

Comment évaluer un polynôme ?

`Christophe.Troestler@umh.ac.be`

`http://www.umh.ac.be/math/an/`

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

{

Évolution des « cases » mémoire :

r =

p =

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

1: $r \leftarrow 13$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{13}}$$

$$p =$$

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions {
2: p ← 11

1: r ← 13

Évolution des « cases » mémoire :

r = $\overset{1}{\boxed{13}}$
p = $\boxed{11}$

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

2: $p \leftarrow 11$

1: $r \leftarrow 13$

3: $r \leftarrow r + 9 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3
$r =$	13		112
$p =$		11	

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions {
2: $p \leftarrow 11$
4: $p \leftarrow 11$

1: $r \leftarrow 13$
3: $r \leftarrow r + 9 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4
$r =$	13		112	
$p =$		11		11

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

1: $r \leftarrow 13$
2: $p \leftarrow 11$
3: $r \leftarrow r + 9 \cdot p$
4: $p \leftarrow 11$
5: $p \leftarrow p \cdot 11$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5
$r =$	13		112		
$p =$		11		11	121

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

1: $r \leftarrow 13$		
2: $p \leftarrow 11$	3: $r \leftarrow r + 9 \cdot p$	
4: $p \leftarrow 11$	5: $p \leftarrow p \cdot 11$	6: $r \leftarrow r + 5 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

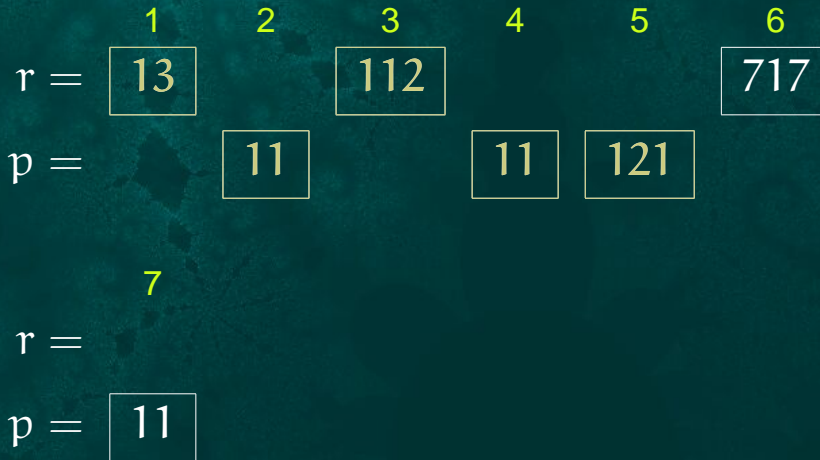
	1	2	3	4	5	6
r =	13		112			717
p =		11		11	121	

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

2: $p \leftarrow 11$					1: $r \leftarrow 13$
4: $p \leftarrow 11$	5: $p \leftarrow p \cdot 11$				3: $r \leftarrow r + 9 \cdot p$
7: $p \leftarrow 11$					6: $r \leftarrow r + 5 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :



1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

2: $p \leftarrow 11$					1: $r \leftarrow 13$
4: $p \leftarrow 11$	5: $p \leftarrow p \cdot 11$				3: $r \leftarrow r + 9 \cdot p$
7: $p \leftarrow 11$	8: $p \leftarrow p \cdot 11$				6: $r \leftarrow r + 5 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :



1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions {

2: $p \leftarrow 11$					1: $r \leftarrow 13$
4: $p \leftarrow 11$	5: $p \leftarrow p \cdot 11$				3: $r \leftarrow r + 9 \cdot p$
7: $p \leftarrow 11$	8: $p \leftarrow p \cdot 11$	9: $p \leftarrow p \cdot 11$			6: $r \leftarrow r + 5 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :



1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

2: $p \leftarrow 11$					1: $r \leftarrow 13$
4: $p \leftarrow 11$	5: $p \leftarrow p \cdot 11$				3: $r \leftarrow r + 9 \cdot p$
7: $p \leftarrow 11$	8: $p \leftarrow p \cdot 11$	9: $p \leftarrow p \cdot 11$			6: $r \leftarrow r + 5 \cdot p$
					10: $r \leftarrow r + 7 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :



2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions



Évolution des « cases » mémoire :

r =

p =

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

$$1: r \leftarrow a_0$$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{a_0}}$$

$$p =$$

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions $\left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x \end{array} \right.$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{a_0}}$$

$$p = \overset{2}{\boxed{x}}$$

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions {
2: $p \leftarrow x$

1: $r \leftarrow a_0$

3: $r \leftarrow r + a_1 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3
$r =$	a_0		$a_0 + a_1x$
$p =$		x	

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

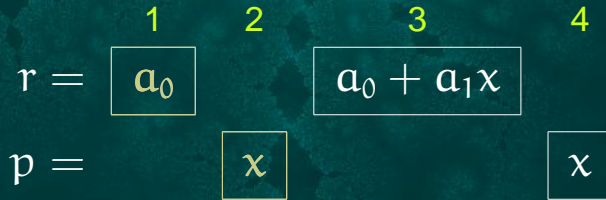
Instructions {

- 2: $p \leftarrow x$
- 4: $p \leftarrow x$

1: $r \leftarrow a_0$

3: $r \leftarrow r + a_1 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :



2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

1:	$r \leftarrow a_0$
2:	$p \leftarrow x$
3:	$r \leftarrow r + a_1 \cdot p$
4:	$p \leftarrow x$
5:	$p \leftarrow p \cdot x$

Évolution des « cases » mémoire :

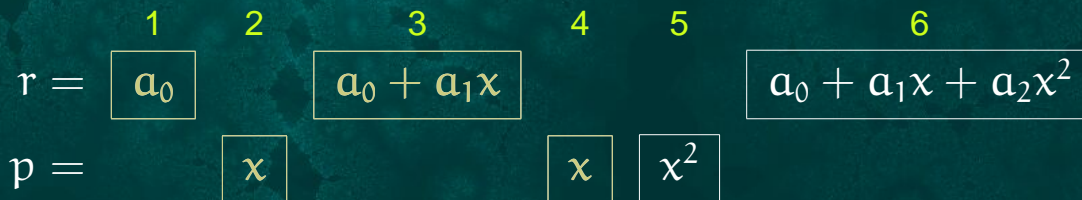
	1	2	3	4	5
r =	a_0		$a_0 + a_1x$		
p =		x		x	x^2

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

1:	$r \leftarrow a_0$
2:	$p \leftarrow x$
3:	$r \leftarrow r + a_1 \cdot p$
4:	$p \leftarrow x$
5:	$p \leftarrow p \cdot x$
6:	$r \leftarrow r + a_2 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

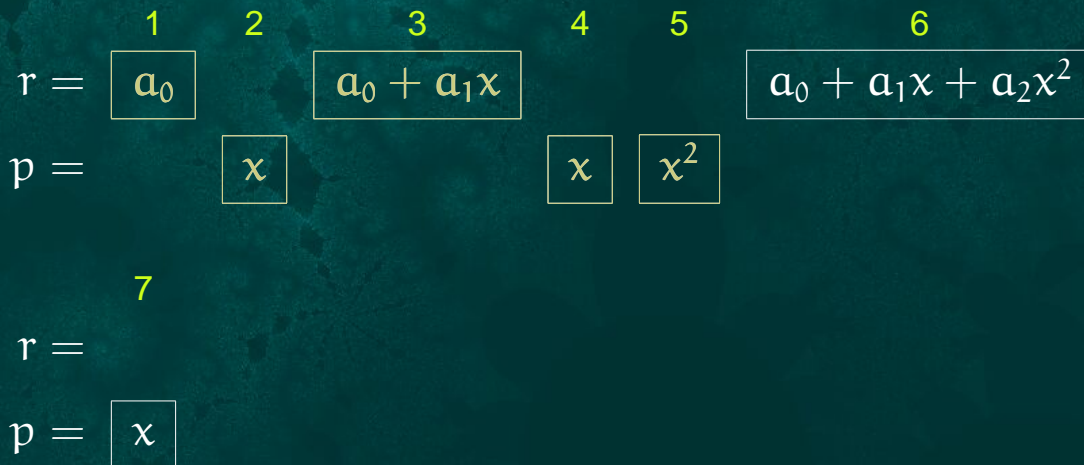


2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

1:	$r \leftarrow a_0$	
2:	$p \leftarrow x$	
3:	$r \leftarrow r + a_1 \cdot p$	
4:	$p \leftarrow x$	5: $p \leftarrow p \cdot x$
6:	$r \leftarrow r + a_2 \cdot p$	
7:	$p \leftarrow x$	

Évolution des « cases » mémoire :

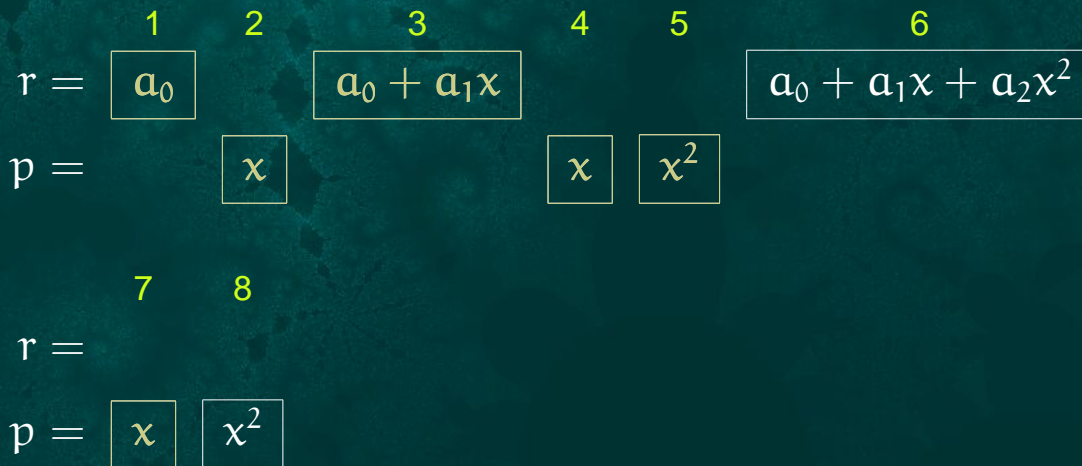


2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

2: $p \leftarrow x$		1: $r \leftarrow a_0$
4: $p \leftarrow x$	5: $p \leftarrow p \cdot x$	3: $r \leftarrow r + a_1 \cdot p$
7: $p \leftarrow x$	8: $p \leftarrow p \cdot x$	6: $r \leftarrow r + a_2 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

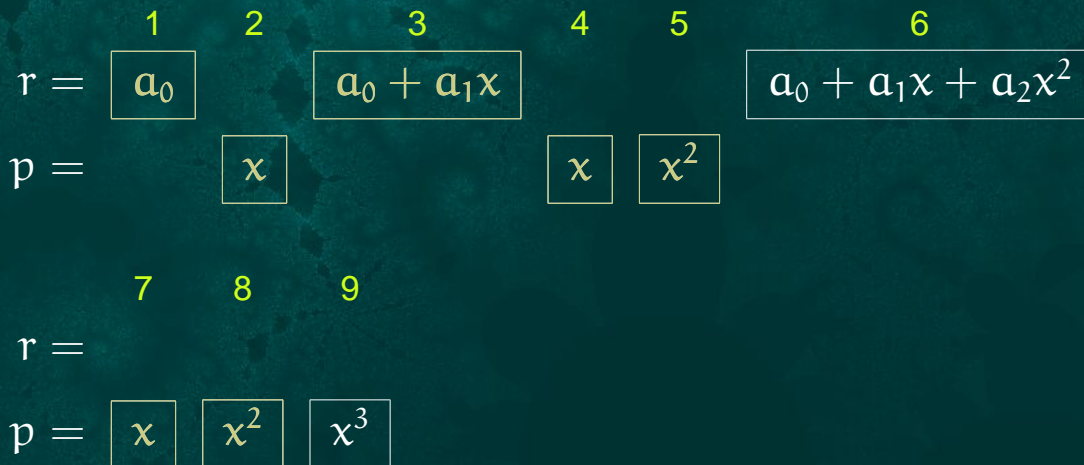


2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

1: $r \leftarrow a_0$		
2: $p \leftarrow x$		3: $r \leftarrow r + a_1 \cdot p$
4: $p \leftarrow x$	5: $p \leftarrow p \cdot x$	6: $r \leftarrow r + a_2 \cdot p$
7: $p \leftarrow x$	8: $p \leftarrow p \cdot x$	9: $p \leftarrow p \cdot x$

Évolution des « cases » mémoire :

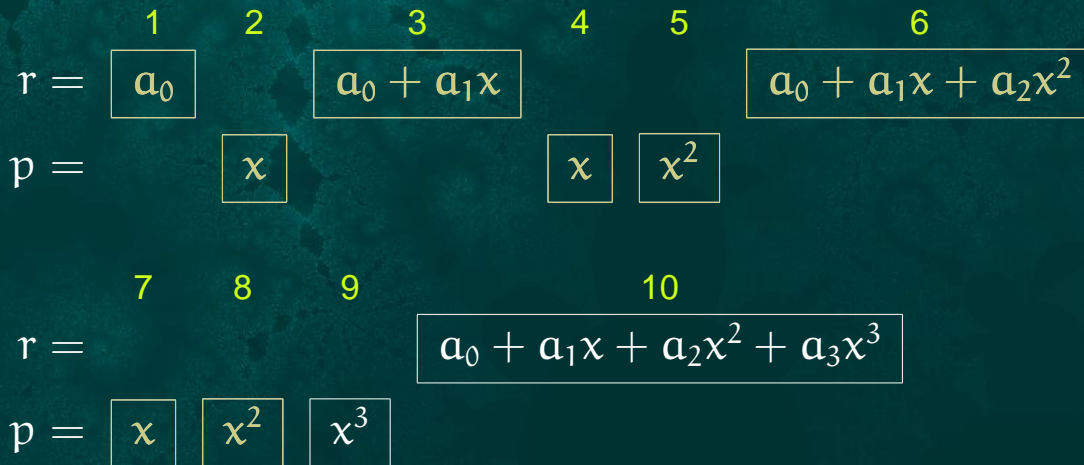


2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

{	2: $p \leftarrow x$			1: $r \leftarrow a_0$
	4: $p \leftarrow x$	5: $p \leftarrow p \cdot x$		3: $r \leftarrow r + a_1 \cdot p$
	7: $p \leftarrow x$	8: $p \leftarrow p \cdot x$	9: $p \leftarrow p \cdot x$	6: $r \leftarrow r + a_2 \cdot p$
				10: $r \leftarrow r + a_3 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :



3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions {

Évolution des « cases » mémoire :

r =

p =

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions { $1: r \leftarrow a_0$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{a_0}}$$

$$p =$$

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions $\left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x \end{array} \right.$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2
r =	a_0	
p =		x

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

1:	$r \leftarrow a_0$
2:	$p \leftarrow x$
3:	$r \leftarrow r + a_1 \cdot p$

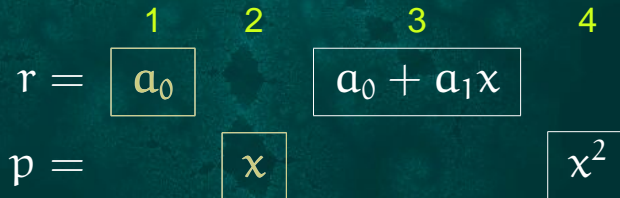
Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3
$r =$	a_0		$a_0 + a_1x$
$p =$		x	

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions $\left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x \\ 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ 4: p \leftarrow p \cdot x \end{array} \right.$

Évolution des « cases » mémoire :

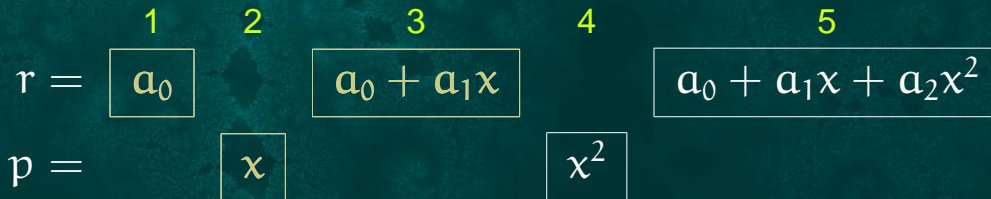


3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

1:	$r \leftarrow a_0$
2:	$p \leftarrow x$
3:	$r \leftarrow r + a_1 \cdot p$
4:	$p \leftarrow p \cdot x$
5:	$r \leftarrow r + a_2 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

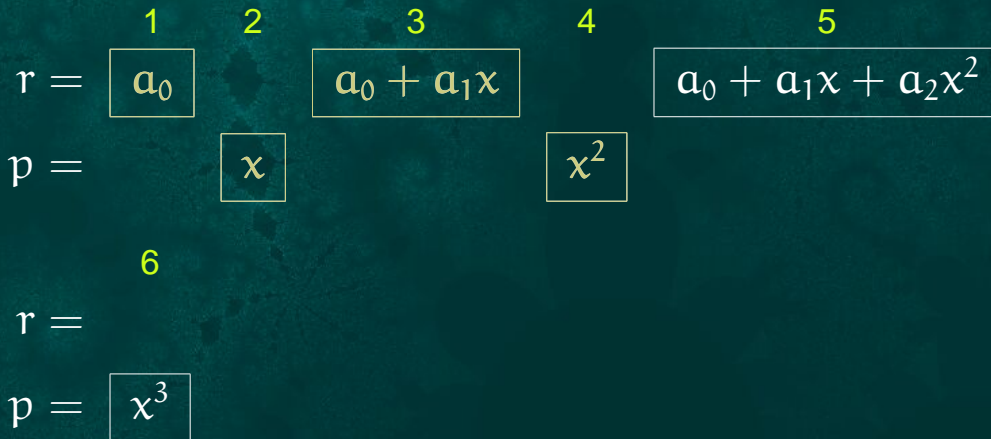


3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

1:	$r \leftarrow a_0$
2:	$p \leftarrow x$
3:	$r \leftarrow r + a_1 \cdot p$
4:	$p \leftarrow p \cdot x$
5:	$r \leftarrow r + a_2 \cdot p$
6:	$p \leftarrow p \cdot x$

Évolution des « cases » mémoire :

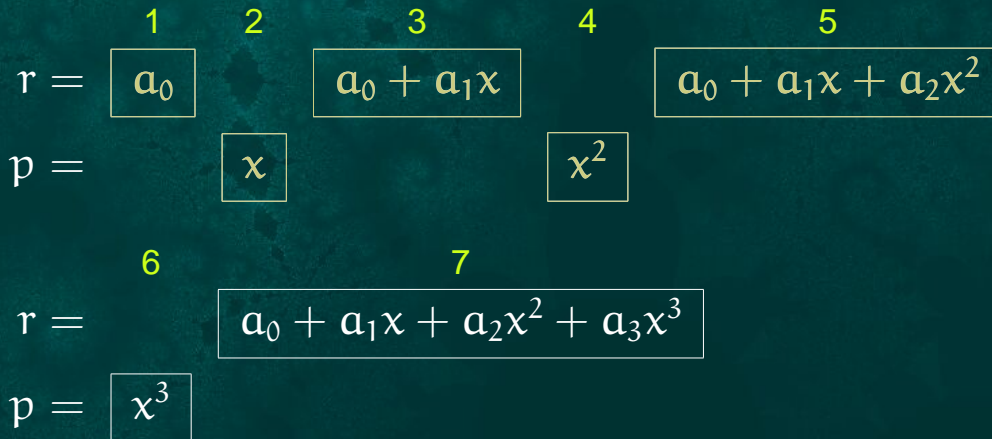


3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

1: $r \leftarrow a_0$	
2: $p \leftarrow x$	3: $r \leftarrow r + a_1 \cdot p$
4: $p \leftarrow p \cdot x$	5: $r \leftarrow r + a_2 \cdot p$
6: $p \leftarrow p \cdot x$	7: $r \leftarrow r + a_3 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :



4. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions {

Évolution des « cases » mémoire :

$r =$

4. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions {
1: $r \leftarrow a_3$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{a_3}}$$

4. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\text{Instructions} \left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_3 \\ 2: r \leftarrow r \cdot x + a_2 \end{array} \right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{a_3}} \quad \overset{2}{\boxed{a_3x + a_2}}$$

4. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\text{Instructions} \left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_3 \\ 2: r \leftarrow r \cdot x + a_2 \\ 3: r \leftarrow r \cdot x + a_1 \end{array} \right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{a_3} & \boxed{a_3x + a_2} & \boxed{a_3x^2 + a_2x + a_1} \end{array}$$

4. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\text{Instructions} \left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_3 \\ 2: r \leftarrow r \cdot x + a_2 \\ 3: r \leftarrow r \cdot x + a_1 \\ 4: r \leftarrow r \cdot x + a_0 \end{array} \right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{a_3}} \quad \overset{2}{\boxed{a_3x + a_2}} \quad \overset{3}{\boxed{a_3x^2 + a_2x + a_1}} \quad \overset{4}{\boxed{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}}$$

5. Remarques

- *programmation impérative* : modification de mémoires (C, C++, Java, Fortran, Perl,...) ;
- programmation fonctionnelle : les données sont transformées par des fonctions (Lisp, ML, Ocaml, Haskell,...) ;
- programmation logique : contraintes par des formules logiques (Prolog).

Seul le paradigme de programmation impérative sera abordé.

6. Répétitions

$$P_1 : \left\{ \begin{array}{ll} 1: r \leftarrow a_0 & \\ 2: p \leftarrow x & 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ 4: p \leftarrow p \cdot x & 5: r \leftarrow r + a_2 \cdot p \\ 6: p \leftarrow p \cdot x & 7: r \leftarrow r + a_3 \cdot p \end{array} \right.$$

$$P_2 : \left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_3 \\ 2: r \leftarrow r \cdot x + a_2 \\ 3: r \leftarrow r \cdot x + a_1 \\ 4: r \leftarrow r \cdot x + a_0 \end{array} \right. \quad (\text{Horner})$$

Il y a des répétitions (on fait plusieurs fois des opérations similaires). Comment exprimer cela de manière plus concise ? Généraliser le processus si on remplace 3 par $n \in \mathbb{N}$.

7. Boucles

$$P_1 : \left\{ \begin{array}{l} p \leftarrow 1; r \leftarrow a_0 \\ \text{Pour } i = 1, 2, 3 \text{ faire} \\ \quad p \leftarrow x; r \leftarrow r + a_i p \\ \text{(la réponse est contenue dans } r) \end{array} \right.$$

$$P_2 : \left\{ \begin{array}{l} r \leftarrow a_3 \\ \text{Pour } i = 2, 1, 0 \text{ faire} \\ \quad r \leftarrow r \cdot x + a_i \\ \text{(la réponse est contenue dans } r) \end{array} \right.$$

7. Boucles

$$P_1 : \left\{ \begin{array}{l} p \leftarrow 1; r \leftarrow a_0 \\ \text{Pour } i = 1, 2, 3 \text{ faire} \\ \quad p \leftarrow x; r \leftarrow r + a_i p \\ \text{(la réponse est contenue dans } r) \end{array} \right.$$

$$P_2 : \left\{ \begin{array}{l} r \leftarrow a_3 \\ \text{Pour } i = 2, 1, 0 \text{ faire} \\ \quad r \leftarrow r \cdot x + a_i \\ \text{(la réponse est contenue dans } r) \end{array} \right.$$

Il est maintenant facile de remplacer 3 par n ...

7. Boucles

$$P_1 : \left\{ \begin{array}{l} p \leftarrow 1; r \leftarrow a_0 \\ \text{Pour } i = 1, 2, \dots, n \text{ faire} \\ \quad p \leftarrow x; r \leftarrow r + a_i p \\ \text{(la réponse est contenue dans } r) \end{array} \right.$$

$$P_2 : \left\{ \begin{array}{l} r \leftarrow a_n \\ \text{Pour } i = n - 1, \dots, 1, 0 \text{ faire} \\ \quad r \leftarrow r \cdot x + a_i \\ \text{(la réponse est contenue dans } r) \end{array} \right.$$

Il est maintenant facile de remplacer 3 par n ... Voyez plutôt !
ATTENTION : Vérifiez que les algorithmes marchent pour $n = 0$.

8. Preuves de programmes

8.1. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$P_1 : \left\{ \begin{array}{l} p \leftarrow 1; r \leftarrow a_0 \\ \langle p = 1 \text{ et } r = a_0 \rangle \\ \text{Pour } i = 1, 2, \dots, n \text{ faire} \\ \quad p \leftarrow x; r \leftarrow r + a_i p \\ \quad \langle p = x^i \text{ et } r = \sum_{j=0}^i a_j x^j \rangle \\ \langle \text{Assertion de la boucle pour } i = n \text{ donc } r = \sum_{j=0}^n a_j x^j \rangle \end{array} \right.$$

8.2. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$P_2 : \left\{ \begin{array}{l} r \leftarrow a_n \\ \langle r = a_n \rangle \\ \text{Pour } i = n - 1, \dots, 1, 0 \text{ faire} \\ \quad r \leftarrow r \cdot x + a_i \\ \quad \langle r = \sum_{j=i}^n a_j x^{j-i} \rangle \\ \langle \text{Assertion de la boucle pour } i = 0 \text{ càd } r = \sum_{j=0}^n a_j x^j \rangle \end{array} \right.$$