Équations différentielles

S. BRIDOUX

1 EDO

Une *équation différentielle ordinaire (EDO) linéaire d'ordre k à coefficients constants* est du type

$$\big(p(\partial)u\big)(x) := \sum_{i=0}^{k} a_i \partial_x^i u(x) = f(x) \tag{1}$$

- ordinaire : on dérive par rapport à une seule variable,
- linéaire : l'opérateur $p(\partial) : u \mapsto \sum_{i=0}^{k} a_i \partial_x^i u$ est linéaire,
- ordre k : $a_k \neq 0$,
- coefficients constants : $\forall i = 0, \ldots, k,\ a_i \in \mathbb{C}$.

Résoudre (1), c'est trouver les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, k fois dérivables et qui satisfont (1) pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'équation obtenue en remplaçant f par 0 dans (1) est l'*équation homogène* associée à (1). La résolution d'une EDO linéaire se décompose en deux étapes :

- résoudre l'équation homogène (EH) $p(\partial)u = 0$,
- trouver une solution particulière u_p de (1).

Alors, toute solution de (1) sera de la forme $u(x) = u_p(x) + u_0(x)$ où u_0 est solution de l'EH.

2 Équation homogène : $p(\partial)u = 0$

Considérons *le polynôme caractéristique* associé à l'EH :

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les racines *distinctes* de p et $m_1, \ldots, m_k$ sont leurs multiplicités respectives.

L'intérêt du polynôme caractéristique est que sa factorisation se répercute sur l'opérateur différentiel $p(\partial)$, càd

$$p(\partial) = \prod_{i=1}^{k} (\partial - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i}$$

où le produit doit être compris comme une composition. On peut donc écrire $p(\partial)u = 0 \iff \prod_{i=1}^{k} (\partial - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} u = 0$.

- Tout d'abord, on résoud $(\partial - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} u = 0$.
  On obtient que u est solution ssi $u(x) = p_i(x) e^{\lambda_i x}$ avec $\deg p_i < m_i$.
- Ensuite, on prouve que $u(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x) e^{\lambda_i x}$ est solution de l'EH (*principe de superposition*).

Il reste à prouver qu'on a toutes les solutions.

2.1 Étude de l'ensemble $E^{d,\mu}$

$$\begin{aligned} E^{d,\mu} &:= \left\{ q(x) e^{\mu x} : \deg q \leqslant d \right\} = \left\{ u : (\partial - \mu \mathbb{1})^{d+1} u = 0 \right\} \\ &= \left\{ u = \sum_{i=0}^{d} q_i (x^i e^{\mu x}) : q_i \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{ssev}\left\{ x^i e^{\mu x} : i = 0, \ldots, d \right\} \end{aligned}$$

Comme $(x^i e^{\mu x})_{i=0}^{d}$ est une base de $E^{d,\mu}$, on a $\dim E^{d,\mu} = d + 1$.

2.2 Étude de $(\partial - \lambda \mathbb{1}) : E^{d,\mu} \to E^{d,\mu}$, avec $\mu \neq \lambda$

1. C'est une application linéaire.
2. C'est une bijection. Pour le montrer, on utilise les résultats suivants d'algèbre linéaire :

- $(\partial - \lambda \mathbb{1})$ *injectif* $\Leftrightarrow \ker(\partial - \lambda \mathbb{1}) = \{0\} \Leftrightarrow \dim \ker(\partial - \lambda \mathbb{1}) = 0$
- $(\partial - \lambda \mathbb{1})$ *surjectif* $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\partial - \lambda \mathbb{1}) = E^{d,\mu} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}(\partial - \lambda \mathbb{1}) = \dim E^{d,\mu}$
- $\dim E^{d,\mu} = \dim \ker(\partial - \lambda \mathbb{1}) + \dim \mathrm{Im}(\partial - \lambda \mathbb{1})$

On a donc

$$\begin{aligned}(\partial-\lambda\mathbb{1}) \text{ surjectif} &\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(\partial-\lambda\mathbb{1}) = \dim E^{d,\mu} \\ &\Leftrightarrow \dim\ker(\partial-\lambda\mathbb{1}) = 0 \Leftrightarrow (\partial-\lambda\mathbb{1}) \text{ injectif.}\end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que $(\partial-\lambda\mathbb{1})$ est injectif, càd $(\partial-\lambda\mathbb{1})u = 0 \Rightarrow u = 0$.

3. Conséquence : par composition, l'application $(\partial-\lambda\mathbb{1})^m : E^{d,\mu} \to E^{d,\mu}$, avec $\mu \neq \lambda$ est aussi une bijection.

2.3 $\sum_{i=1}^{k} p_i e^{\lambda_i x}$ sont toutes les solutions de l'EH

ESQUISSE DE PREUVE. Par récurrence sur le nombre k de facteurs de $\prod_{i=1}^{k}(\partial-\lambda_i\mathbb{1})^{m_i}$.

Pour $k = 1$, c'est OK.

Il reste donc à prouver que si c'est vrai pour k facteurs, alors c'est vrai pour $k+1$ facteurs. Autrement dit, les solutions de $\prod_{i=1}^{k+1}(\partial-\lambda_i\mathbb{1})^{m_i}u = 0$ sont $\sum_{i=1}^{k+1} p_i e^{\lambda_i x}$. Nous pouvons écrire :

$$\prod_{i=1}^{k+1}(\partial-\lambda_i\mathbb{1})^{m_i}u = 0 \Leftrightarrow \prod_{i=2}^{k+1}(\partial-\lambda_i\mathbb{1})^{m_i}\underbrace{(\partial-\lambda_1\mathbb{1})^{m_1}u}_{=:v} = 0. \tag{2}$$

Par hypothèse de récurrence : $v(x) = \sum_{i=2}^{k+1} p_i e^{\lambda_i x}$.

Il reste donc à résoudre : $(\partial-\lambda_1\mathbb{1})^{m_1}u = \sum_{i=2}^{k+1} p_i e^{\lambda_i x}$.

- Nous avons déjà résolu l'EH. Toute solution est de la forme $u(x) = p_1(x)e^{\lambda_1 x}$.
- Par le principe de superposition, il suffit de trouver une solution particulière de l'équation $(\partial-\lambda_1\mathbb{1})^{m_1}u = p_i e^{\lambda_i x}$. Remarquons que $p_i e^{\lambda_i x} \in E^{m_i-1,\lambda_i}$. D'autre part, nous savons que l'application $(\partial-\lambda_1\mathbb{1})^{m_1} : E^{m_i-1,\lambda_i} \to E^{m_i-1,\lambda_i}$ est bijective si $\lambda_i \neq \lambda_1$, ce qui est bien le cas. Cette application est donc en particulier surjective. Ainsi, il existe un élément u_i dans E^{m_i-1,λ_i} tel que $(\partial-\lambda_1\mathbb{1})^{m_1}u_i = p_i e^{\lambda_i x}$, càd $u_i = q_i e^{\lambda_i x}$ avec $\deg q_i \leqslant m_i - 1$.

Les solutions de (2) sont donc de la forme :

$$u(x) = p_1(x)e^{\lambda_1 x} + \sum_{i=2}^{k+1} q_i(x)e^{\lambda_i x}$$

où $\deg p_1 < m_1$, et $\forall i = 1, \ldots, k+1,\ \deg p_i < m_i$, càd

$$u(x) = \sum_{i=1}^{k+1} q_i(x)e^{\lambda_i x}$$

où $\forall i = 1, \dots, k+1,\ \deg q_i < m_i$ et où on a posé $q_1 = p_1$.

En conclusion, toutes les solutions complexes de l'EH $p(\partial)u = 0$ sont de la forme $u(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x) e^{\lambda_i x}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les racines distinctes de p de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_k$ et $\forall i = 1, \dots, k,\ \deg p_i < m_i$.

3 Solution particulière de $p(\partial)u = f(x)$

On suppose que $f(x) = q(x)e^{\mu x}$, càd $f(x) \in E^{d,\mu}$ avec $d = \deg q$.

3.1 μ n'est pas racine du polynôme caractéristique

On veut donc résoudre

$$\prod_{i=1}^{k} (\partial - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} u = q(x) e^{\mu x}$$

où $\forall i = 1, \dots, k,\ \mu \neq \lambda_i$.

PROPRIÉTÉ : Il existe une solution particulière de la forme $r(x)e^{\mu x}$ où $\deg r \leqslant \deg q$.

IDÉE : On sait que $(\partial - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} : E^{d,\mu} \to E^{d,\mu}$ est une bijection si $\mu \neq \lambda_i$ pour tout i. Par composition, $\prod_{i=1}^{k} (\partial - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} : E^{d,\mu} \to E^{d,\mu}$ est aussi une bijection. Puisque $q(x)e^{\mu x} \in E^{d,\mu}$, il existe donc un unique élément $r(x)e^{\mu x}$ dans $E^{d,\mu}$ tel que $\prod_{i=1}^{k} (\partial - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} \big(r(x)e^{\mu x}\big) = q(x)e^{\mu x}$.

CONCLUSION : Les solutions de $p(\partial)u = q(x)e^{\mu x}$ où μ n'est pas racine de p sont

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(x) e^{\lambda_i x} + r(x) e^{\mu x}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les racines distinctes de p de multiplicités $m_1, \dots, m_k$, $\deg p_i < m_i$, et $\deg r \leqslant \deg q$.

Remarquons que, par le principe de superposition, les solutions de $p(\partial)u = \sum_{j=1}^{l} q_j e^{\mu_j x}$, où $\mu_j \neq \lambda_i$ pour tout i, sont de la forme $\sum_{i=1}^{k} p_i e^{\lambda_i x} + \sum_{i=1}^{l} r_j e^{\mu_j x}$ où $r_j e^{\mu_j x}$ est une solution particulière de $p(\partial)u = q_j e^{\mu_j x}$.

3.2 μ est racine du polynôme caractéristique

Comme précédemment, on considère l'application $(\partial - \lambda \mathbb{1})^m : E^{d,\mu} \to E^{d,\mu}$. L'idée est d'essayer une solution particulière de la forme $r(x)e^{\lambda x}$. Le problème vient du fait que $(\partial - \lambda \mathbb{1})^m \big(r(x)e^{\lambda x}\big) = \big(\partial^m r(x)\big)e^{\lambda x}$ et $\deg(\partial^m r) \leqslant d - m$. On n'est donc sûr de ne pas avoir $\mathrm{Im}(\partial - \lambda \mathbb{1})^m = E^{d,\mu}$. On essaie alors une solution de la forme $x^m r(x)e^{\lambda x}$ où $\deg r \leqslant d - m$. La question qui se pose alors est : l'application $(\partial - \lambda \mathbb{1})^m : x^m r(x)e^{\lambda x} \to q(x)e^{\lambda x}$ est-elle une bijection ?

On définit $E^{m,d,\lambda} = \{x^m r(x)e^{\lambda x} : \deg r \leqslant d\}$. Une base de $E^{m,d,\lambda}$ est $x^m e^{\lambda x}, x^m x e^{\lambda x}, \ldots, x^m x^d e^{\lambda x}$. Donc, $\dim E^{m,d,\lambda} = d + 1$. D'autre part, $E^{0,d,\lambda} = E^{d,\lambda}$.

On montre alors que l'application $(\partial - \lambda \mathbb{1}) : E^{m,d,\lambda} \to E^{m-1,d,\lambda}$ est une bijection.

Propriété : il existe une solution particulière de l'équation $(\partial - \lambda \mathbb{1})^m u = q(x)e^{\lambda x}$ de la forme $x^m r(x)e^{\lambda x}$ où $\deg r \leqslant \deg q = d$.

Idée de preuve :

$$\begin{array}{ccccccccc} E^{m,d,\lambda} & \xrightarrow{\partial - \lambda \mathbb{1}} & E^{m-1,d,\lambda} & \xrightarrow{\partial - \lambda \mathbb{1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial - \lambda \mathbb{1}} & E^{1,d,\lambda} & \xrightarrow{\partial - \lambda \mathbb{1}} & E^{d,\lambda} \\ x^m r_m e^{\lambda x} & \mapsto & x^{m-1} r_{m-1} e^{\lambda x} & \mapsto & \cdots & \mapsto & x r_1 e^{\lambda x} & \mapsto & q e^{\lambda x} \end{array}$$

Ainsi, l'application $(\partial - \lambda \mathbb{1})^m : E^{m,d,\lambda} \to E^{d,\lambda}$ est une bijection. La surjectivité implique que pour tout $q(x)e^{\lambda x}$ dans $E^{d,\lambda}$, il existe un élément $u = x^m r(x)e^{\lambda x}$ dans $E^{m,d,\lambda}$ tel que $(\partial - \lambda \mathbb{1})^m u = q(x)e^{\lambda x}$.

Propriété : Une solution particulière de l'EDO $p(\partial)u = q(x)e^{\mu x}$ existe et est de la forme $x^m r(x)e^{\mu x}$ où $\deg r \leqslant \deg q$ et m est la multiplicité de μ comme racine de p.

Idée de preuve :

- μ n'est pas racine de p : ok.
- Soit $\mu = \lambda_1$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les racines de p de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$. On peut écrire : $p(\partial)u = \prod_{i=2}^{k} (\partial - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} (\partial - \lambda_1 \mathbb{1})^{m_1} u$.

$$E^{m_1,d,\lambda_1} \xrightarrow{(\partial - \lambda_1 \mathbb{1})^{m_1}} E^{d,\lambda_1} \xrightarrow[\lambda_2 \neq \lambda_1]{(\partial - \lambda_2 \mathbb{1})^{m_2}} E^{d,\lambda_1} \xrightarrow[\lambda_3 \neq \lambda_1]{(\partial - \lambda_3 \mathbb{1})^{m_3}} \cdots \xrightarrow[\lambda_k \neq \lambda_1]{(\partial - \lambda_k \mathbb{1})^{m_k}} E^{d,\lambda_1}$$

où toutes les applications sont des bijections.