

Les ordinateurs calculent-ils juste ?

Christophe TROESTLER

Christophe.Troestler@umh.ac.be

Les ordinateurs calculent-ils juste ?

- Représentation binaire des nombres entiers
 - *deux symboles en valent bien dix !*

Les ordinateurs calculent-ils juste ?

- Représentation binaire des nombres entiers
— *deux symboles en valent bien dix !*
- Codage des nombres entiers par une machine
— *ou comment les ordinateurs parlent de 0, 1, 2, 3,...*

Les ordinateurs calculent-ils juste ?

- Représentation binaire des nombres entiers
 - *deux symboles en valent bien dix !*
- Codage des nombres entiers par une machine
 - *ou comment les ordinateurs parlent de 0, 1, 2, 3,...*
- L'explosion d'Ariane 5
 - *quelques millions de dollars s'envoient en l'air...*

Les ordinateurs calculent-ils juste ?

- Représentation binaire des nombres entiers
— *deux symboles en valent bien dix !*
- Codage des nombres entiers par une machine
— *ou comment les ordinateurs parlent de 0, 1, 2, 3,...*
- L'explosion d'Ariane 5
— *quelques millions de dollars s'envoient en l'air...*
- Codage machine des nombres réels
— *ou le règne des nombres avec virgule, 2,7, $\sqrt{2}$, π ,...*

Les ordinateurs calculent-ils juste ?

- Représentation binaire des nombres entiers
— *deux symboles en valent bien dix !*
- Codage des nombres entiers par une machine
— *ou comment les ordinateurs parlent de 0, 1, 2, 3,...*
- L'explosion d'Ariane 5
— *quelques millions de dollars s'envoient en l'air...*
- Codage machine des nombres réels
— *ou le règne des nombres avec virgule, 2,7, $\sqrt{2}$, π ,...*
- Le défaut des missiles « patriot »
— *quand une petite erreur a de graves conséquences*

Les ordinateurs calculent-ils juste ?

- Représentation binaire des nombres entiers
— *deux symboles en valent bien dix !*
- Codage des nombres entiers par une machine
— *ou comment les ordinateurs parlent de 0, 1, 2, 3,...*
- L'explosion d'Ariane 5
— *quelques millions de dollars s'envoient en l'air...*
- Codage machine des nombres réels
— *ou le règne des nombres avec virgule, 2,7, $\sqrt{2}$, π ,...*
- Le défaut des missiles « patriot »
— *quand une petite erreur a de graves conséquences*
- L'arithmétique mise à mal
— *où l'on découvre que les écoliers calculent mieux...*

1. Représentation binaire des nombres entiers

1.1. Vous avez dit binaire ?

Binaire veut dire qu'il y a deux états que nous noterons 0 et 1. Pour un ordinateur, cela correspond respectivement à l'absence et au passage du courant.



1. Représentation binaire des nombres entiers

1.1. Vous avez dit binaire ?

Binaire veut dire qu'il y a deux états que nous noterons 0 et 1. Pour un ordinateur, cela correspond respectivement à l'absence et au passage du courant.



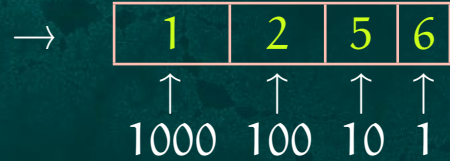
Représenter les nombres avec seulement deux symboles ?
 ⇒ Comment écrivons nous habituellement les nombres avec les dix symboles 0, 1, 2, ..., 9.

1.2. Écriture décimale des nombres entiers

$$12 = 2 \text{ unités et } 1 \text{ dizaine} = 1 \times 10 + 2.$$

$$1256 = 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 6$$

$$= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$



Pourquoi 10, 100, 1000, ... ?

1.2. Écriture décimale des nombres entiers

$$12 = 2 \text{ unités et } 1 \text{ dizaine} = 1 \times 10 + 2.$$

$$1256 = 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 6$$

$$= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 \quad \rightarrow$$

1	2	5	6
↑	↑	↑	↑
1000	100	10	1

Pourquoi 10, 100, 1000,... ? C'est parce qu'on a 10 symboles !

0, 1, ..., 9

1.2. Écriture décimale des nombres entiers

$$12 = 2 \text{ unités et } 1 \text{ dizaine} = 1 \times 10 + 2.$$

$$1256 = 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$
$$= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1000 & 100 & 10 & 1 \end{array}$

Pourquoi 10, 100, 1000,... ? C'est parce qu'on a 10 symboles !

$\boxed{0}, \boxed{1}, \dots, \boxed{9} \Rightarrow$ utiliser la *position* pour continuer : $\boxed{10}$

\Rightarrow on peut écrire $\boxed{00}, \dots, \boxed{99}$

càd 100 nombres car : $\boxed{\quad} \boxed{\quad}$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{dix possibilités} & | \\ & \text{dix possibilités} \end{array}$

1.3. Écriture binaire des nombres entiers

On ne dispose que de 0 et 1.

$\boxed{0}$, $\boxed{1}$ \Rightarrow utiliser la *position* pour continuer : $\boxed{10} = 2$

$\Rightarrow \boxed{00}$, $\boxed{01}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11} = 1 \times 2 + 1 = 3$

$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}$

$\Rightarrow \boxed{100} = 4, \dots$

1.3. Écriture binaire des nombres entiers

On ne dispose que de 0 et 1.

$$\boxed{0}, \boxed{1} \Rightarrow \text{utiliser la } \textit{position} \text{ pour continuer : } \boxed{1} \boxed{0} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{0} \boxed{0}, \boxed{0} \boxed{1}, \boxed{1} \boxed{0}, \boxed{1} \boxed{1} = 1 \times 2 + 1 = 3$$

$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}$

$$\Rightarrow \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} = 4, \dots$$

Chaque fois qu'on ajoute un *digit* on multiplie par 2 au lieu de 10 :

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow 1101 = 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 = 13$$

1.4. Comment fait-on des calculs ?

Les principes de calcul avec les représentations binaires sont les mêmes qu'avec les représentations décimales. Comparons l'addition de $13 = 1101$ et de $9 = 1001$ en décimal et en binaire :

décimal

$$\begin{array}{r} 13 \\ 9 \\ \hline \end{array}$$

binaire

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 1001 \\ \hline \end{array}$$

1.4. Comment fait-on des calculs ?

Les principes de calcul avec les représentations binaires sont les mêmes qu'avec les représentations décimales. Comparons l'addition de $13 = 1101$ et de $9 = 1001$ en décimal et en binaire :

décimal

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 13 \\
 9 \\
 \hline
 22
 \end{array}$$

binaire

$$\begin{array}{r}
 1101 \\
 1001 \\
 \hline
 10110
 \end{array}$$

1.4. Comment fait-on des calculs ?

Les principes de calcul avec les représentations binaires sont les mêmes qu'avec les représentations décimales. Comparons l'addition de $13 = 1101$ et de $9 = 1001$ en décimal et en binaire :

décimal

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 13 \\
 9 \\
 \hline
 22
 \end{array}$$

binaire

$$\begin{array}{r}
 1101 \\
 1001 \\
 \hline
 \end{array}$$

1.4. Comment fait-on des calculs ?

Les principes de calcul avec les représentations binaires sont les mêmes qu'avec les représentations décimales. Comparons l'addition de $13 = 1101$ et de $9 = 1001$ en décimal et en binaire :

décimal

$$\begin{array}{r} 13 \\ 9 \\ \hline 22 \end{array}$$

binaire

$$\begin{array}{r} & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

1.4. Comment fait-on des calculs ?

Les principes de calcul avec les représentations binaires sont les mêmes qu'avec les représentations décimales. Comparons l'addition de $13 = 1101$ et de $9 = 1001$ en décimal et en binaire :

décimal

$$\begin{array}{r} 13 \\ 9 \\ \hline 22 \end{array}$$

binaire

$$\begin{array}{r} & & & & 1 \\ & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 0 \end{array}$$

1.4. Comment fait-on des calculs ?

Les principes de calcul avec les représentations binaires sont les mêmes qu'avec les représentations décimales. Comparons l'addition de $13 = 1101$ et de $9 = 1001$ en décimal et en binaire :

décimal

$$\begin{array}{r} 13 \\ 9 \\ \hline 22 \end{array}$$

binaire

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 1001 \\ \hline 1100 \end{array}$$

1.4. Comment fait-on des calculs ?

Les principes de calcul avec les représentations binaires sont les mêmes qu'avec les représentations décimales. Comparons l'addition de $13 = 1101$ et de $9 = 1001$ en décimal et en binaire :

décimal

$$\begin{array}{r} 13 \\ 9 \\ \hline 22 \end{array}$$

binaire

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 1001 \\ \hline 10110 \end{array}$$

1.4. Comment fait-on des calculs ?

Les principes de calcul avec les représentations binaires sont les mêmes qu'avec les représentations décimales. Comparons l'addition de $13 = 1101$ et de $9 = 1001$ en décimal et en binaire :

décimal

$$\begin{array}{r} 13 \\ 9 \\ \hline 22 \end{array}$$

binaire

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 1001 \\ \hline 10110 \end{array}$$

De la même manière on peut faire des soustractions, des multiplications, des divisions,...

⇒ Une machine peut faire des calculs tout à fait exacts...

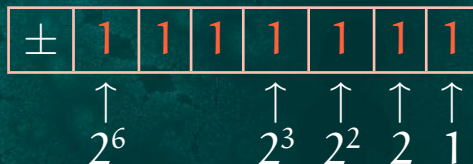
2. Les nombres entiers machine

Une machine ne possède que des ressources *limitées*
⇒ on ne peut pas stocker de très grands nombres.

2. Les nombres entiers machine

Une machine ne possède que des ressources *limitées*
 \Rightarrow on ne peut pas stocker de très grands nombres.

Si on dispose de 8 *bits* :



\Rightarrow nombres de $-1111111 = -127$ à $1111111 = 127 = 2^7 - 1$.

Type	C	bits	nombres accessibles
petits entiers	int	16	-32767 à 32767
entiers longs	long int	32	-2147483647 à 2147483647

Type	C	bits	nombres accessibles
petits entiers	int	16	−32767 à 32767
entiers longs	long int	32	−2147483647 à 2147483647

Que se passe-t-il lorsqu'un entier est trop grand pour être stocké ?
 Par exemple, si on veut stocker 130 avec 8 bits ?

Type	C	bits	nombres accessibles
petits entiers	int	16	-32767 à 32767
entiers longs	long int	32	-2147483647 à 2147483647

Que se passe-t-il lorsqu'un entier est trop grand pour être stocké ?
 Par exemple, si on veut stocker 130 avec 8 bits ?



Ce n'est pas possible : il y a *dépassement de capacité* (overflow en anglais). Dans ce cas, un « drapeau » est levé et le programme doit suivre une route de calcul différente...

3. L'explosion d'Ariane 5

On June 4, 1996 an unmanned Ariane 5 rocket launched by the European Space Agency exploded just forty seconds after its lift-off from Kourou, French Guiana. The rocket was on its first voyage, after a decade of development costing \$7 billion. The destroyed rocket and its cargo were valued at \$500 million.

3. L'explosion d'Ariane 5

On June 4, 1996 an unmanned Ariane 5 rocket launched by the European Space Agency exploded just forty seconds after its lift-off from Kourou, French Guiana. The rocket was on its first voyage, after a decade of development costing \$7 billion. The destroyed rocket and its cargo were valued at \$500 million.

The failure of the Ariane 501 was caused by the complete loss of guidance and attitude information 37 seconds after start of the main engine ignition sequence (30 seconds after lift-off). This loss of information was due to specification and *design errors in the software of the inertial reference system.*

3. L'explosion d'Ariane 5

On June 4, 1996 an unmanned Ariane 5 rocket launched by the European Space Agency exploded just forty seconds after its lift-off from Kourou, French Guiana. The rocket was on its first voyage, after a decade of development costing \$7 billion. The destroyed rocket and its cargo were valued at \$500 million.

The failure of the Ariane 501 was caused by the complete loss of guidance and attitude information 37 seconds after start of the main engine ignition sequence (30 seconds after lift-off). This loss of information was due to specification and *design errors in the software of the inertial reference system*.

The internal SRI software exception was caused during execution of a data *conversion from 64-bit floating point to 16-bit signed integer* value. The floating point number which was converted had a value greater than what could be represented by a 16-bit signed integer.

4. Codage des nombres réels

4.1. Représentation binaire

Décimal :

$$0,1 = \frac{1}{10} ; \quad 1,25 = 1 + 2\frac{1}{10} + 5\frac{1}{100} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

\uparrow
1

\uparrow
 $\frac{1}{10}$

\uparrow
 $\frac{1}{100}$

4. Codage des nombres réels

4.1. Représentation binaire

Décimal :

$$0,1 = \frac{1}{10} ; \quad 1,25 = 1 + 2\frac{1}{10} + 5\frac{1}{100} = \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}}$$

\uparrow
1

\uparrow
 $\frac{1}{10}$

\uparrow
 $\frac{1}{100}$

Binaire :

$$0,1 = \frac{1}{2} ; \quad 1,01 = 1 + 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}} = 1,25$$

\uparrow
1

\uparrow
 $\frac{1}{2}$

\uparrow
 $\frac{1}{4}$

4.2. Nombres en « virgule flottante »

Exemple sur 8 bits :

+	1,	0	0	1	0	0	1
---	----	---	---	---	---	---	---

4.2. Nombres en « virgule flottante »

Exemple sur 8 bits :

+	1,	0	0	1	0	0	1
---	----	---	---	---	---	---	---

+	0,	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

4.2. Nombres en « virgule flottante »

Exemple sur 8 bits :

+	1	,	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

+	0	,	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

4.2. Nombres en « virgule flottante »

Exemple sur 8 bits :

+	1	,	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

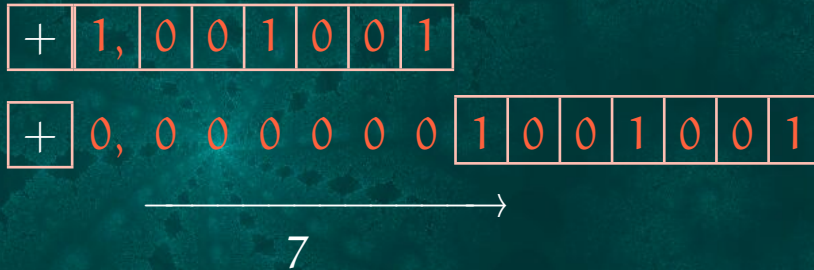
+	0	,	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



7

4.2. Nombres en « virgule flottante »

Exemple sur 8 bits :



Typiquement :

Précision	C	bits
simple	float	24
double	double	53

5. Le défaut des missiles « patriot »

On February 25, 1991, during the Gulf War, an American Patriot Missile battery in Dharran, Saudi Arabia, failed to track and intercept an incoming Iraqi Scud missile. The Scud struck an American Army barracks, killing 28 soldiers and injuring around 100 other people.



5. Le défaut des missiles « patriot »

On February 25, 1991, during the Gulf War, an American Patriot Missile battery in Dharran, Saudi Arabia, failed to track and intercept an incoming Iraqi Scud missile. The Scud struck an American Army barracks, killing 28 soldiers and injuring around 100 other people.

It turns out that the cause was an *inaccurate calculation of the time since boot due to computer arithmetic errors.*



5. Le défaut des missiles « patriot »

On February 25, 1991, during the Gulf War, an American Patriot Missile battery in Dharran, Saudi Arabia, failed to track and intercept an incoming Iraqi Scud missile. The Scud struck an American Army barracks, killing 28 soldiers and injuring around 100 other people.



It turns out that the cause was an *inaccurate calculation of the time since boot due to computer arithmetic errors.*

Specifically, the *time in tenths of second* as measured by the system's internal clock was multiplied by 1/10 to produce the time in seconds. This calculation was performed using a *24 bit* fixed point register [...] the Patriot battery had been up around *100 hours* [...]

6. L'arithmétique mise à mal

En arithmétique :

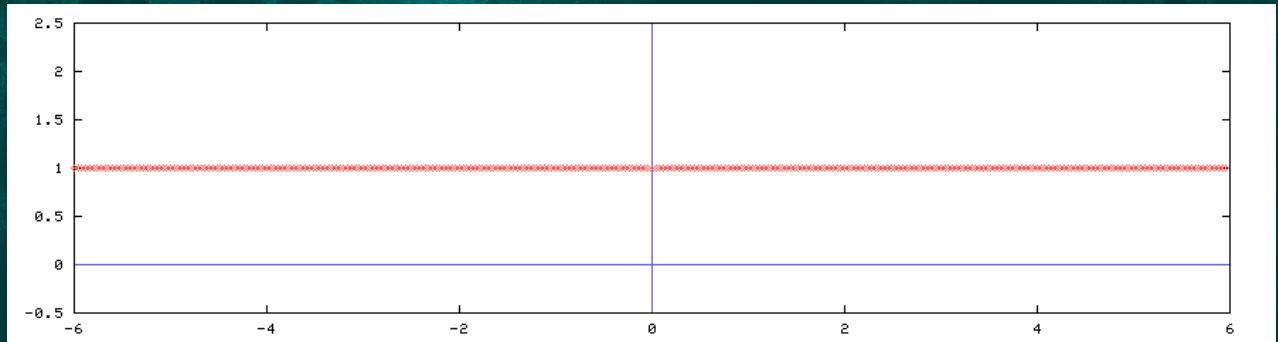
$$\frac{(1+x) - 1}{x} = 1$$

6. L'arithmétique mise à mal

En arithmétique :

$$\frac{(1 + x) - 1}{x} = 1$$

Si on fait ce calcul sur un ordinateur :

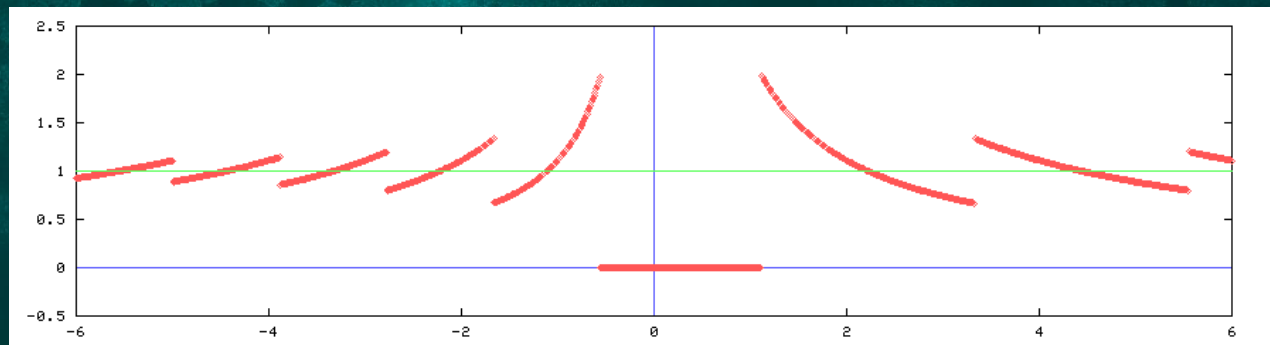


6. L'arithmétique mise à mal

En arithmétique :

$$\frac{(1 + x) - 1}{x} = 1$$

Si on fait ce calcul sur un ordinateur :



avec zoom horizontal de 10^{-16} .

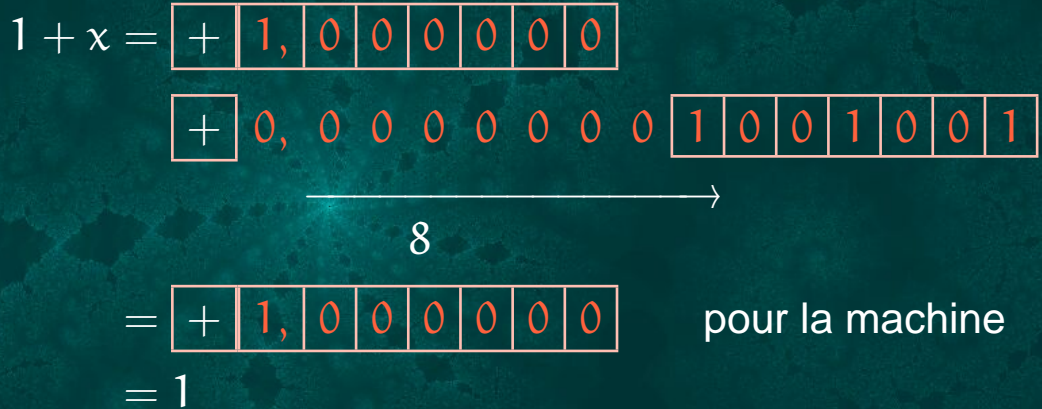
Exemple avec 8 bits :

$$1 + x = \boxed{+} \boxed{1} \boxed{,} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0}$$

$$\boxed{+} \boxed{0} \boxed{,} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1}$$



Exemple avec 8 bits :



Exemple avec 8 bits :

$$\begin{aligned}
 1 + x &= \boxed{+} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \\
 &\quad \boxed{+} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1} \\
 &\quad \xrightarrow{\hspace{10em}} \\
 &\quad \quad \quad 8 \\
 &= \boxed{+} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \quad \text{pour la machine} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{(1 + x) - 1}{x} = \frac{1 - 1}{x} = 0$$

7. Quelques liens...

7.1. Ariane 5

<http://www.math.ufl.edu/cws/3114/ariane-siam.html>

<http://www.esrin.esa.it/htdocs/tidc/Press/Press96/press33.html>

7.2. Missiles « patriot »

<http://www.math.psu.edu/dna/disasters/patriot.html>

<http://catless.ncl.ac.uk/Risks/20.85.html#subj2.1>

7.3. Sur les calculs « avec virgule »

<http://www.lahey.com/float.htm>

<http://www.zenger.informatik.tu-muenchen.de/persons/huckle/bugse.html>