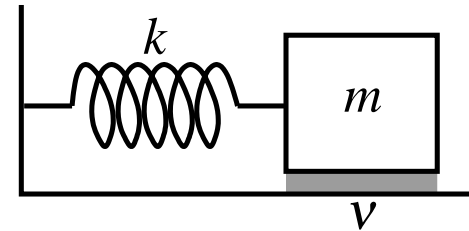


Oscillateur harmonique forcé

L'équation différentielle régissant le mouvement d'un corps de masse m attaché à un ressort de constante de rappel k et subissant une force de frottement proportionnelle à la vitesse — appelons v la constante de proportion — est



$$m\partial_t^2 x + v\partial_t x + kx = 0. \quad (1)$$

Si en plus on ajoute une excitation extérieure sous la forme d'une force $F(t) := a \sin(\omega t)$ exercée sur le corps de masse m , l'équation devient

$$m\partial_t^2 x + v\partial_t x + kx = a \sin(\omega t). \quad (2)$$

Eu égard à leur interprétation physique, nous supposons que les constantes m , v et k vérifient

$$m > 0, \quad v \geq 0, \quad k > 0.$$

Le but de ces quelques notes est d'étudier les mouvements $t \mapsto x(t)$ qui vérifient ces équations.

On s'intéressera aussi au *problème de Cauchy* associé, c'est-à-dire à trouver la solution de l'équation qui vérifie en plus des *conditions initiales* :

$$x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

$$\partial_t x(t_0) = x'_0. \quad (4)$$

On sait (par un théorème non démontré au cours) qu'il existe une et une seule solution qui vérifie (1) (resp. (2)) et (3)–(4).

REMARQUE : Ce texte et les routines ayant servi à réaliser les graphiques sont disponibles sur la page <http://www.umh.ac.be/math/an/analyseI.html>

Équation homogène

Comme d'habitude lorsqu'on s'intéresse à une équation affine, on commence par chercher les solutions de l'équation homogène (linéaire) associée. Pour cela, on a vu qu'il suffit de considérer les racines du *polynôme caractéristique*

$$P(\lambda) = m\lambda^2 + v\lambda + k$$

qui sont

$$\lambda_{\pm} := \frac{-v \pm \sqrt{v^2 - 4mk}}{2m}.$$

Nous allons donc distinguer trois cas :

- $v^2 > 4mk$: les deux racines sont distinctes, réelles et négatives* $\lambda_- < \lambda_+ < 0$;
- $v^2 = 4mk$: on a une racine double $\lambda := \lambda_- = \lambda_+ = -v/(2m) \leq 0$;
- $v^2 < 4mk$: on a deux racines complexes

$$\lambda_{\pm} = \frac{-v \pm i\sqrt{4mk - v^2}}{2m}.$$

*Il est facile de voir que $\lambda_- < 0$ et $\lambda_- < \lambda_+$ (car $m > 0$). Pour $\lambda_+ < 0$, il suffit de considérer le graphe de $\lambda \mapsto P(\lambda) = m\lambda^2 + v\lambda + k$ et de constater que c'est une parabole orientée vers le haut ($m > 0$) et positive en 0 ($k > 0$). Ses racines sont donc toutes deux négatives ou toutes deux positives.

Cas $v^2 > 4mk$

Étant donné que les deux racines sont distinctes, le théorème de résolution des EDO linéaires à coefficients constants nous dit que l'ensemble des solutions *réelles** de l'équation $m\partial_t^2 x + v\partial_t x + kx = 0$ sont

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_+ t} + \beta e^{\lambda_- t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Vu que $\lambda_{\pm} < 0$, on en déduit que, *quel que soient* α et β ,

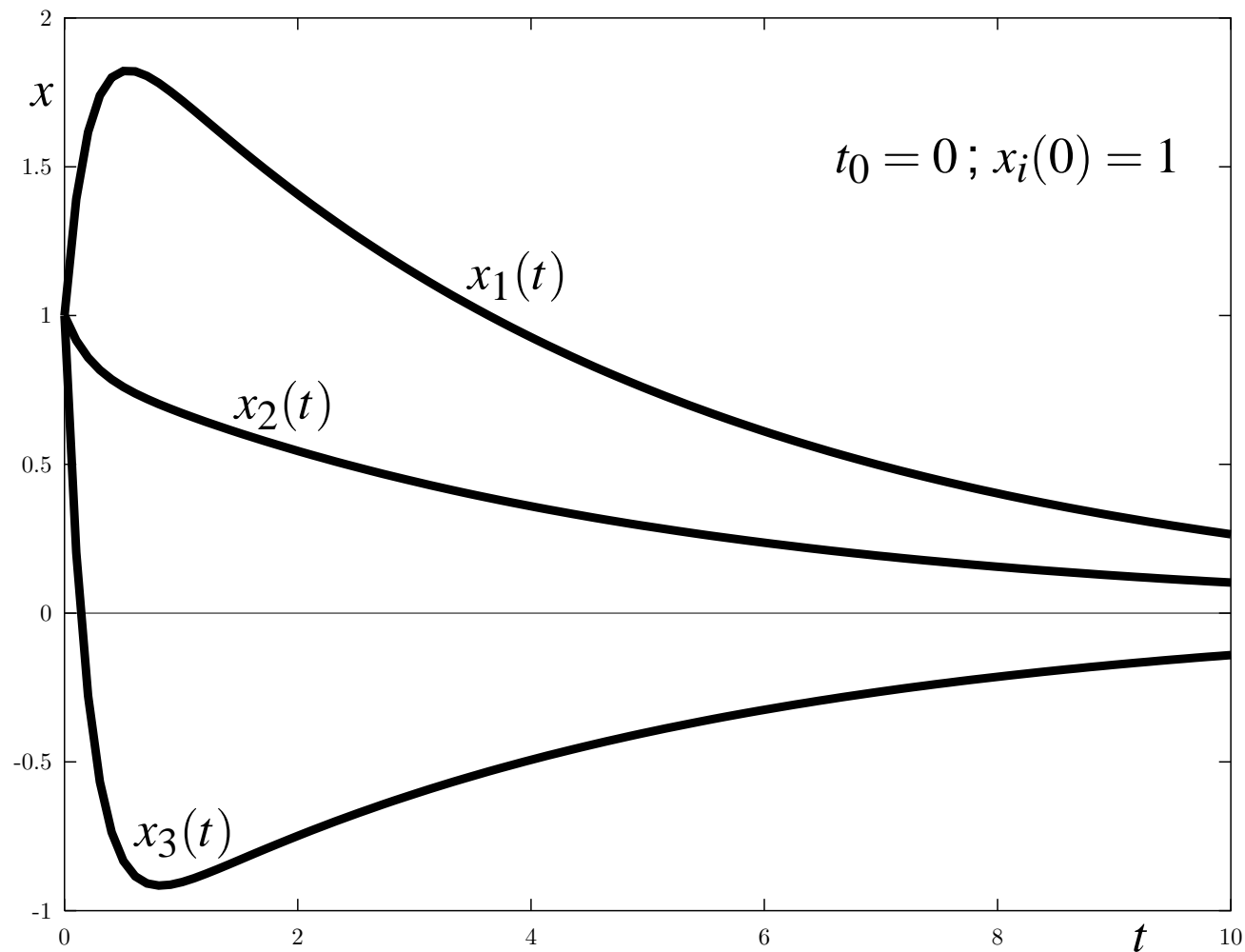
$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Pour satisfaire les conditions initiales (3)–(4) avec $t_0 = 0$, il faut/suffit de prendre

$$\alpha = \frac{x'_0 - \lambda_- x_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \quad \text{et} \quad \beta = x_0 - \alpha = \frac{\lambda_+ x_0 - x'_0}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

*À strictement parler, le théorème nous parle des solutions complexes. Cependant, comme les exponentielles sont réelles, passer aux solutions réelles est immédiat.

Voici les trois profils possibles de $x(t)$ avec une position initiale positive.
(Voyez-vous pourquoi ? Qu'en est-il pour $x(t_0) = 0$ et $x(t_0) < 0$?)



Cas $v^2 = 4mk$

Vu que nous sommes en présence d'une racine double $\lambda = -v/(2m)$, un polynôme de degré 1 multipliera $e^{\lambda t}$, ce qui donne pour solutions réelles :

$$x(t) = (\alpha + \beta t) e^{\lambda t} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

De nouveau, comme* $\lambda < 0$, on a

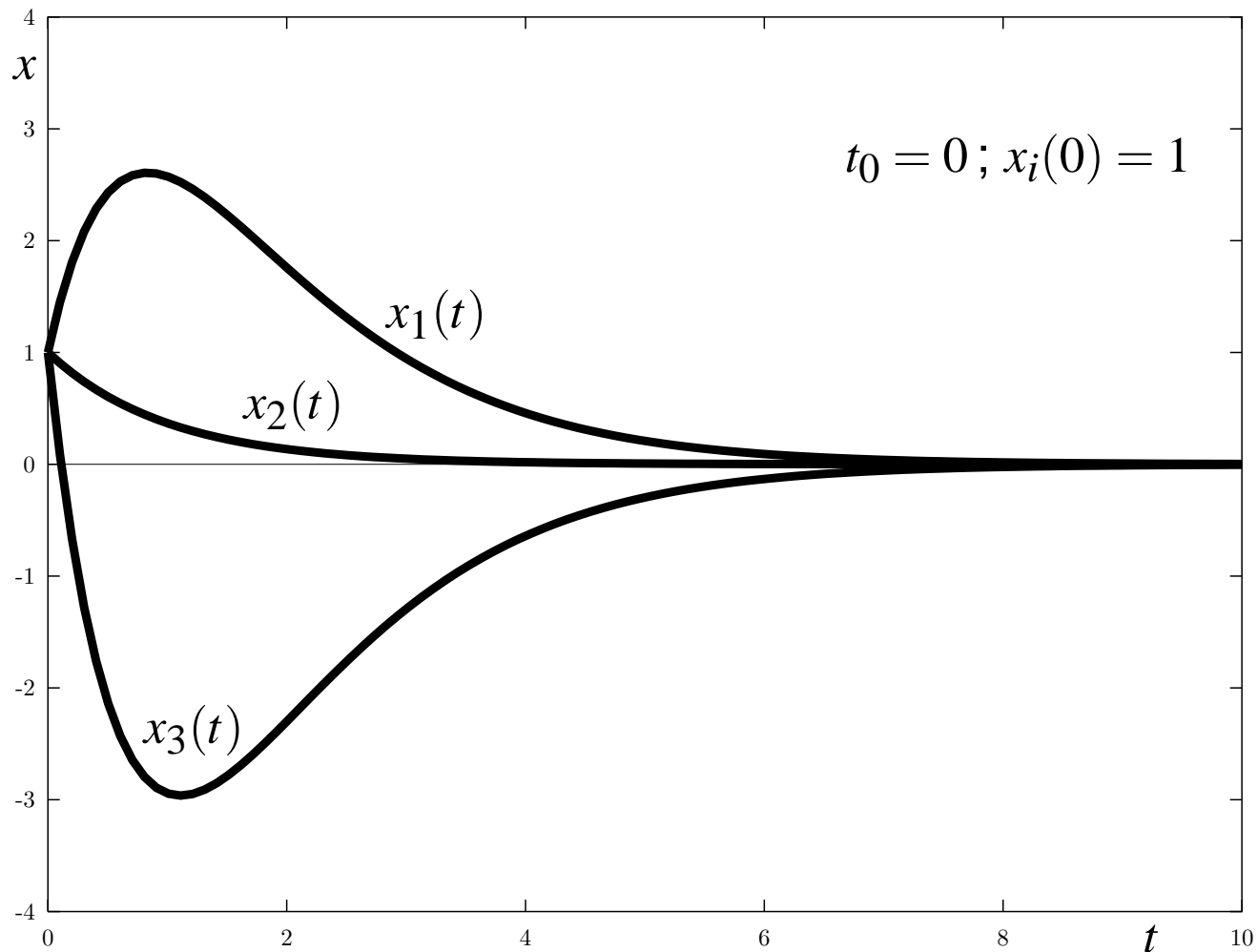
$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Les conditions initiales (3)–(4) avec $t_0 = 0$ sont satisfaites, si et seulement si on prend

$$\alpha = x_0 \quad \text{et} \quad \beta = x'_0 - \lambda x_0.$$

*En effet, v ne peut être nul ici car on aurait alors $0 = v^2 = 4mk$ ce qui impliquerait que m ou k soit nul...

Les profils possibles sont relativement semblables à ceux du cas précédent.



Cas $v^2 < 4mk$

Les solutions complexes sont des combinaisons linéaires des exponentielles $e^{\lambda_{\pm}t}$. Vu que $e^{\lambda_{\pm}t} = e^{-vt/(2m)}(\cos(\omega_0 t) \pm i \sin(\omega_0 t))$ avec

$$\omega_0 := \frac{\sqrt{4mk - v^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{v^2}{4m^2}},$$

on en déduit aisément que les solutions réelles sont :

$$x(t) = e^{-vt/(2m)} (\alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On peut les réécrire sous la forme

$$x(t) = e^{-vt/(2m)} \gamma \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad \gamma, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas (non réaliste) où il n'y a pas de frottement, le mouvement est une oscillation d'amplitude constante γ autour de la position d'équilibre $x = 0$.

Si on tient compte du frottement ($\nu > 0$), le mouvement est amorti, ce qui se traduit par le fait que son amplitude $e^{-\nu t/(2m)} \gamma$ tend vers 0 et donc

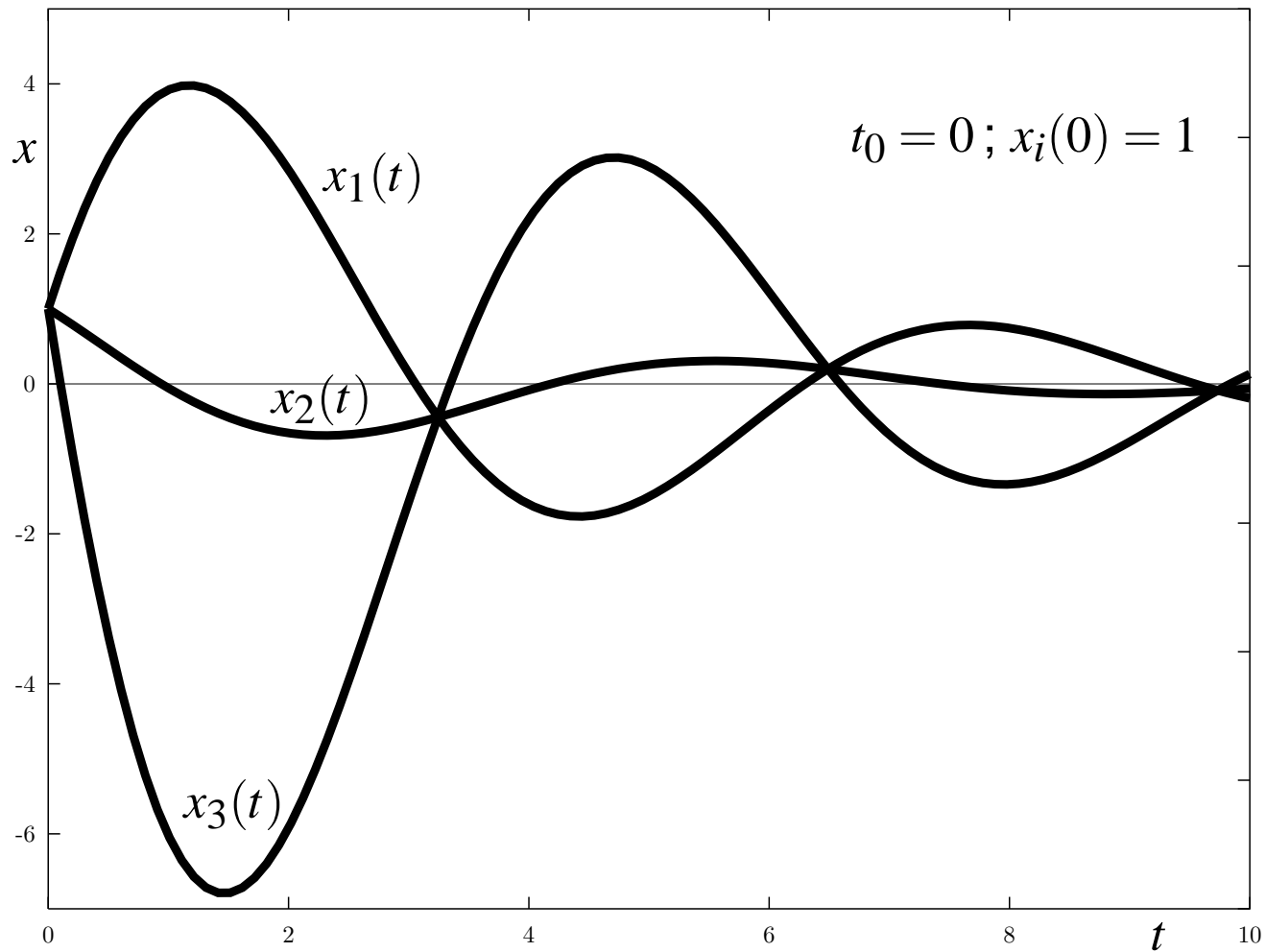
$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

quels que soient α et β (ou, de manière équivalente, quels que soient γ et φ). La différence avec les autres cas est que $x(t)$ tend vers 0 en oscillant autour de 0, oscillation qui est permise par un coefficient de frottement ν qui n'est pas trop grand.

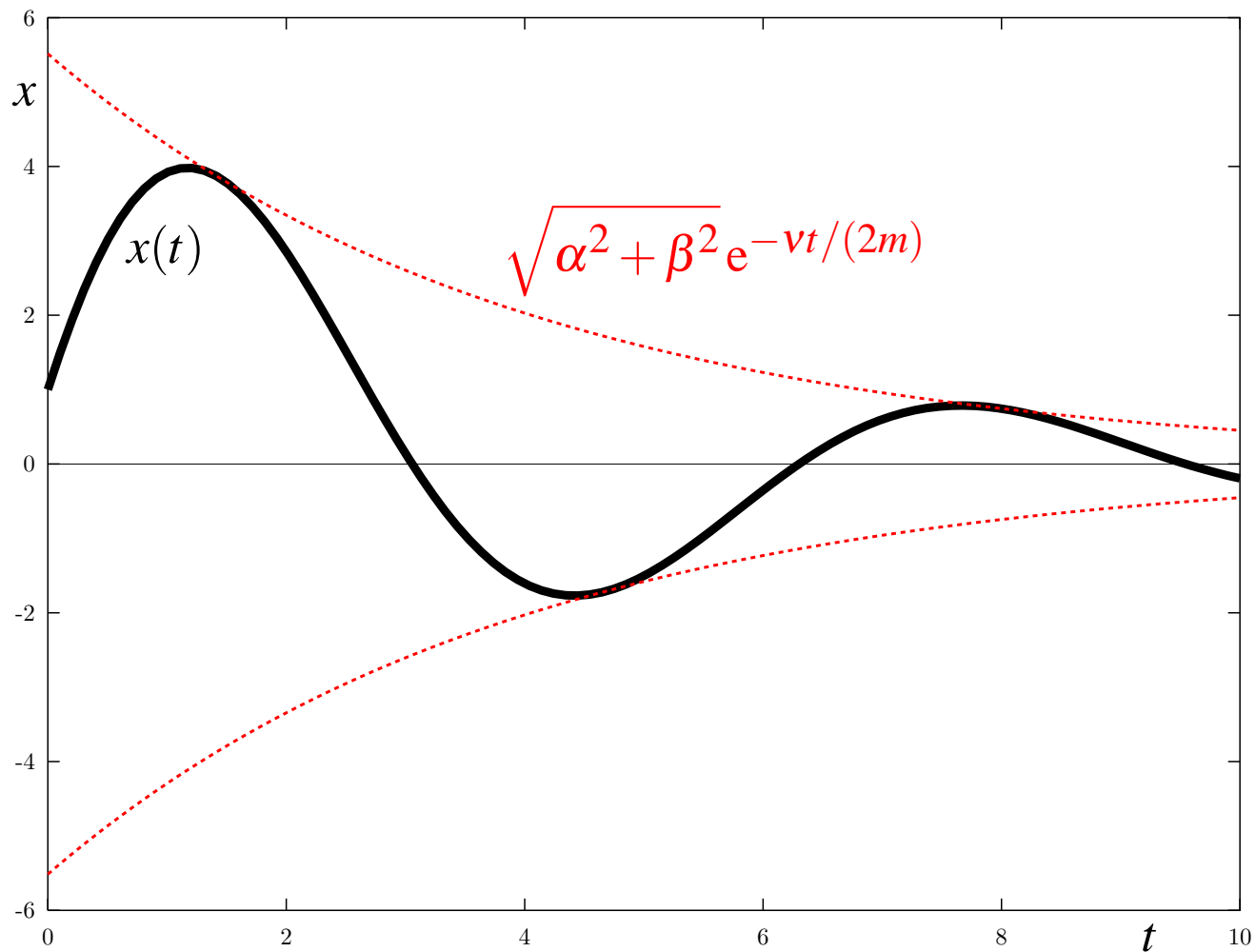
Enfin, si on veut imposer les conditions initiales (3)–(4) avec $t_0 = 0$, il faut/suffit de prendre

$$\alpha = x_0 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{x'_0 + \nu x_0 / (2m)}{\omega_0}.$$

On voit bien que dans ce cas, $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ en oscillant.



Ce graphique illustre le fait que $x(t) = O(e^{-\nu t/(2m)})$.



Oscillateur forcé

Le problème est de trouver une solution particulière de $m\partial_t^2 x + v\partial_t x + kx = a\sin(\omega t)$. Comme $\sin(\omega t) = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/(2i)$, on pourrait chercher des solutions x_{\pm} pour $e^{\pm i\omega t}$ et les « sommer » pour avoir une solution particulière : $(x_+ - x_-)/(2i)$ (principe de superposition). Cependant, afin d'aller plus vite, on peut aussi remarquer que $\sin(\omega t) = \frac{1}{m} \sin(\omega t)$ et que, vu que tous les coefficients de l'équation différentielle sont réels, il suffit de prendre la partie imaginaire d'une solution pour $e^{i\omega t}$.

On sait que la solution particulière avec second membre $e^{i\omega t}$ prendra une forme différente selon que $i\omega$ soit ou non racine du polynôme caractéristique. Être racine ne sera possible que si $v^2 < 4mk$ (pour avoir des solutions complexes), $v = 0$ (la partie réelle des solutions s'annule) et

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ou} \quad \omega = -\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Cas $\nu = 0$ et $\omega^2 = k/m$ (donc $\nu^2 < 4mk$)

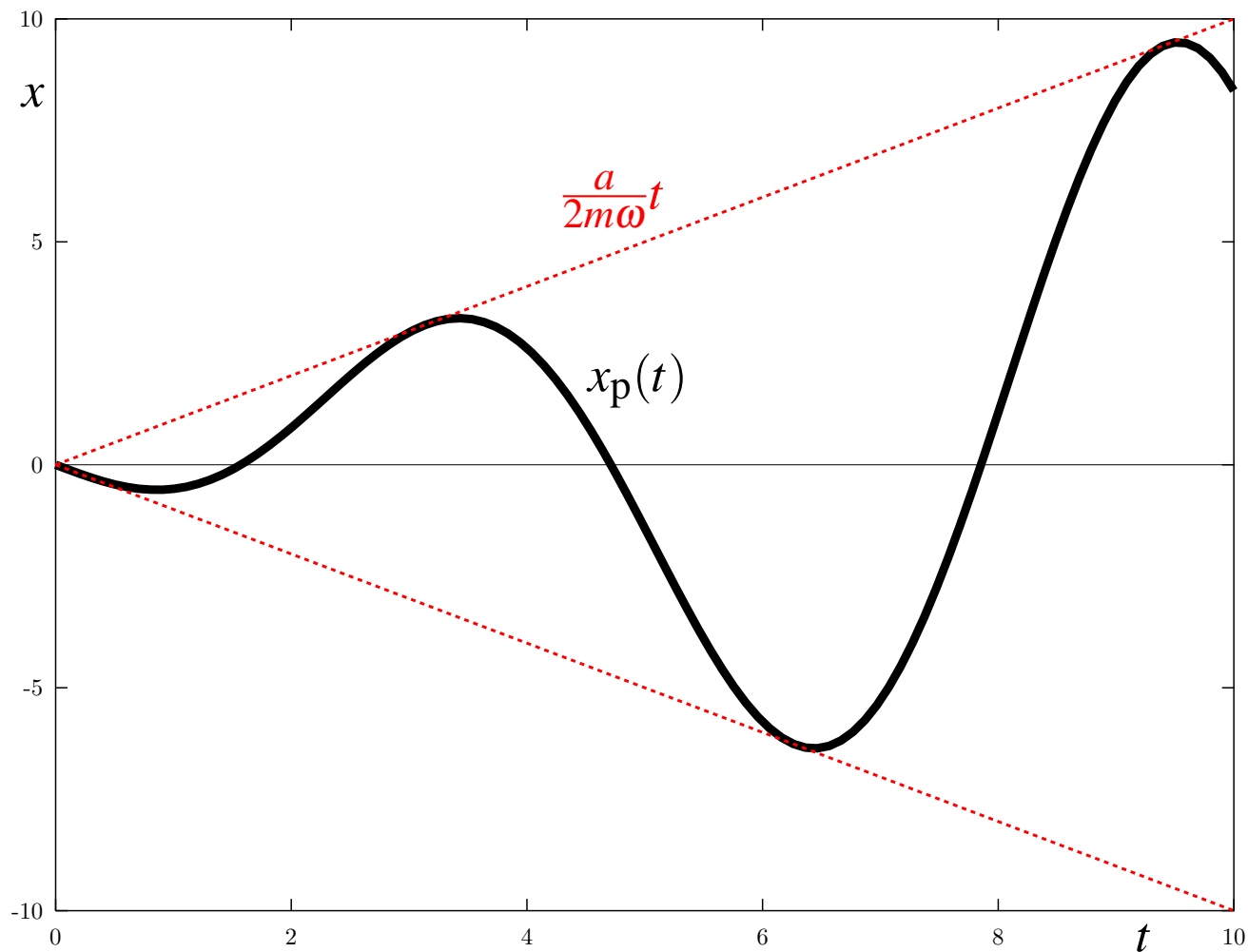
On doit chercher δ pour que $\delta t e^{i\omega t}$ soit une solution particulière puis en prendre la partie imaginaire, ce qui donne pour solution particulière *réelle* :

$$x_p(t) = -\frac{a}{2m\omega} t \cos(\omega t).$$

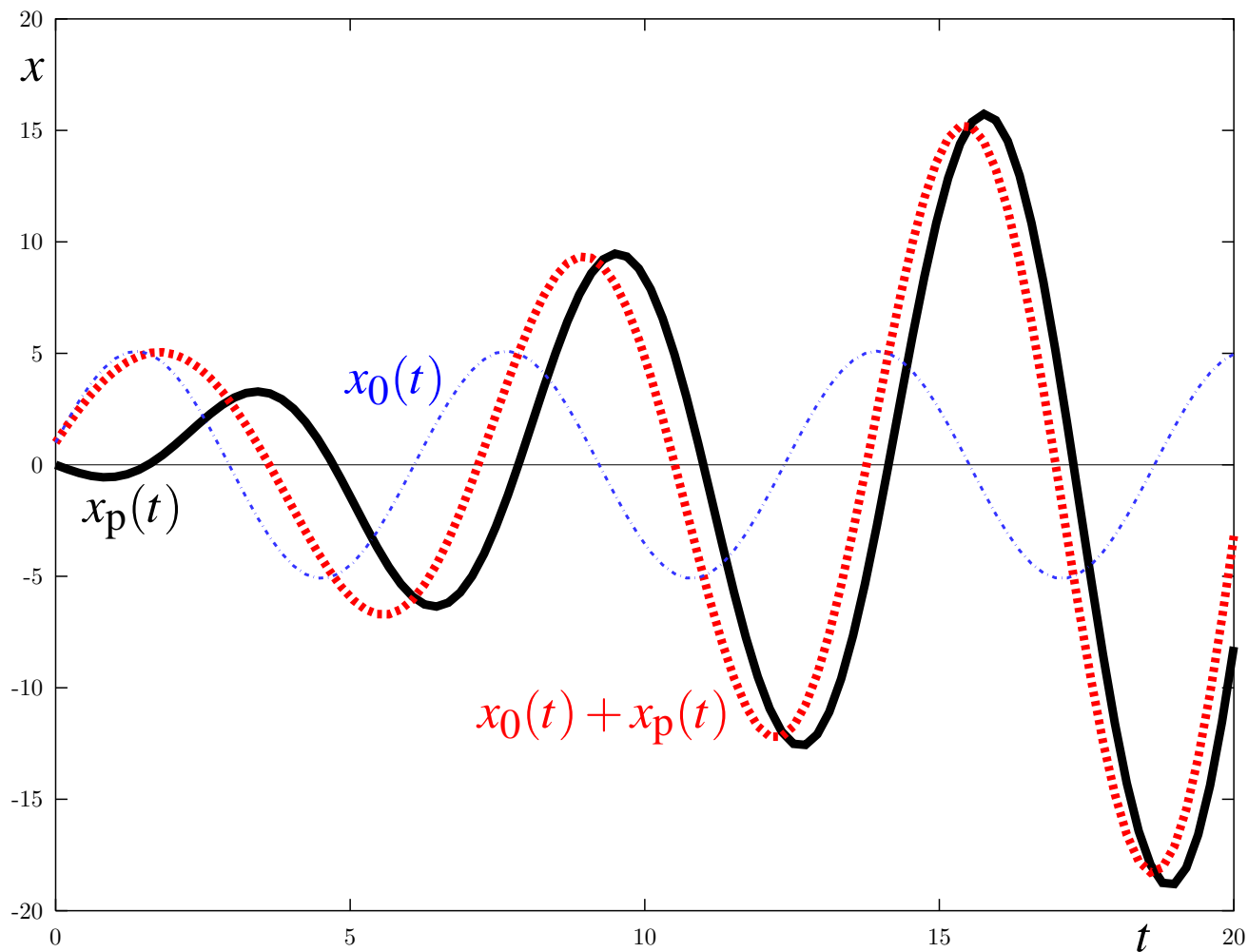
Notons que, puisque $\nu = 0$, $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire que la fréquence d'excitation coïncide avec la fréquence propre du système (la fréquence du système homogène, sans force extérieure).

L'amplitude $\frac{a}{2m\omega} t$ de la solution particulière x_p tendant vers $+\infty$ et les solutions x de l'équation homogène étant bornées, toute solution de l'équation initiale se comportera comme x_p pour t grand.

La solution particulière et son enveloppe.



Graphique illustrant le fait que $x_0(t) + x_p(t)$ ressemble à $x_p(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, où x_0 est une solution de l'équation homogène.



Cas $0 < \nu$

Puisque $i\omega \neq \lambda_{\pm}$, on recherche δ pour que $\delta e^{i\omega t}$ soit une solution particulière complexe. Pour avoir une solution particulière réelle, on prend la partie imaginaire de cette dernière, ce qui donne :

$$x_p(t) = \frac{a}{(k - m\omega^2)^2 + (\omega\nu)^2} \left((k - m\omega^2) \cos(\omega t) + \omega\nu \sin(\omega t) \right)$$

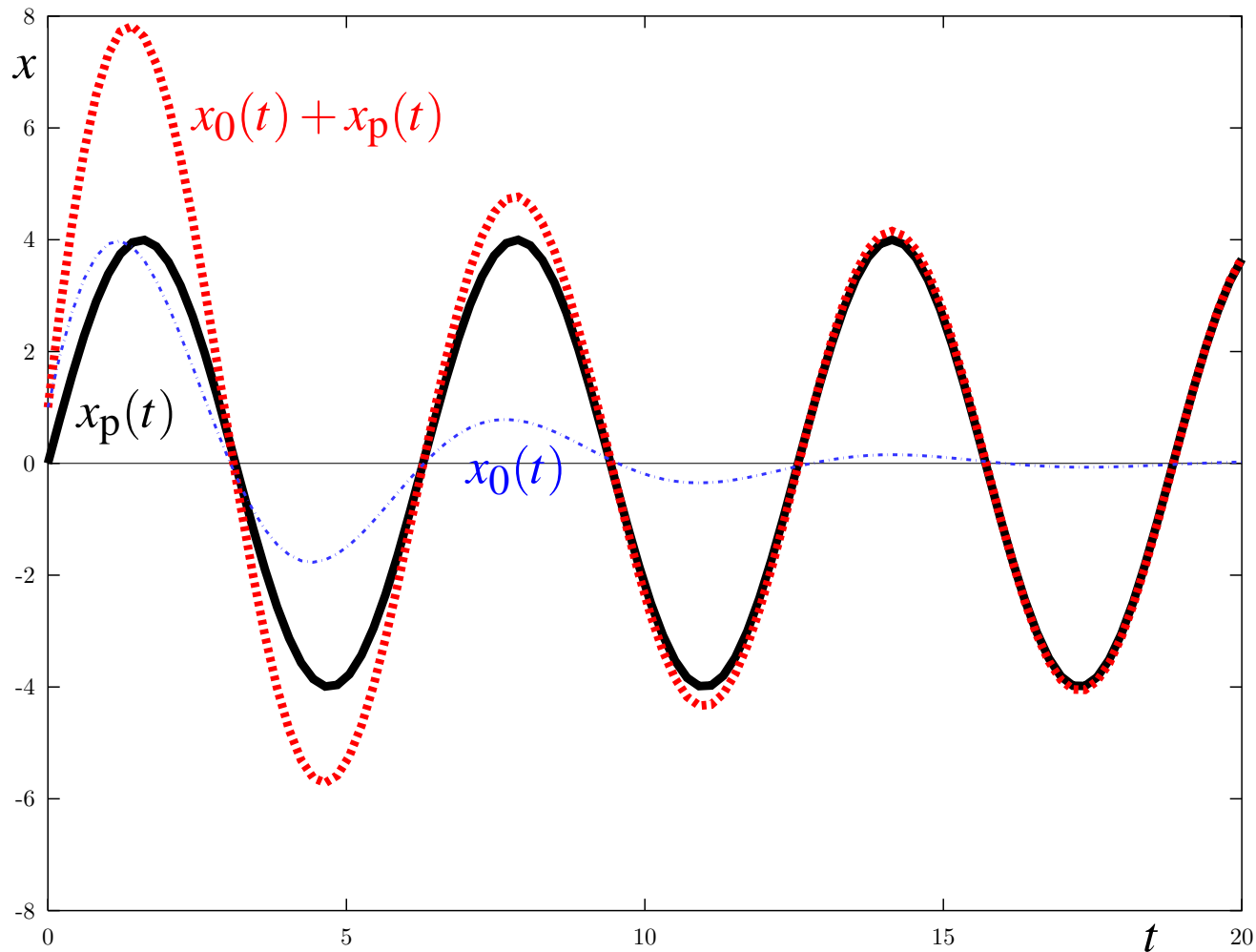
On peut la réécrire sous la forme $x_p(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ avec

$$A = \frac{a}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\omega\nu)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arctan \frac{-\omega\nu}{k - m\omega^2}$$

La constante A est l'amplitude de la solution particulière.

Comme toutes les solutions de l'équation homogène tendent vers 0 pour $t \rightarrow +\infty$, toutes les solutions de l'équation avec terme forçant seront asymptotiques à x_p .

Le graphique suivant montre une solution particulière x_p et le fait que les solutions sont asymptotiques à x_p .



Pour voir le phénomène de résonance, on va s'intéresser à l'amplitude $A = A(\omega)$ de la solution particulière en fonction de ω .

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} A(\omega) = \begin{cases} \frac{a}{v \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{v^2}{4m^2}}} = \frac{a}{v \omega_0} = A(\omega_r) & \text{si } v^2 < 2mk \\ \frac{a}{k} = A(0) & \text{si } v^2 \geq 2mk \end{cases}$$

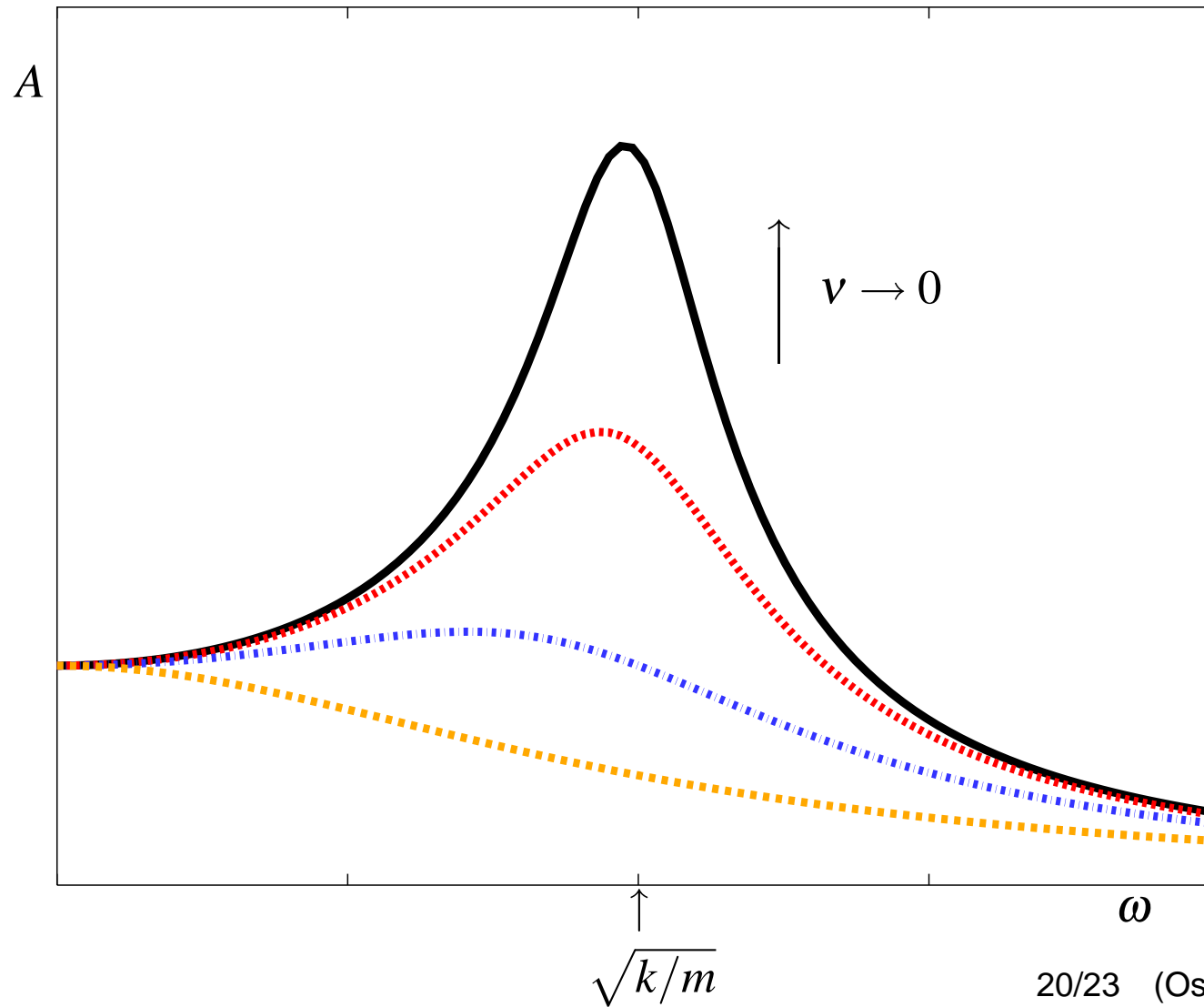
où

$$\omega_r := \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{v^2}{2m^2}}$$

Remarquons que, lorsque $v \rightarrow 0$,

$$\max A \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \omega_r \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Courbes $\omega \mapsto A(\omega)$ pour différentes valeurs de ν .



Tacoma bridge





