Introduction à la notion de convergence

Christophe.Troestler@umh.ac.be
http://www.umh.ac.be/math/an/

Contenu

BUT : Illustrer sur différents exemples la notion de convergence.

– $\sin(x)/x$ lorsque $x \approx 0$

Contenu

BUT : Illustrer sur différents exemples la notion de convergence.

– $\sin(x)/x$ lorsque $x \approx 0$

– Calcul du nombre π

Contenu

BUT : Illustrer sur différents exemples la notion de convergence.

– $\sin(x)/x$ lorsque $x \approx 0$
– Calcul du nombre π
– Ressort avec frottement

1. $\sin(x)/x$ lorsque $x \approx 0$

1.1. Approche « numérique »

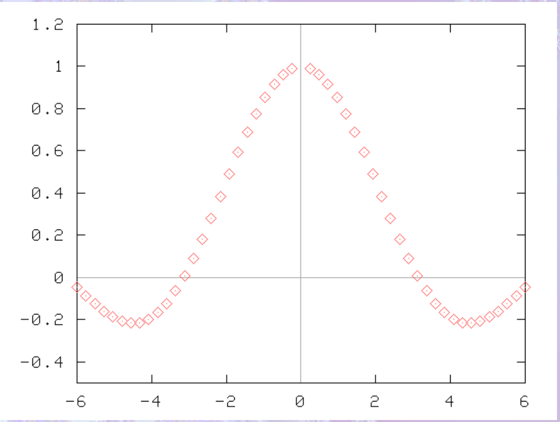
Pour avoir une idée de la valeur de $f(x) := \sin(x)/x$ pour $x \approx 0$, on a fait l'*expérience* de calculer $f(x)$ pour quelques x de plus en plus petits (table ci-contre). On a envie de dire que plus x est proche de 0, plus $f(x)$ est proche de 1.

x	$f(x) = \sin(x)/x$
1	0,841470984808
0,1	0,998334166468
0,01	0,999983333417
0,001	0,999999833333
0,0001	0,999999998333

1.2. Approche « graphique »

On a tracé 50 points du graphe de $f(x) = \sin(x)/x$. De nouveau on constate que lorsque x se rapproche de 0, $f(x)$ se rapproche de 1. On symbolise cela par :

$$x \longrightarrow 0 \Rightarrow f(x) \longrightarrow 1$$



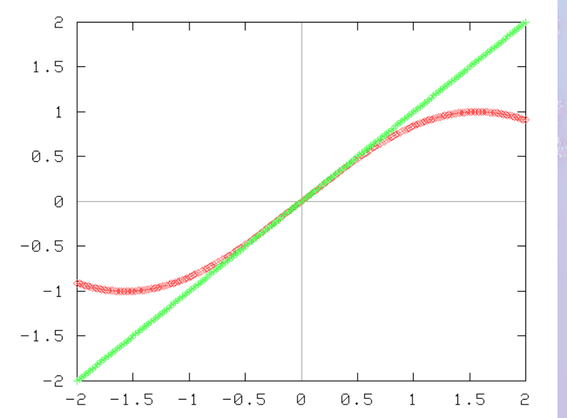
1.3. Approche via l'approximation par la tangente

En tracant $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto x$ (graphe ci-contre), on constate que

$$\sin(x) \approx x \quad \text{si } x \approx 0$$

Par conséquent,

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1 \quad \text{si } x \approx 0$$



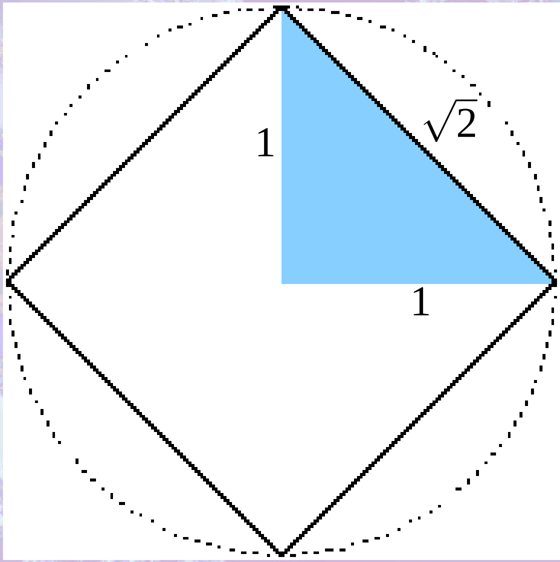
☞ Formellement, cette approche donnera lieu au développement de Taylor.

2. Calcul du nombre π

On va approximer π, qui est l'aire du disque unité, par l'aire de polygones inscrits.

On commence par une approximation grossière : un carré. Le côté du carré $c_1 = \sqrt{2}$ et son aire $a_1 = 2$.

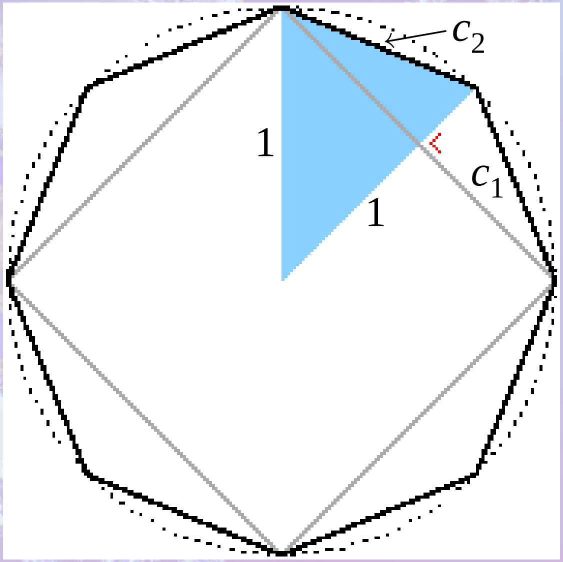
Pour améliorer l'approximation, on divise chaque côté en deux et on amène le milieu sur le cercle...



2. Calcul du nombre π

Pour le carré :

$$c_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad a_1 = 2$$



Désignons le côté et l'aire de l'octogone par c_2 et a_2 respectivement. On veut calculer ces deux quantités en fonction de c_1 et a_1. Comme on va répéter l'opération de « division des côtés en deux », autant chercher un argument général.

2. Calcul du nombre π

Initialement :

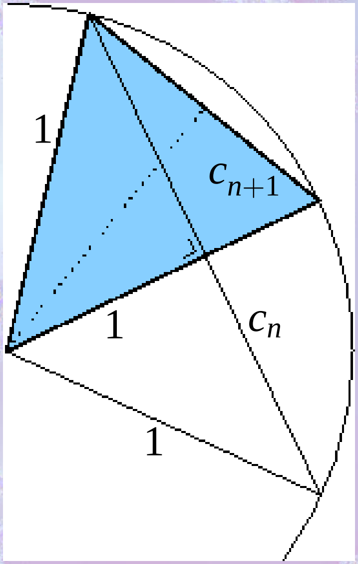
$$c_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad a_1 = 2$$

Formules de récurrence :

$$c_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = 2^n c_n.$$

D'après la construction, on a envie de dire que, plus n est grand, plus proche de π est a_n. Symboliquement :

$$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi.$$



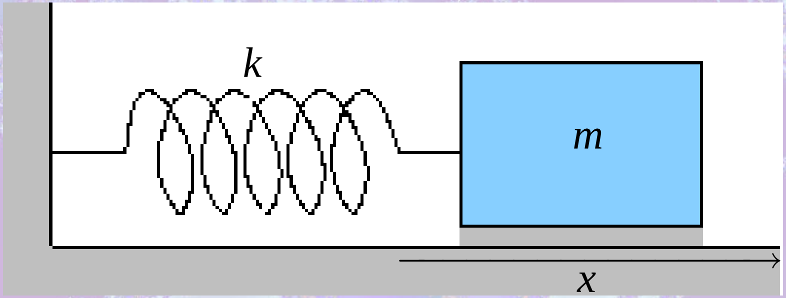
Résultats numériques

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = 2{,}8284271247\ldots$$
$$a_3 = 3{,}0614674589\ldots \qquad a_4 = 3{,}1214451523\ldots$$
$$a_5 = 3{,}1365484905\ldots \qquad a_{10} = 3{,}1415877253\ldots$$
$$a_{15} = 3{,}1415926488\ldots \qquad a_{20} = 3{,}1415926536\ldots$$
$$a_{25} = 3{,}1415926536\ldots$$

La suite des valeurs semble en effet se stabiliser près d'un nombre qui commence par $3{,}14159\ldots$

☞ La notion de convergence intervient dans la conception d'algorithmes de calcul.

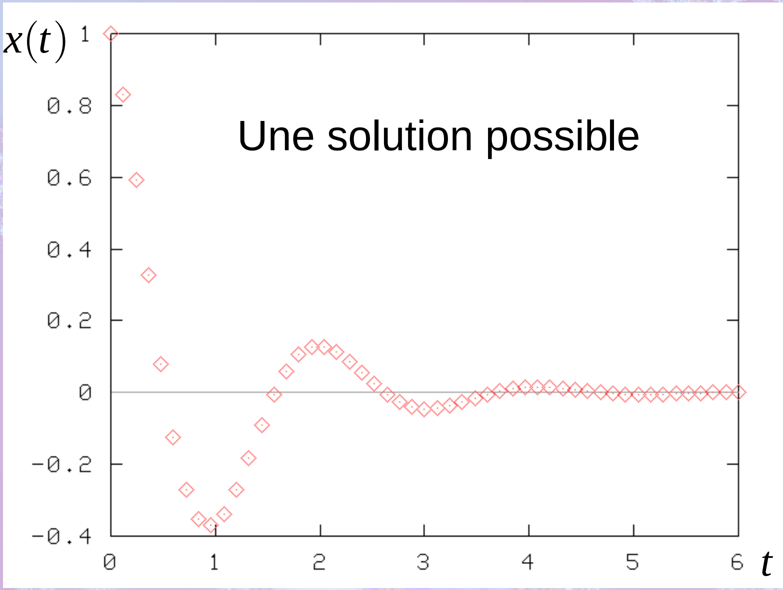
3. Ressort avec frottement



$x = 0$ est le point d'équilibre
k est le coefficient du ressort
m est la masse de l'objet
ν est le coefficient de frottement ($\sim -$vitesse)
La loi de Newton nous dit que :

$$m\partial_t^2 x = -kx - \nu\partial_t x$$

☞ Nous apprendrons à résoudre de telles équations différentielles.



Lorque t devient « grand », $x(t)$ se rapproche de 0. Symboliquement :

$$x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Ceci est vrai pour toutes les solutions ($k > 0$ et $v > 0$).