Comment évaluer un polynôme ?

Christophe.Troestler@umh.ac.be
http://www.umh.ac.be/math/an/

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

Évolution des « cases » mémoire :

$$r =$$

$$p =$$

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

1 : $r \leftarrow 13$

Évolution des « cases » mémoire :

	1
$r =$	$\boxed{13}$
$p =$	

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions
$$\left\{ \begin{array}{ll} & 1 : r \leftarrow 13 \\ 2 : p \leftarrow 11 & \end{array} \right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ r = & \boxed{13} & \\ p = & & \boxed{11} \end{array}$$

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

1 : $r \leftarrow 13$

2 : $p \leftarrow 11$

3 : $r \leftarrow r + 9 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3
$r =$	$\boxed{13}$		$\boxed{112}$
$p =$		$\boxed{11}$	

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

1 : $r \leftarrow 13$

2 : $p \leftarrow 11$

3 : $r \leftarrow r + 9 \cdot p$

4 : $p \leftarrow 11$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4
$r =$	$\boxed{13}$		$\boxed{112}$	
$p =$		$\boxed{11}$		$\boxed{11}$

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

2 : $p \leftarrow 11$

4 : $p \leftarrow 11$

5 : $p \leftarrow p \cdot 11$

1 : $r \leftarrow 13$

3 : $r \leftarrow r + 9 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5
$r =$	$\boxed{13}$		$\boxed{112}$		
$p =$		$\boxed{11}$		$\boxed{11}$	$\boxed{121}$

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

1 : $r \leftarrow 13$

2 : $p \leftarrow 11$

3 : $r \leftarrow r + 9 \cdot p$

4 : $p \leftarrow 11$

5 : $p \leftarrow p \cdot 11$

6 : $r \leftarrow r + 5 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5	6
$r =$	13		112			717
$p =$		11		11	121	

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

1 : $r \leftarrow 13$
2 : $p \leftarrow 11$
3 : $r \leftarrow r + 9 \cdot p$
4 : $p \leftarrow 11$
5 : $p \leftarrow p \cdot 11$
6 : $r \leftarrow r + 5 \cdot p$
7 : $p \leftarrow 11$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5	6
$r =$	13		112			717
$p =$		11		11	121	

	7
$r =$	
$p =$	11

1. Version « naïve » de l’évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

$$\left\{\begin{array}{lll} & & 1: r \leftarrow 13 \\ 2: p \leftarrow 11 & & 3: r \leftarrow r + 9 \cdot p \\ 4: p \leftarrow 11 & 5: p \leftarrow p \cdot 11 & 6: r \leftarrow r + 5 \cdot p \\ 7: p \leftarrow 11 & 8: p \leftarrow p \cdot 11 & \end{array}\right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5	6
$r =$	$\boxed{13}$		$\boxed{112}$			$\boxed{717}$
$p =$		$\boxed{11}$		$\boxed{11}$	$\boxed{121}$	

	7	8
$r =$		
$p =$	$\boxed{11}$	$\boxed{121}$

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

			1 : $r \leftarrow 13$
2 : $p \leftarrow 11$			3 : $r \leftarrow r + 9 \cdot p$
4 : $p \leftarrow 11$	5 : $p \leftarrow p \cdot 11$		6 : $r \leftarrow r + 5 \cdot p$
7 : $p \leftarrow 11$	8 : $p \leftarrow p \cdot 11$	9 : $p \leftarrow p \cdot 11$	

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5	6
$r =$	13		112			717
$p =$		11		11	121	

	7	8	9
$r =$			
$p =$	11	121	1331

1. Version « naïve » de l'évaluation de $7x^3 + 5x^2 + 9x + 13$ en $x = 11$

Instructions

$$\left\{\begin{array}{llll} & & & 1: r \leftarrow 13 \\ 2: p \leftarrow 11 & & & 3: r \leftarrow r + 9 \cdot p \\ 4: p \leftarrow 11 & 5: p \leftarrow p \cdot 11 & & 6: r \leftarrow r + 5 \cdot p \\ 7: p \leftarrow 11 & 8: p \leftarrow p \cdot 11 & 9: p \leftarrow p \cdot 11 & 10: r \leftarrow r + 7 \cdot p \end{array}\right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5	6
$r =$	$\boxed{13}$		$\boxed{112}$			$\boxed{717}$
$p =$		$\boxed{11}$		$\boxed{11}$	$\boxed{121}$	

	7	8	9	10
$r =$				$\boxed{10034}$
$p =$	$\boxed{11}$	$\boxed{121}$	$\boxed{1331}$	

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions $\left\{ \vphantom{\begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}} \right.$

Évolution des « cases » mémoire :

$r =$

$p =$

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions $\left\{ \vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\\a\end{array}} \right.$

1 : $r \leftarrow a_0$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{a_0}}$$

$$p =$$

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

1 : $r \leftarrow a_0$

2 : $p \leftarrow x$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2
$r =$	$\boxed{a_0}$	
$p =$		$\boxed{x}$

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions
$$\begin{cases} 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x \\ 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \end{cases}$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$
$p =$		$\boxed{x}$	

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

$$\begin{cases} & 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x & \\ & 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ 4: p \leftarrow x & \end{cases}$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$	
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x}$

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

$$\left\{\begin{array}{lll} & & 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x & & 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ 4: p \leftarrow x & 5: p \leftarrow p \cdot x & \end{array}\right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$		
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x}$	$\boxed{x^2}$

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

$$\begin{cases} & & 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x & & 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ 4: p \leftarrow x & 5: p \leftarrow p \cdot x & 6: r \leftarrow r + a_2 \cdot p \end{cases}$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5	6
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$			$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2}$
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x}$	$\boxed{x^2}$	

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

$$\begin{cases} & & 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x & & 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ 4: p \leftarrow x & 5: p \leftarrow p \cdot x & 6: r \leftarrow r + a_2 \cdot p \\ 7: p \leftarrow x & & \end{cases}$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5	6
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$			$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2}$
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x}$	$\boxed{x^2}$	

	7
$r =$	
$p =$	$\boxed{x}$

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

1 : $r \leftarrow a_0$

2 : $p \leftarrow x$

3 : $r \leftarrow r + a_1 \cdot p$

4 : $p \leftarrow x$ 5 : $p \leftarrow p \cdot x$

6 : $r \leftarrow r + a_2 \cdot p$

7 : $p \leftarrow x$ 8 : $p \leftarrow p \cdot x$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5	6
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$			$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2}$
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x}$	$\boxed{x^2}$	

	7	8
$r =$		
$p =$	$\boxed{x}$	$\boxed{x^2}$

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

$$\left\{\begin{array}{llll} & & & 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x & & & 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ 4: p \leftarrow x & 5: p \leftarrow p \cdot x & & 6: r \leftarrow r + a_2 \cdot p \\ 7: p \leftarrow x & 8: p \leftarrow p \cdot x & 9: p \leftarrow p \cdot x & \end{array}\right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5	6
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$			$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2}$
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x}$	$\boxed{x^2}$	

	7	8	9
$r =$			
$p =$	$\boxed{x}$	$\boxed{x^2}$	$\boxed{x^3}$

2. Version « naïve » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

			1 : $r \leftarrow a_0$
2 : $p \leftarrow x$			3 : $r \leftarrow r + a_1 \cdot p$
4 : $p \leftarrow x$	5 : $p \leftarrow p \cdot x$		6 : $r \leftarrow r + a_2 \cdot p$
7 : $p \leftarrow x$	8 : $p \leftarrow p \cdot x$	9 : $p \leftarrow p \cdot x$	10 : $r \leftarrow r + a_3 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5	6
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$			$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2}$
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x}$	$\boxed{x^2}$	

	7	8	9	10
$r =$				$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}$
$p =$	$\boxed{x}$	$\boxed{x^2}$	$\boxed{x^3}$	

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions $\left\{ \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right.$

Évolution des « cases » mémoire :

$r =$

$p =$

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions $\left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_0 \end{array} \right.$

Évolution des « cases » mémoire :

$$\begin{array}{ll} & 1 \\ r = & \boxed{a_0} \\ p = & \end{array}$$

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions $\left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x \end{array} \right.$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2
$r =$	$\boxed{a_0}$	
$p =$		$\boxed{x}$

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions
$$\left\{ \begin{array}{ll} & 1 : r \leftarrow a_0 \\ 2 : p \leftarrow x & 3 : r \leftarrow r + a_1 \cdot p \end{array} \right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$
$p =$		$\boxed{x}$	

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions
$$\begin{cases} & 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x & 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ 4: p \leftarrow p \cdot x & \end{cases}$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$	
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x^2}$

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

	1 : $r \leftarrow a_0$
2 : $p \leftarrow x$	3 : $r \leftarrow r + a_1 \cdot p$
4 : $p \leftarrow p \cdot x$	5 : $r \leftarrow r + a_2 \cdot p$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$		$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2}$
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x^2}$	

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions
$$\left\{\begin{array}{ll} & 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x & 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ 4: p \leftarrow p \cdot x & 5: r \leftarrow r + a_2 \cdot p \\ 6: p \leftarrow p \cdot x & \end{array}\right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$		$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2}$
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x^2}$	

	6
$r =$	
$p =$	$\boxed{x^3}$

3. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions

$$\begin{cases} & 1: r \leftarrow a_0 \\ 2: p \leftarrow x & 3: r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ 4: p \leftarrow p \cdot x & 5: r \leftarrow r + a_2 \cdot p \\ 6: p \leftarrow p \cdot x & 7: r \leftarrow r + a_3 \cdot p \end{cases}$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2	3	4	5
$r =$	$\boxed{a_0}$		$\boxed{a_0 + a_1x}$		$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2}$
$p =$		$\boxed{x}$		$\boxed{x^2}$	

	6	7
$r =$		$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}$
$p =$	$\boxed{x^3}$	

4. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions $\left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}} \right.$

Évolution des « cases » mémoire :

$r =$

4. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions $\left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_3 \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{a_3}}$$

4. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions
$$\left\{ \begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_3 \\ 2: r \leftarrow r \cdot x + a_2 \\ \\ \end{array} \right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

	1	2
$r =$	a_3	$a_3x + a_2$

4. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions
$$\left\{\begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_3 \\ 2: r \leftarrow r \cdot x + a_2 \\ 3: r \leftarrow r \cdot x + a_1 \end{array}\right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{a_3}} \quad \overset{2}{\boxed{a_3x + a_2}} \quad \overset{3}{\boxed{a_3x^2 + a_2x + a_1}}$$

4. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Instructions
$$\left\{\begin{array}{l} 1: r \leftarrow a_3 \\ 2: r \leftarrow r \cdot x + a_2 \\ 3: r \leftarrow r \cdot x + a_1 \\ 4: r \leftarrow r \cdot x + a_0 \end{array}\right.$$

Évolution des « cases » mémoire :

$$r = \overset{1}{\boxed{a_3}} \quad \overset{2}{\boxed{a_3x + a_2}} \quad \overset{3}{\boxed{a_3x^2 + a_2x + a_1}} \quad \overset{4}{\boxed{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}}$$

5. Remarques

– *programmation impérative* : modification de mémoires (C, C++, Java, Fortran, Perl,...) ;
– programmation fonctionnelle : les données sont transformées par des fonctions (Lisp, ML, Ocaml, Haskell,...) ;
– programmation logique : contraintes par des formules logiques (Prolog).

Seul le paradigme de programmation impérative sera abordé.

6. Répétitions

$$P_1 : \begin{cases} & {}_{1:}\ r \leftarrow a_0 \\ {}_{2:}\ p \leftarrow x & {}_{3:}\ r \leftarrow r + a_1 \cdot p \\ {}_{4:}\ p \leftarrow p \cdot x & {}_{5:}\ r \leftarrow r + a_2 \cdot p \\ {}_{6:}\ p \leftarrow p \cdot x & {}_{7:}\ r \leftarrow r + a_3 \cdot p \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} {}_{1:}\ r \leftarrow a_3 \\ {}_{2:}\ r \leftarrow r \cdot x + a_2 \\ {}_{3:}\ r \leftarrow r \cdot x + a_1 \\ {}_{4:}\ r \leftarrow r \cdot x + a_0 \end{cases} \qquad \text{(Horner)}$$

Il y a des répétitions (on fait plusieurs fois des opérations similaires). Comment exprimer cela de manière plus concise ? Généraliser le processus si on remplace 3 par $n \in \mathbb{N}$.

7. Boucles

$$P_1 : \begin{cases} p \leftarrow 1;\ r \leftarrow a_0 \\ \text{Pour } i = 1,2,3 \text{ faire} \\ \qquad p \leftarrow x;\ r \leftarrow r + a_i p \\ \text{(la réponse est contenue dans } r\text{)} \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} r \leftarrow a_3 \\ \text{Pour } i = 2,1,0 \text{ faire} \\ \qquad r \leftarrow r \cdot x + a_i \\ \text{(la réponse est contenue dans } r\text{)} \end{cases}$$

7. Boucles

$$P_1 : \begin{cases} p \leftarrow 1;\ r \leftarrow a_0 \\ \text{Pour } i = 1, 2, 3 \text{ faire} \\ \qquad p \leftarrow x;\ r \leftarrow r + a_i p \\ \text{(la réponse est contenue dans } r\text{)} \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} r \leftarrow a_3 \\ \text{Pour } i = 2, 1, 0 \text{ faire} \\ \qquad r \leftarrow r \cdot x + a_i \\ \text{(la réponse est contenue dans } r\text{)} \end{cases}$$

Il est maintenant facile de remplacer 3 par n...

7. Boucles

$$P_1 : \begin{cases} p \leftarrow 1;\ r \leftarrow a_0 \\ \text{Pour } i = 1, 2, \ldots, n \text{ faire} \\ \qquad p \leftarrow x;\ r \leftarrow r + a_i p \\ \text{(la réponse est contenue dans } r\text{)} \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} r \leftarrow a_n \\ \text{Pour } i = n-1, \ldots, 1, 0 \text{ faire} \\ \qquad r \leftarrow r \cdot x + a_i \\ \text{(la réponse est contenue dans } r\text{)} \end{cases}$$

Il est maintenant facile de remplacer 3 par n... Voyez plutôt !
ATTENTION : Vérifiez que les algorithmes marchent pour $n = 0$.

8. Preuves de programmes

8.1. Version « améliorée » de l'évaluation de $a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$P_1 : \begin{cases} p \leftarrow 1;\ r \leftarrow a_0 \\ \langle p = 1 \text{ et } r = a_0 \rangle \\ \text{Pour } i = 1, 2, \ldots, n \text{ faire} \\ \qquad p \leftarrow x;\ r \leftarrow r + a_i p \\ \qquad \left\langle p = x^i \text{ et } r = \sum_{j=0}^{i} a_j x^j \right\rangle \\ \left\langle \text{Assertion de la boucle pour } i = n \text{ donc } r = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right\rangle \end{cases}$$

8.2. Méthode de Horner pour l'évaluation de $a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$P_2 : \left\{ \begin{array}{l} r \leftarrow a_n \\ \langle r = a_n \rangle \\ \text{Pour } i = n-1, \ldots, 1, 0 \text{ faire} \\ \qquad r \leftarrow r \cdot x + a_i \\ \qquad \left\langle r = \sum_{j=i}^{n} a_j x^{j-i} \right\rangle \\ \left\langle \text{Assertion de la boucle pour } i = 0 \text{ càd } r = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right\rangle \end{array} \right.$$