Compacité dans $\mathbb{R}^N$

Question 1. Soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$. Prouvez qu'il est impossible que

$$\forall y \in A,\ \exists \eta \in A,\ \eta > y.$$

Question 2. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Montrez que

- $\operatorname{int} A$ est le plus grand ouvert contenu dans A,
- $\operatorname{adh} A$ est le plus petit fermé contenant A.

Question 3. Donnez un recouvrement ouvert fini et un recouvrement ouvert infini de $[0,1], \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

Question 4. Les ensembles suivants sont-ils compacts ? Justifiez en détail votre réponse.

(a) $A_1 = \{(x, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$

(b) $A_2 = \{(x, \sin x) : x \in [-\pi, \pi]\}$

(c) $A_3 = [-1,2] \times [-4,-3]$

(d) $A_4 = \left\{(x, 1-x^2) : x \in [0,1]\right\}$

Question 5. Soient A et B deux compacts de $\mathbb{R}^N$. Montrez que $A \cap B$ et $A \cup B$ sont compacts.

Question 6. Montrez qu'une union finie d'ensembles compacts est un ensemble compact.

Question 7. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Montrez que $[a,b] \times [c,d]$ est un ensemble compact.

Question 8. Soit $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'ensembles compacts. Peut-on affirmer que $\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$ est compact ?

Question 9. Soit A un compact de $\mathbb{R}$. Montrez que si $\sup A = p$, alors $p \in A$.

Question 10. Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. On définit la distance de x à A comme le nombre

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\left\{|x-a| : a \in A\right\}.$$

- Démontrez que si $A \neq \varnothing$, alors $\operatorname{dist}(x, A) \in \mathbb{R}$,
- Montrez que $\operatorname{dist}(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{adh} A$,
- Montrez que $A_{<\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}$ est un ensemble ouvert contenant A,
- Montrez que $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ est une fonction continue,

- Montrez que $A_{\leqslant\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}(x,A) \leqslant \varepsilon\}$ est un ensemble fermé contenant A,
- Établissez que $\bigcap_{\varepsilon>0} A_{<\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon>0} A_{\leqslant\varepsilon} = \mathrm{adh}\,A$.

Question 11. Soient C_1, C_2 deux compacts de $\mathbb{R}^N$. Montrez que l'ensemble

$$C_1 + C_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1 \text{ et } x_2 \in C_2\}$$

est un compact de $\mathbb{R}^N$.

Question 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(1) = 3$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Montrez qu'il existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant f(\xi)$.

Question 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = -1$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Montrez qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R} : f(y) \geqslant f(v)$.

Question 14. Soit $C \subseteq \mathbb{R}^N$ un ensemble compact. Soit $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de fermés de l'ensemble C — donc $\forall \alpha \in A,\ F_\alpha \subseteq C$. Supposons que $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \varnothing$.

(a) Montrez qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in A,\ F_{\alpha_1} \cap F_{\alpha_2} \cap \cdots \cap F_{\alpha_k} = \varnothing$.

(b) Déduisez en que C possède la Propriété des Intersections Finies.