y$ soumise au système de contraintes (S) représenté par la figure 8. Cette fois, nous devons balayer le polygone des contraintes dans le sens

13. Puisque, d'après les contraintes, x et y sont deux nombres positifs, nous pouvions prévoir ce résultat sans passer par la résolution graphique.

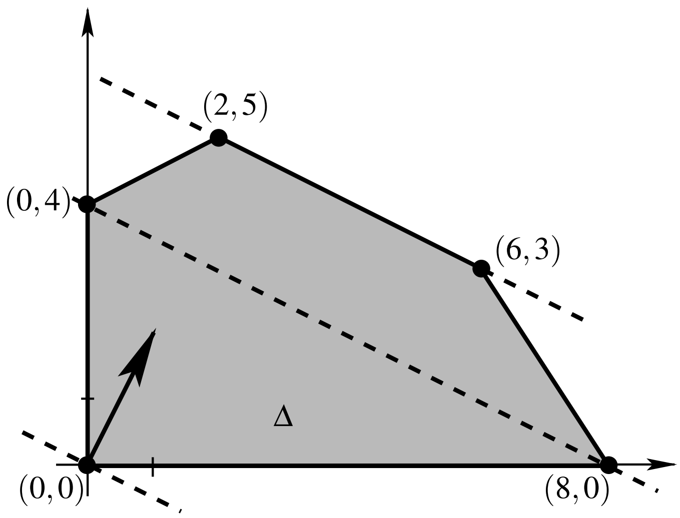


FIGURE 7 – Polygone des contraintes

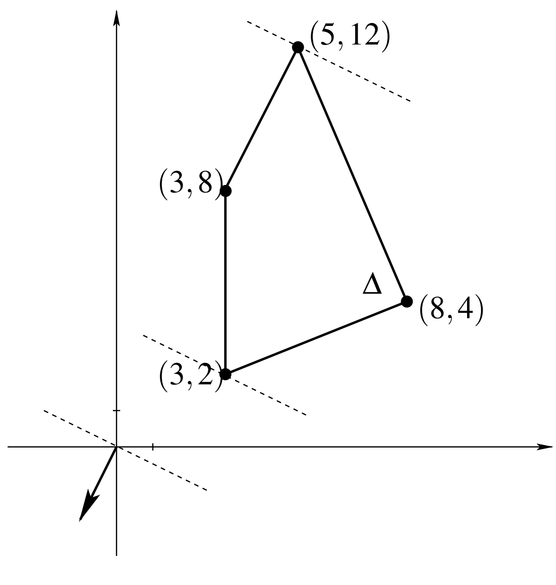


FIGURE 8 – Polygone des contraintes

opposé à celui du gradient $(-1,-1)$. Le minimum est donc atteint au dernier sommet rencontré lors du balayage, c'est-à-dire en $(3,3)$, tandis que le maximum est atteint en $(1,1)$. Le minimum de la fonction vaut alors -3 et le maximum vaut 1.

➢ Un agriculteur possède 100 hectares de terre. Il désire planter des pommes de terre dans une partie, du froment dans une autre et laisser, peut-être, la troisième partie en jachère. Nous disposons des informations suivantes :

	pommes de terre	froment	total disponible
prix de la culture en milliers de francs par ha	10	20	1100
jours de travail par ha	1	4	160
bénéfice net en milliers de francs	40	120	

Comment l'agriculteur doit-il organiser ses cultures pour réaliser un bénéfice maximum ?

Désignons par x le nombre d'hectares plantés avec des pommes de terre, et par y le nombre d'hectares plantés avec du froment. Le nombre d'hectares laissés éventuellement en jachère est $100-x-y$.

Le problème consiste à maximiser la fonction objectif $f(x,y)=40x+120y$.

Le choix des inconnues mène aux contraintes $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ et $x+y\leqslant 100$. L'échéance impose que $x+4y\leqslant 160$. D'autre part, l'agriculteur ne dépensera peut-être pas tout l'argent qui est à sa disposition, ce qui s'exprime par $10x+20y\leqslant 1100$. Nous obtenons donc le système des contraintes :

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x+y\leqslant 100 \\ x+2y\leqslant 110 \\ x+4y\leqslant 160 \end{cases}$$

Les droites du faisceau défini par la fonction ont pour équation $40x+120y=c$. Leur gradient est le vecteur $(40,120)$. Le balayage nous permet de localiser le maximum recherché : c'est le sommet situé à l'intersection des droites d'équation $x+4y=160$ et $x+2y=110$. Ses coordonnées sont $(60,25)$.

L'agriculteur réalisera un bénéfice maximum en plantant 60ha de pommes de terre, 25ha de froment et en laissant 15ha en jachère. La valeur de ses gains s'élèvera à 5400 milliers de francs.

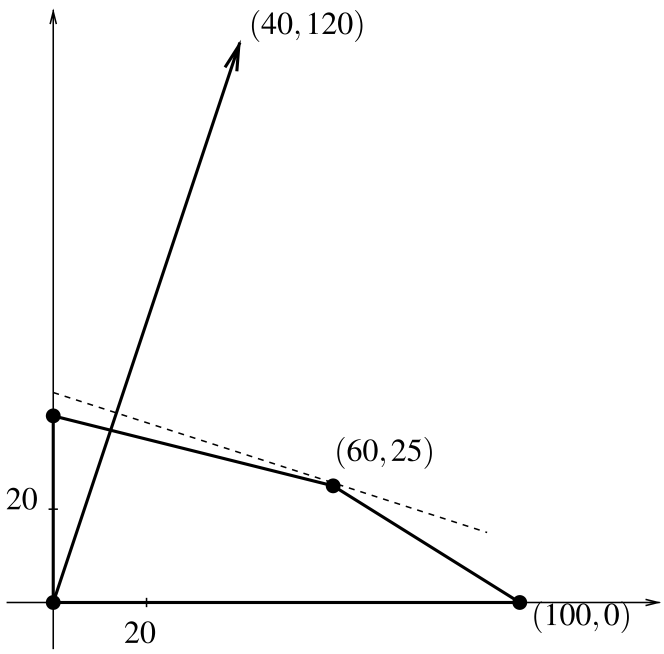


FIGURE 9 – polygone des contraintes

22.3 Exercices

(1) Trouver les valeurs maximum et minimum de la fonction $f(x,y) = 2x + 5y + 1$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 3x + 2y \leqslant 6 \\ -x + 2y \leqslant 4 \end{cases}$$

(2) Dans une école, un groupe d'élèves se charge de vendre des croissants et des pains au chocolat à la récréation. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de 96 croissants et de 108 pains au chocolat. Deux boulangeries proposent pour le même prix : un lot A comprenant 8 croissants et 12 pains au chocolat ; un lot B composé de 12 croissants et 9 pains au chocolat.

Quelle commande les élèves doivent-ils passer dans chaque boulangerie pour satisfaire la demande au moindre coût ?

(3) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y) = -3x - 2y$. On considère le système des contraintes

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ x + y \leqslant 2 \\ y \geqslant \alpha x \end{cases} \tag{2}$$

où $\alpha \in]0, +\infty[$. On est intéressé à minimiser la fonction f sur l'ensemble des (x, y) qui satisfont (2). Pour quelle(s) valeur(s) de α le minimum est-il atteint au point $(1, 1)$?

23 Droites et plans

Le produit scalaire dans le plan nous a permis de rappeler qu'une *équation cartésienne* d'une droite D du plan est $ax + by = c$ et que le vecteur $\overrightarrow{v_n} := (a, b)$ est *normal* à D.

Nous pouvons envisager la description d'une droite sous un autre angle. En effet, si D a pour direction le vecteur $\overrightarrow{v_d} = (x_d, y_d)$ et passe par le point (x_0, y_0), alors n'importe quel point (x, y) de D s'écrira

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x_d, y_d), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'équation ci-dessus est une *équation paramétrique* de D et le vecteur $\overrightarrow{v_d}$ est un *vecteur directeur* de D. Bien entendu, on a la relation $\overrightarrow{v_n} \cdot \overrightarrow{v_d} = 0$.

Un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by = c$ est, par exemple, $(-b, a)$. Pour passer d'une équation paramétrique à une équation cartésienne, il suffit d'éliminer le paramètre λ.

Plaçons-nous maintenant dans l'espace $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. De la même ma-

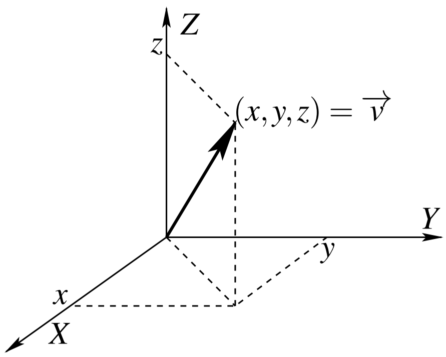


FIGURE 10 – Un vecteur de l'espace

nière que dans $\mathbb{R}^2$, on écrira $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ pour désigner un vecteur de l'espace et on aura $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (voir figure 10).

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ sera donné par

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Si on regarde l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur $(2,1,-1)$, on obtient maintenant le plan α_0 d'équation $2x+y-z=0$ qui passe par l'origine du repère. Le vecteur $(2,1,-1)$ est orthogonal à α_0. De même, l'ensemble des vecteurs dont le produit scalaire avec $(2,1,-1)$ vaut 1 est le plan α_1 d'équation $2x+y-z=1$. Ces deux plans sont parallèles. On peut transposer les conclusions obtenues dans le plan à l'espace.

CONCLUSIONS :

- L'équation générale d'un plan α de $\mathbb{R}^3$ est $ax+by+cz=d$. C'est l'ensemble des vecteurs de l'espace dont le produit scalaire avec (a,b,c) vaut d. Le vecteur (a,b,c) est normal à ce plan.
- Tout plan d'équation $ax+by+cz=d'$ est parallèle à α.

On peut aussi s'intéresser aux droites de $\mathbb{R}^3$. Pour les décrire, il suffit, comme dans le plan, d'en connaître un point (x_0,y_0,z_0) et un vecteur directeur (x_d,y_d,z_d). Alors, une *équation paramétrique* d'une droite D est

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(x_d,y_d,z_d), \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

En éliminant λ, on obtient un *système d'équations cartésiennes*

$$\frac{x-x_0}{x_d}=\frac{y-y_0}{y_d}=\frac{z-z_0}{z_d}.$$

23.1 Exercices

- Calculez la norme des vecteurs $\overrightarrow{a}=(-3,0)$, $\overrightarrow{b}=(-2,2\sqrt{3})$ et $\overrightarrow{c}=(2,6,-1)$.
- Soient les vecteurs $\overrightarrow{x}=(-2,5)$ et $\overrightarrow{y}=(4,-1)$. Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{z}=2\overrightarrow{x}-3\overrightarrow{y}$ et $\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|$.
- Calculez $(4,-1)\cdot(-3,-2)$, $(0,4)\cdot(9,0)$ et $(8,-3,2)\cdot(5,-1,-2)$.
- Soient $\overrightarrow{v_1}=(4,1)$ et $\overrightarrow{v_2}=(-3,2)$. Calculez la longueur de la projection de $\overrightarrow{v_1}$ sur $\overrightarrow{v_2}$.
- Les vecteurs $\left(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},\sqrt{3}/2\right)$ et $\left(\sqrt{2},0,-\sqrt{2}/2\right)$ sont-ils orthogonaux ?
- Pour quelle(s) valeur(s) de λ les vecteurs $(\lambda,-2)$ et $(\lambda,-3\lambda)$ sont-ils orthogonaux ?
- Quelle est la forme générale d'une équation cartésienne d'une droite du plan ?
- Donnez une équation cartésienne de la droite D du plan orthogonale au vecteur $\left(1/2,\sqrt{3}/2\right)$ et passant par le point $\left(3/2,3\sqrt{3}/2\right)$.
- Donnez une équation cartésienne du plan α comprenant le point $(-11,4,2)$ et normal au vecteur $(6,5,-1)$.
- Même question qu'au point précédent mais α passe par le point $(2,5,-6)$ et est parallèle au plan β d'équation $3x-y+2z-10=0$.
- Même question qu'au point précédent mais α passe par le point $(6,-7,4)$ et parallèle au plan OXZ.

- Écrivez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point $(-6,4,-3)$ et parallèle à la droite D' d'équation paramétrique $(x,y,z) = (5-3\lambda, -2+\lambda, 9\lambda+1)$.
- Écrivez un système d'équations cartésiennes de la droite D perpendiculaire au plan $\alpha \equiv 2x-3y+7z=4$ et coupant ce plan au point $(6,5,1)$.
- Déterminez la valeur du paramètre réel k pour que le plan $\alpha \equiv x+ky-z+3=0$ soit perpendiculaire au plan $\beta \equiv 2kx-y+2z=0$.
- Déterminez la valeur du paramètre réel k pour que la droite $D_1 \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{-y}{2} = z+1$ soit perpendiculaire à la droite $D_2 \equiv \dfrac{1-x}{2} = -y-3 = \dfrac{z}{k}$.

24 Systèmes linéaires

24.1 Calcul matriciel

Soit le système

$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+y-4z=3 \\ -3x+5y-z=0 \end{cases}$$

Ce système est caractérisé par les coefficients des inconnues x,y,z et par les termes indépendants, c'est-à-dire par 12 nombres réels placés à des positions bien déterminées. On peut représenter ce système par le tableau de nombres à 3 lignes et 4 colonnes suivant :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que le tableau M est une matrice de type 3×4.

Une *matrice A de type $m\times n$* est un tableau rectangulaire dont les éléments sont rangés selon m lignes et n colonnes.

On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En abrégé, on écrira $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$. Les éléments a_{ij} sont appelés les *termes* ou les *coefficients* de la matrice A.

Par exemple, l'élément a_{42} est situé à l'intersection de la 4e ligne et de la 2e colonne. Que valent $a_{31}, a_{33}, a_{24}, a_{42}$ dans la matrice M ci-dessus ?

On notera $K^{m\times n}$ l'ensemble des matrices de type $m \times n$ dont les éléments appartiennent à un corps K. Par exemple, K peut être $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$ Ici, nous travaillerons essentiellement dans $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Voici quelques matrices particulières :

- Matrices de type $n \times n$ ou matrices carrées :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matrices triangulaires supérieures et inférieures :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matrices de type $1 \times n$ ou matrices lignes : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$
- Matrices de type $n \times 1$ ou matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Comme pour les réels, on peut définir des opérations sur les matrices.

OPÉRATIONS MATRICIELLES :

- *Égalité matricielle* : deux matrices $A(a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si et seulement si elles sont de même type et si

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{quels que soient} \quad i \quad \text{et} \quad j.$$

- *Transposition* : la *transposée* d'une matrice A, notée A^t, est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, alors $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ Notons que $(A^t)^t = A$.
- *Addition* : Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ deux matrices de type $m \times n$. Alors, $A + B = C$ où la matrice C est définie par
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$
Pour pouvoir additionner deux matrices, il faut donc qu'elles soient de même type. Leur somme s'effectue alors composante par composante et la matrice ainsi obtenue est aussi de type $m \times n$.
Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 2+b & 3+c \\ 4+d & 5+e & 6+f \end{pmatrix}$
- *Produit par un réel* : Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $kA = B$ où la matrice B est définie par $b_{ij} = ka_{ij}$.
Exemple : $-3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ -12 & -15 & -18 \end{pmatrix}$
REMARQUE : $\mathbb{R}^{m\times n}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que $+ : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ satisfont les propriétés suivantes :
(1) associativité : $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n},\ (A+B)+C = A+(B+C)$
(2) neutre : $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ A + \mathbf{0} = A = \mathbf{0} + A$
(3) inverse : $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \exists B \in \mathbb{R}^{m\times n},\ A+B = B+A = \mathbf{0}$ où
$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
désigne la *matrice nulle*.
(4) commutativité : $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n},\ A+B = B+A$.
On dit alors que $\mathbb{R}^{m\times n}$ est un groupe commutatif.
(5) $\forall k \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n},\ k(A+B) = kA + kB$
(6) $\forall k, r \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ (k+r)A = kA + rA$
(7) $\forall k, r \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ k(rA) = (kr)A$
(8) $\mathbb{1}A = A$ où
$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
désigne la *matrice identité*.

- *Produit matriciel* : Pour multiplier deux matrices A et B, l'idée est de multiplier les lignes de A par les colonnes de B. Si A est de type $m \times n$, il faut donc que B soit de type $n \times p$ pour pouvoir envisager le produit AB. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pr} \end{pmatrix}$$

Alors $AB = C \in \mathbb{R}^{m \times p}$ où la matrice C est définie par

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Notons que c_{ij} est le produit scalaire de la i^e ligne de A avec la j^e colonne de B.
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2-1+2 & -3+4 & -2-5 \\ 1-2-6 & -6-12+4 & -1+15+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ -7 & -14 & 22 \end{pmatrix}$$

REMARQUES

- Le produit matriciel n'est pas commutatif. En effet,
  - AB peut exister sans que BA soit défini. Prenez, par exemple, A de type 3×4 et B de type 4×2.
  - AB et BA peuvent exister sans être de même type. Prenez, par exemple, A de type 3×4 et B de type 4×3.
  - AB et BA peuvent exister, être de même type mais être différentes. Prenez, par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ (Faites les calculs).
- Le produit matriciel n'est pas simplifiable, c'est-à-dire que $AB = AC$ n'implique pas que $B = C$.
  Exemple : Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a $AB = AC = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ mais pourtant $B \neq C$.

24.2 Exercices

- Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

  Trouvez la matrice X telle que $2A - B^t = X$.
- Trouvez la matrice C telle que $A + C = BA$ si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculez, si possible :
  — $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$
  — $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
  — $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
- Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
  — Quelle relation simple existe-t-il entre A et B ?
  — Calculez A^2.
  — Déduisez-en B^2 et AB.

24.3 Transformations élémentaires

Revenons au problème de la résolution de systèmes linéaires.
Un système de n équations linéaires à p inconnues est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{12}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement comme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

De manière condensée, on notera $A\overline{x} = b$ où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ et $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. L'ensemble des solutions du système sera noté S. On dit que A est la *matrice des coefficients du système*. A partir de cette matrice, on construit la *matrice augmentée du système*

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

C'est la matrice du système complétée par la colonne des termes indépendants, d'où la séparation symbolisée par $|$. À chaque fois que la barre $|$ apparaît dans une matrice, celle-ci sera traitée comme une matrice augmentée. Sinon, la matrice sera considérée comme la matrice des coefficients du système.

À partir d'une matrice augmentée donnée, il est très facile de reconstituer le système qui lui est associé.

Par exemple, soit la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Cette matrice correspond au système

$$\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ y-2z=-3 \\ z=2 \end{cases}$$

La troisième équation nous dit que $z=2$. Puis, en remontant dans le système, on obtient successivement $y=1$ puis $x=-9$.Donc, $S=\{(-9,1,2)\}$ (Vérifiez en remplaçant dans chaque équation x par -9, y par 1 et z par 2.)
Ce système est particulièrement simple à résoudre car sa matrice augmentée a une forme particulière. On dit que c'est une matrice *échelonnée ou en escalier*.

Une matrice est *échelonnée* si :

- Dans chaque ligne, le premier élément non nul est 1.
- Dans chaque ligne, le premier élément non nul est strictement plus à droite que dans la ligne précédente.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 2 *Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée.*

Pour échelonner n'importe quelle matrice, on va lui appliquer des transformations élémentaires sur les lignes. De quoi s'agit-il ?

Les *transformations élémentaires sur les lignes* consistent à
- permuter les deux lignes i et j, ce qu'on notera $L_i \leftrightarrow L_j$,
- multiplier tous les éléments de la ligne i par un réel α non-nul, ce qu'on notera $L_i \leftarrow \alpha L_i$,
- ajouter à la ligne i un multiple α de la ligne j, ce qu'on notera $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Voici le procédé à utiliser pour échelonner une matrice :

(1) Ignorer les éventuelles premières colonnes de zéros.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) Faire apparaître un élément non nul sur la 1re ligne de la 1re colonne non nulle en permutant les lignes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

(3) Diviser la 1re ligne par son premier élément non nul.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1/3$$

(4) Ajouter aux autres lignes un multiple convenable de la 1re ligne pour amener des zéros dans la première colonne non nulle.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

(5) Répéter les opérations 1, 2, 3 et 4 sur les lignes suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4/3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array}$$

Considérons la matrice que l'on vient d'échelonner précédemment et voyons-la comme la matrice augmentée $[A|b]$ du système

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_3 = 4 \end{cases} \tag{3}$$

Nous avons transformé cette matrice en la matrice échelonnée

$$[A^*|b^*] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cette matrice correspond au système

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ x_2+2x_3=1 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=1 \end{cases} \tag{4}$$

Ici, la dernière ligne de la matrice augmentée ne nous apporte aucune information et la troisième ligne implique que le système ne possède aucune solution. En effet, l'équation $0x+0y+0z=1$ est impossible. On dit que le système est *impossible* et on a $S=\varnothing$.

La question qui se pose est de savoir si les systèmes (1) et (2) possédent les mêmes solutions. La réponse est positive et est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3 *Si on transforme la matrice augmentée $[A|b]$ d'un système en une matrice échelonnée $[A^*|b^*]$, on obtient alors les équations d'un nouveau système qui possède exactement les mêmes solutions que le système initial.*

Résumons :

$$A\overline{x}=b \longrightarrow [A|b] \longrightarrow [A^*|b^*] \longrightarrow A^*\overline{x}=b^*$$

et $\overline{x}_s$ est solution de $A\overline{x}=b$ ssi $\overline{x}_s$ est solution de $A^*\overline{x}=b^*$.

Exemples :

$$(1)\quad \begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3+3x_4=5 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_4=3 \\ -x_1-x_2+3x_3+2x_2=-6 \end{cases}$$

L'idée est d'échelonner la matrice augmentée du système.On a :

$$[A|b]=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -6 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftrightarrow L_3 + 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftrightarrow L_3/-3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 23/3 & 7 \end{array}\right) \qquad L_4 \leftrightarrow L_4 - 4L_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21/23 \end{array}\right) \qquad L_4 \leftrightarrow 3/23L_4$$

Pour écrire la solution, il suffit de partir de la dernière ligne de la matrice échelonnée pour trouver la valeur de x_4 et de remonter dans chaque ligne afin de trouver la valeur de $x_3,\ x_2$ puis enfin x_1. Après calculs, on trouve $S = \{(66/23, 12/23, -34/23, 21/23)\}$. Le système possède donc une unique solution.

(2) $\begin{cases} x+2y-3z+w=0 \\ x-3y+z-2w=0 \\ 2x+y-3z+5w=0 \end{cases}$

Remarquons que les termes indépendants de chaque équation valent 0. On dit que c'est un *système homogène*. La solution triviale est toujours solution d'un tel système. Donc, ici, $(0,0,0,0)$ est solution. Est-ce la seule solution ?

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_2/-3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 0 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow -L_3$$

De la dernière ligne, nous déduisons, $z = -8w$, $y = -7w$ puis $x = -11w$. Nous avons donc exprimé x, y et z en fonction de w. On écrit $S = \{(-11w, -7w, -8w, w) : w \in \mathbb{R}\}$. On dit que le système est *simplement indéterminé*.

$$(3) \quad \begin{cases} 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 3x + 4y - 5z + 2w = 4 \end{cases}$$

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

Comme la dernière ligne n'est constituée que de zéros, elle ne nous apporte aucune information. De la deuxième ligne, nous déduisons $y = 1 + 2z - 2t$ et en remplaçant dans la première équation, on obtient $x = -z + 2t$. Nous avons donc exprimé x et y en fonction des deux variables z et t. On a $S = \{(-z + 2t, 1 + 2z - 2t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\}$. On dit que le système est *doublement indéterminé*.

24.4 Exercices

Résolvez les systèmes suivants

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} mx - y = 2 \\ x + (m+2)y = m - 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 8x_4 - 3x_3 - 8x_2 + 3x_1 - 18 = 0 \\ 5x_3 + 2x_1 - 3x_2 - 4x_4 = 19 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 3x + y + az = 2 \\ -3x + 2y + a^2 z = 1 \\ 3y = a + 6 \\ 6x - y + 2az = a - 2 \end{cases} \qquad \text{où } a \text{ est un paramètre réel.}$$

24.5 Inverse d'une matrice

Pour rappel, considérons dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax = b$. Une solution x de cette équation existe si et seulement si soit $a \neq 0$ soit ($a = 0$ et $b = 0$). Si on est dans le cas $a \neq 0$, alors a est inversible et on peut écrire [14]

$$a^{-1}ax = a^{-1}b$$

c'est-à-dire

$$1 \cdot x = a^{-1}b$$

ou encore $x = b/a$.

Dans ce qui vient d'être fait, on peut considérer x comme une matrice de type 1×1 et se demander si on peut généraliser ce procédé à une matrice de type $n \times n$. Autrement dit, soit le système $A\overline{x} = b$ où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, peut-on trouver une matrice $\tilde{A}$ telle que $\overline{x} = \tilde{A}b$, c'est-à-dire une matrice pour laquelle on a la relation $\tilde{A}A = A\tilde{A} = \mathbb{1}$? On dit que la

14. On utilise ici la commutativité de « $\cdot$ » dans $\mathbb{R}$.

matrice $\tilde{A}$ est la matrice inverse de A. Quand elle existe, cette matrice inverse est unique et on la note A^{-1}. Nous verrons au paragraphe suivant ce qui garantit l'existence de la matrice inverse.

Pour le moment, nous sommes intéressés par trouver un procédé qui permet d'inverser une matrice. Les transformations élémentaires vont nous aider.

Examinons : soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et la matrice identité} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Appliquons à chaque matrice la transformation élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$.

On obtient les matrices $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nous constatons que $I^*A = A^*$ (Faites les calculs).

De manière générale, appliquer une transformation élémentaire de lignes à une matrice A revient à multiplier à gauche cette matrice par la matrice identité $\mathbb{1}$ dans laquelle on a effectué la même transformation.

Méthode de la matrice compagnon :
Nous allons appliquer simultanément les mêmes transformations à la matrice A et à la matrice identité. Lorsque nous aurons transformé A en la matrice identité dans la colonne de gauche, nous aurons obtenu la matrice inverse dans la colonne de droite. En effet, considérons les n transformations élémentaires nécessaires pour transformer A en l'identité. Nous avons :

- A et $\mathbb{1}$ au départ.
- Après la première transformation, nous avons : $A_1 = T_1 A$ et $I_1 = T_1 \mathbb{1}$ où T_1 est l'identité dans laquelle on a appliqué la transformation 1,
- Après la deuxième transformation, nous avons : $A_2 = T_1 A_1$ et $I_2 = T_2 \mathbb{1}$ où T_2 est l'identité dans laquelle on a appliqué la transformation 2,
- etc.
- Après la n^{e} transformation, nous avons : $\mathbb{1} = T_n A_{n-1}$ et $I_n = T_n I_{n-1}$ où T_n est l'identité dans laquelle on a appliqué la transformation n.

On sait que $\mathbb{1} = T_n T_{n-1} \cdots T_1 A$. D'autre part, la matrice inverse vérifie $A^{-1} = \mathbb{1} A^{-1}$, c'est-à-dire $A^{-1} = T_n T_{n-1} \cdots T_1 A A^{-1} = T_n \cdots T_1 \mathbb{1} = I_n$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \qquad \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix}-10 & 5 & -4\\ -13 & 6 & -5\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2/(-2) \qquad \begin{pmatrix}-10 & 5 & -4\\ 13/2 & -3 & 5/2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} = A^{-1}$$

Application : résolvez le système

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ x + 5z = -4 \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 1\\ -4\end{pmatrix}$$

Il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité par la matrice inverse :

$$\begin{pmatrix}-10 & 5 & -4\\ 13/2 & -3 & 5/2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10 & 5 & -4\\ 13/2 & -3 & 5/2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\ 1\\ -4\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

Pour terminer ce paragraphe, nous allons établir par calcul la forme générale de l'inverse d'une matrice 2×2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on cherche une matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, nous cherchons à résoudre les deux systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \tag{5}$$

et

$$\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Après calculs (faites les détails !), on touve comme solutions des systèmes (5) et (6) :

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad y = \frac{-b}{ad - bc}, \quad z = \frac{-c}{ad - b}, \quad t = \frac{a}{ad - bc}.$$

Dès lors, pour pouvoir inverser la matrice A, il apparait la condition d'existence $ad - bc \neq 0$. Alors, nous pouvons écrire :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/(ad - bc) & -b/(ad - bc) \\ -c/(ad - bc) & a/(ad - bc) \end{pmatrix}$$

Le nombre $ad - bc$ est appelé *déterminant* du système, noté détA, puisqu'il détermine, en quelque sorte, le nombre de solutions du système. En effet, considérons un système linéaire de deux équations à deux inconnues, c'est-à-dire un système de la forme

$$\begin{cases} ax + by = t \\ cx + dy = s \end{cases}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients du système. On a dét$A = ad - bc$.

Géométriquement, résoudre ce système revient à étudier les positions des droites D_1 et D_2 d'équations respectives $ax + by = t$ et $cx + dy = s$.

- Si dét$A \neq 0$, alors le système possède une unique solution donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

  Géométriquement, cela signifie que les droites D_1 et D_2 sont sécantes en un point.

- Si dét$A = 0$, c'est-à-dire si $a/c = b/d$ alors la matrice A du système n'est pas inversible. Géométriquement les droites D_1 et D_2 sont soit confondues soit parallèles distinctes. Cela dépend du rapport e/f.
  — Si $a/c = b/d = e/f$, alors les deux droites sont confondues. La solution du système est une droite et le système est indéterminé.
  — Si $a/c = b/d \neq e/f$, alors les deux droites sont parallèles distinctes et il n'y a donc pas de solution. Le système est impossible.

24.6 Exercices

(1) Inversez, si possible, les matrices suivantes :
- $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) Résolvez le système

$$\begin{cases} -x+3y+z=1 \\ 2x+5y=3 \\ 3x+y-2z=-2 \end{cases}$$

24.7 Déterminants

Déterminants d'ordre 2

Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, on définit

$$\text{dét}A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Par exemple, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 20 = 26$

Déterminants d'ordre 3

Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, on définit

$$\text{dét}A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{31}a_{21}a_{32} \\ \qquad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

En regroupant les termes, on obtient

$$\begin{aligned}\text{dét}A &= a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{31}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\,\text{dét}A_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}\,\text{dét}A_{21} + (-1)^{3+1}A_{31}\,\text{dét}A_{31}\end{aligned}$$

où A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne de A.

On aurait très bien pu regrouper les termes différemment, ce qui revient à développer le déterminant suivant une autre ligne ou une autre colonne. Par exemple, suivant la 2e ligne, on obtient $\text{dét}A = -a_{21}\,\text{dét}A_{21} + a_{22}\,\text{dét}A_{22} - a_{23}\,\text{dét}A_{23}$.

En général, on préférera développer un déterminant suivant la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros.

Par exemple, $\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix} = (-1)^{3+2}2\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix} = 2$. Ici, on a développé par rapport à la deuxième colonne car elle contient deux zéros.

Déterminants d'ordre n

Soit $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

En généralisant ce qui a été fait précédemment, on peut par exemple développer $\text{dét}A$ suivant la première colonne pour obtenir

$$\begin{aligned}\text{dét}A &= (-1)^{1+1}a_{11}\,\text{dét}A_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}\,\text{dét}A_{21} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}\,\text{dét}A_{n1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\,\text{dét}A_{k1}\end{aligned}$$

Conclusion :

- Suivant la j^{e} colonne : $\text{dét}A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\,\text{dét}A_{kj}$
- Suivant la i^{e} ligne : $\text{dét}A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\,\text{dét}A_{ik}$

EXEMPLE : Remarquons par exemple que le déterminant d'une matrice 5×5 nécessite le calcul de 5 déterminants 4×4, donc de 20 déterminants 3×3, ou encore de 60 déterminants 2×2. Plus généralement, le calcul d'un déterminant d'ordre n demandera le calcul de $n!/2$ déterminants 2×2, ce qui peut s'avérer très long, sans compter les éventuelles erreurs de calculs.

Nous allons établir des propriétés qui faciliteront le calcul des déterminants.

PROPRIÉTÉS :

- La valeur d'un déterminant change de signe si on permute deux lignes ou deux colonnes entre elles.
  Conséquence : Un déterminant qui possède deux lignes ou deux colonnes identiques est nul. (Voyez-vous pourquoi ?)
- Dans un déterminant, on peut mettre en évidence un facteur commun à tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne.
  Par exemple, $\begin{vmatrix} 14 & 21 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$.
  Faites attention, $r \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ra & rb \\ c & d \end{vmatrix}$ ou bien $r \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & rb \\ c & rd \end{vmatrix}$ ou bien... Que vaut $\begin{vmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{vmatrix}$?
  Conséquence : si deux colonnes ou deux lignes d'un déterminant sont proportionnelles, alors il vaut 0. (Voyez-vous pourquoi ?)
  Par exemple : $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$
- La valeur d'un déterminant ne change pas si on lui applique la transformation élémentaire $L_i \leftarrow a_1L_1 + a_2L_2 + \cdots + L_i + \cdots + a_nL_n$.

Exemples :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C-1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$= (a+b+c)(a+b+c)^2 = (a+b+c)^3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 1 & c+a\end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 0 & c-b\end{vmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

Généralisons : Posons $V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$

Ce déterminant est appelé **déterminant de Vandermonde**.

On a $V_n = \prod\limits_{i<j}(a_j - a_i)$. Pour prouver cette formule, on montre par récurrence sur n que $V_n = (a_n - a_1)(a_{n-1} - a_1)\dots(a_2 - a_1)V_{n-1}$.

24.8 Exercices

(1) Soit A une matrice 3×3. Posons dét$A = \delta$. Que vaut le déterminant de la matrice
- $B = kA$ où $k \in \mathbb{R}$?
- C obtenue en multipliant les termes de la 1re colonne de A par $3k$, ceux de la 2e colonne par $-5k^2$ et en divisant ceux de la 3e colonne par 4 ?

(2) Montrez, sans les développer, que les déterminants suivants sont nuls.
- $\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 1 & \sin^2 y & \cos^2 y \\ 1 & \sin^2 z & \cos^2 z \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 9 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ab \\ ba & c^2 & b^2 \\ ac & ab & cb \end{vmatrix}$

(3) Calculez les déterminants suivants. Énoncez les propriétés que vous utilisez.
- $\begin{vmatrix} 1 & n+1 & n(n+1) \\ 1 & n+2 & (n+1)(n+2) \\ 1 & n+3 & (n+2)(n+3) \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 2a & a+b & 2 \\ b & b & 1 \\ 4b & 3b & 2 \end{vmatrix}$

(4) Utilisez le déterminant de Vandermonde pour calculer les déterminants suivants :

- $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 \\ -2 & 4 & -8 \\ 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(5) Calculez

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

24.9 Systèmes de Cramer

Nous avons vu au paragraphe précédent une méthode permettant de trouver l'inverse d'une matrice, si elle existe. Nous aimerions savoir sous quelle(s) conditions(s) cet inverse existe et s'il existe une « formule » qui fournit la forme générale de la matrice inverse.

Soit la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Nous avons

$$\frac{1}{\text{dét}A}\begin{pmatrix} \text{dét}A_{11} & -\text{dét}A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\,\text{dét}A_{n1} \\ -\text{dét}A_{12} & \text{dét}A_{22} & \dots & (-1)^{n+2}\,\text{dét}A_{n2} \\ \vdots & & & \\ (-1)^{n+1}\,\text{dét}A_{1n} & (-1)^{n+2}\,\text{dét}A_{2n} & \dots & (-1)^{2n}\,\text{dét}A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\text{dét}A}\begin{pmatrix} \text{dét}A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{dét}A\dots & 0 & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \text{dét}A \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

En effet, calculons, par exemple l'élément situé en 1re ligne et 2e colonne(le calcul est identique pour les autres éléments. Faites-le). On a :

$$a_{12}\,\text{dét}A_{11} - a_{22}\,\text{dét}A_{21} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n2}\,\text{dét}A_{n1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots \\ a_{22} & a_{22} & \dots \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots \end{vmatrix} = 0$$

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 4 *Une matrice A de type $n \times n$ est inversible si et seulement si* $\text{dét}A \neq 0$.

De plus, si A est inversible, alors on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}A}\begin{pmatrix} \text{dét}A_{11} & -\text{dét}A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\,\text{dét}A_{n1} \\ -\text{dét}A_{12} & \text{dét}A_{22} & \dots & (-1)^{n+2}\,\text{dét}A_{n2} \\ \vdots & & & \\ (-1)^{n+1}\,\text{dét}A_{1n} & (-1)^{n+2}\,\text{dét}A_{2n} & \dots & (-1)^{2n}\,\text{dét}A_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle *système de Cramer* tout système linéaire de n équations à n inconnues $A\overline{x} = b$ tel que $\text{dét}A \neq 0$.

Considérons un système de Cramer. Alors, on a $\overline{x} = A^{-1}b$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{dét}A}\begin{pmatrix} \text{dét}A_1 1 & -\text{dét}A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\,\text{dét}A_{n1} \\ -\text{dét}A_{12} & \text{dét}A_{22} & \dots & (-1)^{n+2}\,\text{dét}A_{n2} \\ \vdots & & & \\ (-1)^{n+1}\,\text{dét}A_{1n} & (-1)^{n+2}\,\text{dét}A_{2n} & \dots & (-1)^{2n}\,\text{dét}A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Théorème 5 *Tout système de Cramer a une unique solution* $(x_1,\ldots,x_n)$ *donnée par*

$$x_i = \frac{\text{dét}A_i}{\text{dét}A}$$

où A_i *est la matrice obtenue en remplaçant la* i^e *colonne de la matrice* A *par celle des termes indépendants.*

Exemple : soit le système $\begin{cases} x+y-z=10 \\ x+10z=10 \\ x+y+9z=20 \end{cases}$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ et dét$A=-10$.

C'est donc un système de Cramer et sa solution est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 10 & 20 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 10 & 9 \end{vmatrix}}{-10} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 20 \\ -1 & 10 & 9 \end{vmatrix}}{-10} = 11$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 10 & 10 & 20 \end{vmatrix}}{-10} = 1$$

Donc, $S = \{(0,11,1)\}$.

Nous pouvons interpréter géométriquement cette solution. En effet, résoudre un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues revient à étudier les positions relatives de 3 plans de l'espace. Examinons les différentes possibilités.

Considérons le système

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

Aux trois équations de ce système correspondent les équations de trois plans, notés respectivement α_1, α_2 et α_3. Nous allons discuter les positions de ces trois plans en termes de leurs vecteurs gradients $\overrightarrow{v_i} = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ pour $i=1,2,3$.

Plusieurs situations peuvent se présenter.

- α_1 et α_2 sont confondus. Cela signifie que leurs gradients respectifs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont proportionnels et que cette proportion est également respectée par les termes indépendants. Autrement dit, $\overrightarrow{v_1} = k\overrightarrow{v_2}$ et $b_1 = kb_2$ pour un certain k dans $\mathbb{R}$. On dit que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont des *vecteurs colinéaires*.
  La solution dépend alors de la position du troisième plan.
  - Soit $\alpha_3 = \alpha_1$. Alors, alors les trois plans sont confondus. Cela signifie que les trois vecteurs gradients sont colinéaires.
    La solution est un plan et le système est donc doublement indéterminé.
  - Soit α_3 et α_1 sont parallèles distincts. Cela signifie que les gradients sont proportionnels mais que cette proportion n'est pas respectée par les termes indépendants.
    Le système est donc impossible.
  - Soit α_3 coupe α_1 selon une droite notée D_{13}. Cela signifie que les gradients ne sont pas colinéaires.
    La solution est une droite et le système est donc simplement indéterminé.

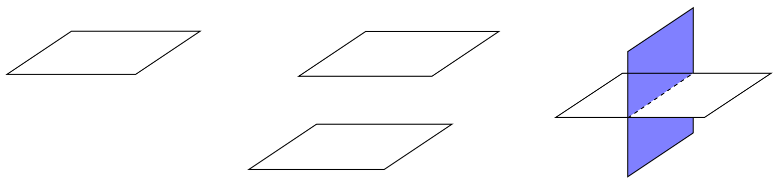


FIGURE 11 – Les 3 situations

- α_1 et α_2 sont parallèles distincts. Dans ce cas, on a encore une relation de la forme $\overrightarrow{v_1} = k\overrightarrow{v_2}$ mais cette fois $b_1 \neq kb_2$.
  Dans ce cas, quelle que soit la position du troisième plan, le système est impossible.
- α_1 et α_2 sont sécants. Alors $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires et les deux plans se coupent selon une droite notée D_{12}. De nouveau, la solution dépend de la position du troisième plan.
  - Soit α_3 et D_{12} sont parallèles et $\alpha_3 \cap D_{12} = \varnothing$. Cela signifie que les vecteurs gradients $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont situés dans un même plan. Autrement dit, ils vérifient une relation de la forme $\overrightarrow{v_3} = k\overrightarrow{v_1} + r\overrightarrow{v_2}$ pour certains $k, r \in \mathbb{R}$ mais cette relation n'est pas respectée par les termes indépendants. Des vecteurs qui vérifient ce type de relations sont dits *linéairement dépendants*. Dans ce cas, le système est impossible.
  - Soit α_3 contient D_{12}. Cela signifie que les gradients sont linéairement dépendants et que les termes indépendants vérifient la même relation de dépendance que les gradients. La solution est la droite D_{12} et le système est simplement indéterminé. La figure ci-dessous illustre les deux dernières situations où, par facilité, on a projeté les différents objets dans le plan de la feuille.

— Soit α_3 coupe D_{12}. Cela signifie que les gradients sont *linéairement indépendants*, c'est-à-dire qu'ils ne vérifient aucune relation de la forme cidessus. La solution est le point d'intersection des trois plans et le système possède donc une unique solution. C'est un système de Cramer.

Exemple : résolvez et discutez, en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} x+(m-1)y+(2m-3)z=1 \\ mx+2(m-1)+2z=2 \\ (m+1)x+3(m-1)y+(m^2-1)z=3 \end{cases}$$

Interprétez géométriquement les résultats.

Soit A la matrice du système. On a dét$A=-m(m-1)(m-2)^2$ (Faites les calculs en utilisant les propriétés des déterminants).

- 1[er] cas : dét$A\neq 0$, c'est-à-dire $m\neq 0$ et $m\neq 1$ et $m\neq 2$.
  On est alors dans le cas d'un système de Cramer. Après calculs, l'unique solution du système est $(0,1/m-1,0)$.
  Géométriquement, les trois équations du système sont celles de trois plans sécants au point $(0,1/(m-1),0)$.
- 2[e] cas : dét$A=0$, c'est-à-dire $m=0$ ou $m=1$ ou $m=2$.

— $m=0$
Le système s'écrit

$$\begin{cases} x-y-3z=1 \\ -2y+2z=2 \\ x-3y-z=3 \end{cases}$$

Les gradients sont linéairement dépendants. En effet, $\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$. De plus, cette relation est respectée par les termes indépendants puisque $b_3=b_1+b_2$. On est dans la situation où les plans α_1 et α_2 se coupent selon une droite D_{12} contenue dans le plan α_3.
Après calculs (faites les en utilisant la méthode de votre choix), on trouve comme solution du système l'ensemble $S=\{(4z,z-1,z):z\in\mathbb{R}\}$. C'est la droite dont un vecteur directeur est $(4,1,1)$ et passant par le point $(0,-1,0)$. Le système est donc simplement indéterminé.

— $m=1$
Le système s'écrit

$$\begin{cases} x-z=1 \\ x+2z=2 \\ 2x=3 \end{cases}$$

De la troisième équation, on déduit $x=3/2$. En remplaçant dans la deuxième équation, on trouve $z=1/2$ mais alors la première équation n'est pas satisfaite. Géométriquement, cela signifie que les trois plans n'ont pas d'intersection commune. Le système est impossible.

— $m=2$

Le système s'écrit $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$

Les trois plans sont confondus. La solution du système est l'ensemble $S = \{(1-y-z,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\}$. C'est un plan. Le système est donc doublement indéterminé.

24.10 Exercices

(1) Résolvez les systèmes suivants par la méthode de Cramer

- $\begin{cases} 3x+y-z=7 \\ 2x-y+z=5 \\ -x+2y+2z=1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 6x+5y+4z=1 \\ 14x-2y-3z=5 \\ 8x-3y-z=8 \end{cases}$

(2) Discutez l'existence de solutions (et calculez-les quand elles existent) pour les systèmes suivants en fonction des paramètres réels a,b,c,d,m. Interprétez géométriquement vos résultats.

- $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+my+z=2m \\ (m+1)x+my+z=m \end{cases}$
- $\begin{cases} ax+2by+2z=1 \\ 2x+aby+2z=b \\ 2x+2by+az=1 \end{cases}$
- $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+my-z=1 \\ -x+y+mz=1 \end{cases}$

Index