Topologie dans $\mathbb{R}^N$

Question 1. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez en détail toutes vos réponses.

(a) $[2002, 2003] \cup \{2004\}$
(b) $[-7, 2] \cup [3, 8]$
(c) $]1, 4[\cup \{5\}$
(d) $\{-2, -1, 4, 7, \pi\}$
(e) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
(f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
(g) $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$
(h) $[-6, -5] \cap [8, 9]$
(i) $\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$
(j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \quad \text{et} \quad |y| \leqslant 1\}$
(k) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$
(l) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad y > 3\}$
(m) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 0\}$
(n) $\{(x, x^4) : x \in [-1, 2]\}$
(o) $([0, 1] \times [1, 2]) \cup B[(2, 2), 1/2]$
(p) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} B\big((0, 0), 1 + 1/n\big)$

Question 2. Que sont les ensembles suivants :

$$\operatorname{int}\varnothing,\ \operatorname{int}\mathbb{R},\ \operatorname{int}\mathbb{Q},\ \operatorname{int}\mathbb{Z},\ \operatorname{int}\mathbb{N},\ \operatorname{adh}\varnothing,\ \operatorname{adh}\mathbb{R},\ \operatorname{adh}\mathbb{Q},\ \operatorname{adh}\mathbb{Z},\ \operatorname{adh}\mathbb{N}\ ?$$

Question 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + 1$. Considérons l'ensemble

$$E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 8\big\}.$$

Montrez que E est ouvert.

Question 4. Considérons l'ensemble $K = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - 3y^2 + 2z^3 \leqslant 2\big\}$. Montrez que K est un ensemble fermé.

Question 5. Considérons l'ensemble $E = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\big\}$. Représentez cet ensemble. Est-il ouvert ? Fermé ? Justifiez.

Question 6. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$. Rappelons qu'on définit le *graphe* de f par

$$G_f = \big\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\big\}.$$

- Montrez la propriété suivante :

$$\text{« Si } f \text{ est continue alors le graphe de } f \text{ est un ensemble fermé ».} \tag{1}$$

- Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Énoncez la réciproque de la propriété (1). Déduisez de cet exemple que la réciproque de (1) est fausse.

Question 7. Soit D la droite d'équation $2x+3y=6$. Notons π_1 et π_2 les demi-plans ouverts définis par D. Que sont les ensembles suivants :

$$\operatorname{adh}\pi_1, \quad \operatorname{int}\pi_2, \quad \operatorname{adh}(\pi_1 \cup \pi_2), \quad \operatorname{adh}\pi_1 \cap \operatorname{adh}\pi_2 \,?$$

Question 8. Soit $n \in \mathbb{N}_0$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n fonctions continues de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

(a) L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^N : \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ f_i(x) \geqslant 0\}$ est-il fermé ?

(b) L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^N : \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ f_i(x) > 0\}$ est-il ouvert ?

(c) Que peut-on dire si on prend une infinité de fonctions ?

Question 9. Soit $a \in \mathbb{R}^N$ et $V \subseteq \mathbb{R}^N$. Reppelons qu'on dit que V est un *voisinage* de a si $\exists r > 0,\ \mathrm{B}(a,r) \subseteq V$.

(a) Montrez que V est un voisinage de a ssi il existe un ouvert O tel que $a \in O$ et $O \subseteq V$.

(b) Montrez qu'un ensemble A est ouvert ssi il est voisinage de chacun de ses points.