Faculté
des Sciences
Département de Mathématique

UMONS
Université de Mons

La théorie des jeux : un outil pour travailler les quantificateurs dans l'enseignement secondaire

Mémoire réalisé par Kévin VAN MIEGHEM
pour l'obtention du diplôme de Master en sciences mathématiques

Année académique 2017–2018

Directeurs: Stéphanie Bridoux
Thomas Brihaye
Services: Service de Didactique des Disciplines Scientifiques
Service de Mathématiques Effectives

Faculté des Sciences • Université de Mons • Place du Parc 20 • B-7000 Mons

Remerciements

Je ne peux commencer ces remerciements en remerciant mes directeurs de mémoire qui m'ont permis de réaliser ce travail en associant la théorie des jeux à la didactique des mathématiques.

Je remercie Madame Stéphanie Bridoux pour son soutien, sa disponibilité ainsi que son dévouement exceptionnel durant la rédaction de ce mémoire mais aussi durant l'entièreté de mon parcours universitaire. Votre présence dans les moments d'incertitude a, sans aucun doute, été déterminante dans l'aboutissement de mes études.

Je remercie également Monsieur Thomas Brihaye de m'avoir transmis cette passion pour cette magnifique branche des mathématiques qu'est la théorie des jeux. Vos conseils, toujours donnés dans une « zénitude » légendaire, m'ont énormément apporté pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier Madame Carine Launois, Madame Céline Nihoul ainsi que Madame Marion Hallet pour avoir accepté de rapporter ce mémoire.

Plus particulièrement, Madame Launois, je tiens à vous remercier pour avoir fait de moi un passionné des mathématiques dans le passé et de m'avoir accueilli à nouveau dans votre classe pour la réalisation de ce travail.

Un grand merci à Marion et Aline pour cet espace de calme que vous m'avez offert pour la rédaction de mon mémoire. Ma Cocotte, je te remercie simplement d'avoir été l'amie sur qui compter tout au long de mon parcours universitaire et de continuer à l'être.

Je ne peux oublier de remercier mes acolytes d'aventure, Laura, Marceline, Kévin, Antoine, Guillaume ainsi que Quentin pour cette dernière année plus qu'exceptionnelle.

Je tiens également à remercier ma famille et plus particulièrement mes parents, vous qui avez toujours cru en moi beaucoup plus que moi-même je ne pouvais croire en moi, je ne peux écrire de mot pour vous exprimer ma gratitude.

Enfin, je tiens à te remercier toi, Valérie, pour être entrée dans ma vie au début de mon parcours et de l'avoir simplement rendu possible car, sans toi, je n'aurais très probablement jamais eu l'occasion d'écrire ces lignes.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'enseignement du langage mathématique dans les années du secondaire. Cette notion n'étant pas propre à une discipline précise, nous avons fait l'hypothèse que la théorie des jeux est un domaine propice pour travailler les écritures quantifiées. Nous réalisons ainsi une séquence d'introduction de la notion de quantificateur dans le cadre de la théorie des jeux et nous nous intéressons aux avantages que celle-ci peut amener.

Nous exposons dans le premier chapitre les éléments qui ont contribué à développer un questionnement sur la notion de quantificateur. Nous réalisons ainsi une analyse des programmes du secondaire et nous comparons les savoirs liés au langage mathématique devant être acquis en fin de parcours avec les exigences universitaires.

Le deuxième chapitre porte un regard mathématique sur la notion de quantificateur et reprend des travaux antérieurs de recherche en didactique qui précisent les difficultés rencontrées par les apprenants en lien avec la quantification.

Nous détaillons dans le troisième chapitre la notion de jeu sous forme normale de la théorie des jeux et nous l'analysons en vue de réaliser notre séquence de cours pour des élèves du secondaire. Nous terminons ce chapitre en présentant notre problématique et la méthodologie que nous avons mise en place pour y apporter des éléments de réponse.

Le quatrième chapitre consiste en une présentation et une analyse de la séquence de cours que nous avons élaborée. Pour ce faire, nous introduisons au préalable les choix de construction de la séquence en lien avec notre problématique ainsi que les outils d'analyse que nous utilisons.

Le cinquième chapitre décrit le déroulement de la séquence dans une classe de sixième année du secondaire. Nous comparons cette expérimentation avec l'analyse *a priori* du chapitre précédent et nous tentons de faire ressortir des éléments de réponses à notre problématique.

Nous terminons par un bilan de la recherche et nous exposons les limites méthodologiques du travail.

Chapitre I

Contexte du travail

Dans ce chapitre, nous abordons les différents points qui ont contribué à développer un questionnement didactique sur la notion de quantificateur.

I.1 Difficultés des études en première année universitaire

L'entrée dans les études supérieures constitue pour l'étudiant un changement net de mode de fonctionnement et de pratiques, davantage basés sur l'autonomie et la rigueur (Bridoux, 2014 [3]). Les étudiants débutant leurs études en sciences mathématiques sont ainsi confrontés à plusieurs difficultés rapportées dans les travaux de Dieudonné et Durand-Guerrier (2011) [8]. Par exemple, nous pouvons citer les difficultés renvoyant aux aspects logiques mais aussi les difficultés liées aux connaissances de base ou encore les lacunes en ce qui concerne les démarches caractéristiques de l'activité mathématique (Bridoux, 2014 [3]). Ainsi, Bridoux montre en analysant une évaluation proposée aux étudiants de l'Université de Mons le jour de la rentrée académique qu'il y a de grandes difficultés en matière d'organisation et d'explicitation des raisonnements (par la justification). À l'UMONS, un cours intitulé « Mathématiques élémentaires » est d'ailleurs prévu pour favoriser la transition entre le secondaire et le supérieur dans les cours de mathématiques.

Dans les cours qui suivront le cours de Mathématiques élémentaires, l'étudiant sera amené à mettre en application ce qu'il aura appris, c'est-à-dire à rédiger des preuves en organisant son raisonnement, en justifiant les étapes de celui-ci et en utilisant un vocabulaire adapté (nous pensons notamment à l'utilisation des mots « soit », « donc », « prenons »,...), par exemple, dans le cours d'Analyse, pour manipuler la définition de limite d'une suite ou d'une fonction ou encore dans la rédaction de preuves par récurrence où apparaissent trois parties : le cas de base, l'hypothèse d'induction et le pas de récurrence.

Afin qu'un étudiant puisse rédiger avec rigueur et structurer son raisonnement lors de telles preuves, il semble légitime de faire l'hypothèse qu'il comprenne les objets qu'il manipule tels que les définitions, les propriétés et les principes de preuve.

Dans le but d'appuyer cette hypothèse, nous reprenons une question d'évaluation du cours de Mathématiques élémentaires et nous réalisons une brève analyse du travail de l'étudiant. Nous reprenons aussi deux définitions que rencontrent les étudiants au cours de leur première année de bachelier et nous analysons le travail à réaliser lors de l'utilisation de ces définitions tout en tentant de mettre en évidence des difficultés potentielles.

Question 9. **Prouvez par récurrence sur n ($n \geqslant 1$) que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,**

$$(1+t+t^2+\cdots+t^n)(t-1) = t^{n+1}-1$$

FIGURE I.1 – Test 4 du 6 octobre 2008 - Mathématiques élémentaires

Soit K, un corps commutatif. $(E, +, \cdot, 0, 1)$ est un K-EV si :

1. $+ \ : E^2 \to E$
2. $\cdot \ : K \times E \to E$
3. $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ x+y = y+x$
4. $\forall x \in E,\ \forall y \in E, \forall z \in E,\ (x+y)+z = x+(y+z)$
5. $\forall x \in E,\ x+0 = x$
6. $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x+y = 0$
7. $\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
8. $\forall \lambda \in K,\ \forall \mu \in K,\ \forall x \in K,\ (\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

FIGURE I.2 – Définition d'espace vectoriel du cours d'Algèbre linéaire I

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon)$$

FIGURE I.3 – Définition de convergence de suite du cours d'Analyse mathématique (partie A)

Commençons par analyser la question de la FIGURE I.1. Pour ce faire, nous commençons par résoudre l'exercice.

Cas de base $(n = 1)$: pour $n = 1$, nous devons montrer

$$\forall t \in \mathbb{C},\ (1 + t)(t - 1) = t^2 - 1$$

Soit $t \in \mathbb{C}$, alors

$$(1 + t)(t - 1) = t^2 - 1$$

par la formule des binômes conjugués. Ce qui prouve la propriété pour $n = 1$.

Hypothèse de récurrence : supposons que la propriété soit démontrée pour tout n naturel inférieur à k, où $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$.

Sous cette hypothèse, montrons que la propriété reste vraie pour $n = k + 1$.

Soit $t \in \mathbb{C}$ alors,

$$\begin{aligned}
(1 + \ldots + t^{k+1})(t - 1) &= (1 + \ldots + t^k)(t - 1) + t^{k+1}(t - 1) \\
&\quad \text{Par la simple distributivité} \\
&= t^{k+1} - 1 + t^{k+2} - t^{k+1} \\
&\quad \text{Par hypothèse de récurrence et calcul} \\
&= t^{k+2} - 1 \\
&\quad \text{Par calcul}
\end{aligned}$$

□

Pour réaliser l'analyse, nous utilisons les outils développés par Robert (1998) [14] qui consistent à étudier les adaptations qui sont à faire sur les connaissances. Une adaptation caractérise la façon dont les connaissances sont mises en fonctionnement, par exemple l'introduction d'étapes ou d'intermédiaires dans un raisonnement, l'existence de choix ou encore l'utilisation de cadres ou registres [1] différents. Cet outil sera détaillé dans la section IV.2.

Ici, nous parlerons d'un niveau de mise en fonctionnement des connaissances mobilisables. En effet, la preuve par récurrence est imposée à l'étudiant, mais il y a des adaptations à réaliser, il ne s'agit pas d'une application immédiate.

La première chose à laquelle nous sommes confronté à la lecture de l'énoncé de l'exercice est la double quantification universelle, l'une en « $\forall n$ » et l'autre en « $\forall t$ ». L'étudiant devra alors bien comprendre que le principe de récurrence sera de travailler sur la quantification du « $\forall n$ » mais que le « $\forall t$ » sera à traiter à l'intérieur des étapes de récurrence comme nous l'avons fait dans la preuve ci-dessus.

Au niveau des adaptations à réaliser, l'étudiant devra effectuer une introduction d'étapes caractéristiques de la preuve par récurrence mais aussi l'instanciation de la variable t (soit $t \in \mathbb{C}$) dans le cas de base et le pas de récurrence. Dans le cas où le principe de récurrence n'est pas maîtrisé, l'étudiant pourrait rencontrer des difficultés à émettre correctement l'hypothèse d'induction, deuxième étape du raisonnement ou à structurer sa démarche.

Il y a donc un travail à réaliser de la part de l'étudiant sur la compréhension du principe de récurrence mais aussi sur le rôle du « $\forall t$ » qui fait partie intégrante de la propriété à montrer par récurrence.

Un autre point concerne le cadre de travail : les nombres complexes. Ce cadre ne doit influencer aucune action ici. En effet, à aucun moment l'étudiant n'est amené à utiliser les propriétés des nombres complexes (la propriété étant valable dans les réels).

Regardons à présent les définitions illustrées par les Figures I.2 et I.3. La Figure I.2 constitue la première définition que rencontre l'étudiant dans le cours d'Algèbre linéaire I. Cette définition est donnée en langage symbolique, langage qui sera de plus en plus utilisé par écrit au détriment du registre de la langue naturelle au fil de l'année. La définition fait apparaître plusieurs objets mathématiques : des opérateurs binaires, des ensembles ainsi que des variables. Toutes ces notions sont articulées grâce à l'utilisation des quantificateurs.

Lorsqu'il s'agit de vérifier qu'un ensemble muni d'opérateurs vérifie la définition d'espace vectoriel (exercice proposé aux étudiants dès les premières heures de cours), il faut donc manipuler les quantificateurs qui la composent.

---

1. Un cadre est un domaine de travail, comme l'analyse, l'algèbre,... Un registre de travail est un mode d'écriture comme la langue naturelle, le tableau, le graphique,...

Une maîtrise du langage mathématique symbolique semble donc requise pour prévenir des difficultés qui pourraient être rencontrées lors de l'utilisation de la définition.

Les remarques sont similaires pour la définition de convergence de suite donnée à la FIGURE I.3 mais nous avons choisi d'ajouter celle-ci car elle combine un plus grand nombre de quantificateurs différents et que ceux-ci se révèlent souvent être source de difficultés dans la notion de convergence comme l'indique Robert (1982) [13]. Lorsqu'il s'agit de montrer qu'une suite est convergente, il faut calquer sa preuve sur l'enchaînement de ces quantificateurs (une propriété en $\forall - \exists - \forall$ donne lieu à une preuve structurée en « Soit - Prenons - Soit »), où chacune des instanciations peut potentiellement dépendre des précédentes, ce qui laisse aussi penser qu'une maîtrise du langage mathématique symbolique pourrait impacter la qualité de rédaction des étudiants.

Cette première analyse montre selon nous l'importance de la maîtrise du langage mathématique (que ce soit en termes de symboles ou en termes de langue naturelle) et notamment des quantificateurs. En effet, une multitude de définitions (et propriétés) qui sont manipulées par les étudiants de première année sont des énoncés quantifiés, en plus de celles que nous avons exprimées dans les FIGURES I.2 et I.3. Un objectif du Département de Mathématique est que tout étudiant de fin de première année parvienne à manipuler correctement le formalisme des définitions et propriétés rencontrées et au vu des analyses précédentes, il semble intéressant de se pencher sur le langage mathématique et plus précisément sur la notion de quantificateur. Dans ce but, nous analysons les programmes du secondaire pour voir quelle importance est accordée au langage mathématique.

I.2 Analyse des programmes du secondaire

Puisque les programmes de l'enseignement officiel et du SEGEC sont assez similaires dans leur point de vue sur le langage mathématique, nous avons choisi de nous concentrer sur les programmes de la Fédération Wallonie Bruxelles Enseignement [2]. Parmi ceux-ci, nous distinguons l'ancien programme, d'application jusqu'en 2018 et donc en lien avec les étudiants présents actuellement à l'université mais aussi le nouveau programme qui rentrera en application durant l'année académique 2018/2019. Nous ciblons notre analyse sur les parties destinées à l'enseignement de minimum six heures de mathématiques par semaine car la majorité des étudiants entamant leurs études en mathématiques à l'UMONS vient de ce type de filière.

2. Disponibles via http ://www.wallonie-bruxelles-enseignement.be

I.2.1 Ancien programme

L'ancien programme est scindé en deux parties : un préambule dans lequel on traite des notions plus transversales et les compétences à faire atteindre aux élèves et une seconde partie consacrée aux savoirs disciplinaires.

En ce qui concerne le préambule, nous ne trouvons pas de partie destinée à la notion de quantificateur. Cependant, nous retrouvons deux passages qui traitent de la notion de langage, de la communication ainsi que de la logique. Nous reprenons ci-dessous ces deux extraits et nous les commentons.

> Quelle que soit l'option choisie (2, 4 ou 6 périodes par semaine), un des objectifs majeurs du cours de mathématiques est de rendre l'élève capable de découvrir, rédiger, illustrer une argumentation dans un langage précis et concis. Le recours aux règles logiques s'appuie dans un premier temps sur le langage courant. Les principes qui sous-tendent le raisonnement mathématique sont ensuite exprimés dans un langage approprié.

Figure I.4 – Extrait de programme - 1

> La pratique de la démonstration doit arriver à maturation dans le cours à six périodes. En géométrie notamment, les élèves disposent de nombreux outils : les propriétés des figures, les transformations, le calcul vectoriel, la géométrie analytique, etc. Les démonstrations sont l'occasion de développer les compétences liées à l'argumentation et à la communication. Une attention particulière sera portée à :
>
> - organiser les étapes d'une construction et à les justifier,
> - distinguer l'implication simple de l'équivalence, l'hypothèse de la thèse,
> - maîtriser quelques démarches logiques qui régissent les démonstrations (négation ou réciproque d'un énoncé, raisonnement par l'absurde, raisonnement par disjonction des cas, …)
> - rédiger une démonstration en faisant apparaître les étapes, les liens logiques, les théorèmes utilisés au moyen de phrases complètement formulées,
> - distinguer une propriété affine d'une propriété métrique en vue d'un traitement dans un cadre approprié,
> - insister sur l'importance des expressions logiques telles que « et », « ou », « car », « or », « donc », d'où », « si », « si et seulement si », « si… alors », …
> - étudier quelques notions et règles de logique (contraposition d'implications ou d'équivalences, démonstrations par l'absurde, critères faisant intervenir des conditions nécessaires et suffisantes, récurrence, négation, …).

Figure I.5 – Extrait de programme - 2

La FIGURE I.4 décrit un objectif important du programme. Il insiste sur la faculté que doit acquérir un élève de rédiger une preuve en utilisant un langage adéquat. Nous retenons ainsi qu'un élève sortant des études secondaires doit être capable de manipuler certaines règles logiques et de les mettre en œuvre afin d'argumenter un raisonnement.

La FIGURE I.5 traite de la démonstration et indique que les élèves sortants du secondaire doivent être capables de réaliser une démonstration. Cet extrait met en avant plusieurs aspects qui sont jugés utiles au début des études supérieures. Ainsi, de l'importance est accordée à la logique, comme la distinction de l'implication et de l'équivalence ou encore le travail sur la contraposition et la négation.

Un autre aspect que nous retenons est l'importance accordée à la justification. Le programme indique que l'organisation des étapes d'un raisonnement, par l'emploi d'un langage logique approprié (utilisation des mots « donc », « or »,. . .), ainsi que la justification de celui-ci sont des compétences ciblées. Le langage logique peut aussi s'appuyer sur le langage courant.

Dans la partie disciplinaire du programme, nous ne retrouvons pas les termes « langage » et « quantificateur ». Lorsque nous ciblons des chapitres propices à l'utilisation du langage symbolique, tels que les suites ou encore la continuité, il n'est pas non plus indiqué comment mettre en œuvre les compétences décrites dans le préambule. De plus, les énoncés quantifiés caractérisant la notion de limite de suite ou fonction et la continuité ne sont pas au programme.

De cette analyse, nous retenons que ce programme met un accent sur l'utilisation d'un langage mathématique précis. La mise en œuvre de celui-ci n'est cependant pas indiquée et est donc laissée à l'interprétation des enseignants.

I.2.2 Nouveau programme

Le nouveau document est lui aussi scindé en deux parties : un préambule traitant les compétences et des notions transversales et une partie consacrée aux savoirs disciplinaires.

Dans le préambule, le nouveau programme est similaire à l'ancien lorsqu'il explique l'utilisation de l'écriture mathématique et le terme « quantificateur » n'apparaît pas non plus. Nous reprenons l'extrait de celui-ci qui évoque l'utilisation du langage et nous le commentons.

Mathématique et communication

La communication intervient lors de différentes étapes d'une démarche mathématique notamment dans

- la reformulation orale ou écrite dans l'appropriation d'une situation,
- la traduction du langage mathématique en un langage usuel et réciproquement,
- la production d'un dessin, d'un graphique, d'un schéma, d'un tableau,
- la formulation d'une conjecture, d'une stratégie, d'une procédure, d'une argumentation, d'une démonstration, d'une généralisation, d'une synthèse, d'un résultat...,
- la discussion dans la confrontation de points de vue,
- la présentation structurée des données, des arguments, des solutions...

Dans toute communication, orale ou écrite, l'exigence de rigueur s'impose tant pour le langage mathématique que pour la langue française : choix du terme exact, recours aux connecteurs logiques, utilisation de symboles, respect de la syntaxe mathématique, qualité de la présentation, orthographe correcte.

FIGURE I.6 – Extrait de programme - 3

À nouveau, un accent est mis sur l'organisation du raisonnement ainsi que sur la justification de celui-ci. La structuration des éléments mathématiques, tels que les arguments et les solutions, doit être une compétence acquise par les élèves.

Nous retenons aussi de l'extrait de la FIGURE I.6 que l'élève doit être capable d'employer un langage approprié à la preuve et doit acquérir une rigueur tant pour la syntaxe mathématique et l'utilisation de symboles que pour la langue française.

Une différence par rapport à l'ancien programme est que la traduction entre le langage courant et le langage mathématique doit se faire dans les deux sens.

Nous analysons maintenant la partie disciplinaire du document et nous reprenons les extraits dans lesquels le terme « quantificateur » apparait.

Définir la limite d'une suite et expliciter cette définition à l'aide d'un schéma	L'élève doit donner la définition de la limite d'une suite à partir d'un schéma, l'exprimer par une phrase et la transcrire en langage mathématique à l'aide de quantificateurs

FIGURE I.7 – Extrait de programme - 4

Asymptotes et limites d'une fonction Continuité en un point	En partant des graphiques ou des singularités de certaines fonctions telles que les fonctions homographiques, partie entière, l'inverse du carré, quotient de deux fonctions admettant un zéro commun… on introduira les notions de limite réelle ou infinie d'une fonction en un réel, ou en $\pm\infty$, ainsi que les limites à gauche et à droite. Les définitions seront exprimées en français et aussi en termes de quantificateurs. Ces définitions se doivent d'être introduites progressivement à partir d'exemples. On pourra s'inspirer avantageusement de la définition de la limite d'une suite. Certaines limites conduiront aux définitions d'asymptotes, de continuité en un point.

FIGURE I.8 – Extrait de programme - 5

Le terme « quantificateur » apparait dans les parties destinées aux notions d'asymptotes et de limites de fonctions ainsi qu'à la notion de suite.

Ces extraits nous donnent quelques indications sur la mise en œuvre du langage mathématique. Dans le chapitre des suites, le langage mathématique est utilisé pour définir la notion de limite de suite à l'aide des quantificateurs. Lorsqu'il s'agit du chapitre sur les limites et la continuité de fonctions, le langage mathématique est utilisé de la même façon. Il n'est pas indiqué si les définitions doivent être manipulées comme pour montrer la limite d'une suite ou une fonction. Cet aspect est laissé à la charge des enseignants.

En dehors de ces disciplines, la notion de langage mathématique et de quantificateur n'apparait pas, ce qui amène, au vu du préambule, une liberté à l'enseignant pour la mise en œuvre du langage mathématique.

I.2.3 Bilan

Alors que l'ancien programme appuie fortement sur la notion de démonstration, il reste assez vague sur l'utilisation des quantificateurs. En effet, le terme lui-même n'apparait pas dans le document. On y parle cependant de langage approprié, mais la mise en œuvre et l'interprétation de celui-ci sont laissées aux lecteurs, ce qui peut amener des disparités dans l'emploi du langage mathématique par les enseignants et pourrait expliquer une différence de maîtrise par les étudiants de première année à l'université.

Lorsque nous nous penchons sur le nouveau document, l'utilisation du quantificateur se précise : il est employé afin de traduire des idées mathématiques, telles que la notion de limite de suite traduite en un énoncé quantifié, ce qui peut laisser penser que les étudiants qui arriveront dans le supérieur possèdent au moins des outils de traduction à partir d'une situation mathématique ou d'un énoncé en langage courant.

Ces analyses nous amènent donc à penser que les étudiants possèdent des techniques de preuves et peuvent rédiger une argumentation en employant des termes corrects mais qu'il peut y avoir des différences d'emploi et de maîtrise du langage mathématique d'un étudiant à l'autre. Cependant, ces aspects restent problématiques durant la première année, comment l'illustre l'analyse de copies d'étudiants de la section suivante mettant en avant plusieurs difficultés récurrentes.

I.3 Analyse de copies d'examen de MPI-I

Les étudiants de mathématiques, d'informatique et de physique suivent ensemble le cours de Mathématiques élémentaires au début de l'année, constituant l'unique cours de mathématiques au cours des premiers mois. Ils y travaillent les quantificateurs de manière transversale, dans le registre de la langue naturelle et symbolique. Nous avons donc choisi d'analyser les copies d'étudiants d'informatique. En effet, ceux-ci suivent un cours intitulé Mathématiques pour l'informatique I (MPI-I) dans lequel la communication est travaillée et leur bagage sur la notion de langage est le même que celui des étudiants en mathématiques à la fin du cours de Mathématiques élémentaires.

Le cours de Mathématiques pour l'informatique I a pour but de développer des réflexes mathématiques utiles pour l'informatique. Parmi les objectifs d'apprentissage, on distingue notamment :

- maîtriser les bases de la communication,
- être capable de communiquer, oralement ou par écrit, une argumentation scientifique cohérente et rigoureuse,
- avoir une bonne maîtrise de la langue et des techniques de communication.

La maîtrise du quantificateur est donc exigée des étudiants lors de l'évaluation. Nous avons repris une question de l'évaluation finale du cours de décembre 2016.

I.3.1 Questions et résolutions

Nous regardons les points (a), (b) et (d) de la question donnée par la FIGURE I.9. Nous avons décidé d'analyser cette question car elle fait manipuler des énoncés quantifiés en langage symbolique mais aussi car la valeur de vérité des énoncés est à déterminer, ce qui amène l'étudiant à interpréter les symboles et à ensuite réaliser une preuve structurée.

Question 5. Considérons le prédicat $P(x,y) \equiv x^2 + y^2 = 0$ de domaine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dites si les formules suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez ensuite votre réponse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x, \exists y, P(x,y)$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists x, \exists y, P(x,y)$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x, \exists y, \big((x = y) \Rightarrow P(x,y)\big)$

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists x, \forall y, \big((x \neq y) \Rightarrow P(x,y)\big)$

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x, \forall y, \big((x \neq y) \Rightarrow P(x,y)\big)$

FIGURE I.9 – Question 5, test 1 du 5 décembre 2016, MPI-I

Nous rédigeons trois résolutions correctes pour les points (a), (b) et (d).

La formule est fausse. Pour justifier, démontrons que la négation est vraie. C'est-à-dire que la formule suivante est vraie :

$$\exists x, \ \forall y, \ \neg P(x,y)$$

Prenons $x = 1$ ($1 \in \mathbb{R}$), soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\neg P(1,y) \Leftrightarrow 1 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow y^2 \neq -1$$

Ce qui est vrai car $X^2 = -1$ n'admet pas de solution dans les réels.

Résolution *- Question (a)*

La formule est vraie. Démontrons-la.

Prenons $x = 0$ ($0 \in \mathbb{R}$). Prenons $y = 0$ ($0 \in \mathbb{R}$).

$$P(0,0) \Leftrightarrow 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Ce qui est vrai.

Résolution *- Question (b)*

La formule est fausse. Pour justifier, démontrons que la négation est vraie. C'est-à-dire que la formule suivante est vraie :

$$\forall x,\ \exists y,\ x \neq y \land \neg P(x, y)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, prenons $y = x + 1$. On a bien :

$$x \neq x + 1 \Leftrightarrow 0 \neq 1$$

et

$$\neg P(x, x + 1) \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 \neq 0$$

car le discriminant de $2x^2 + 2x + 1$ est -4 et donc, le polynôme $2X^2 + 2X + 1$ n'admet pas de racine.

Résolution - *Question (d)*

I.3.2 Analyse *a priori* des questions

Il s'agit de déterminer la valeur de vérité et de rédiger la preuve de trois énoncés quantifiés dans un cadre lié aux propriétés des nombres réels. Nous réalisons une analyse *a priori* de cette tâche en suivant les axes d'analyse décrits par Robert (1998) [14].

Situation globale

Cette tâche met en avant deux notions : le quantificateur ainsi que les propriétés des nombres réels. Le travail attendu de l'étudiant est principalement une preuve où chaque étape du raisonnement doit être justifiée.

Cet exercice se place dans le cadre de la logique dans lequel le registre symbolique est mis en fonctionnement. Notons cependant que le registre de la langue naturelle peut être employé par l'étudiant si celui-ci lui permet de mieux interpréter l'énoncé et de faciliter l'expression de la valeur de vérité. Bien que la tâche est basée sur une expression à deux variables, le registre graphique consistant à tracer la fonction associée à l'expression « $x^2+y^2 = 0$ » ne donnerait qu'un unique point. Ce registre peut être utile pour le point (b) par exemple.

Les savoirs que doit utiliser l'étudiant, c'est-à-dire la preuve d'énoncés logiques quantifiés, les propriétés des nombres réels ainsi que la justification sont ici des savoirs anciens, déjà étudiés lors des cours de Mathématiques élémentaires et de Mathématique pour l'informatique I.

Notons aussi que les trois sous-questions sont assez indépendantes l'une de l'autre, bien que basées sur la même expression algébrique. En effet, la réponse de l'une ne peut pas être utilisée sous forme d'outil pour répondre à une autre sous-question.

Analyse de la tâche

La question demande deux productions de l'étudiant : déterminer la valeur de vérité de l'énoncé et ensuite justifier. Il s'agit donc d'un niveau de mise en fonctionnement des connaissances mobilisables, l'étudiant ayant été confronté dans le cours à justifier et rédiger des preuves.

La question (a) met en avant un raisonnement lié aux quantificateurs universel et existentiel. L'étudiant aura trois étapes à réaliser : déterminer que l'énoncé est faux, expliciter la négation et prouver la négation. Nous pensons que le registre de la langue naturelle peut être utilisé pour interpréter l'énoncé et nous pourrons regarder s'il y a une trace écrite sur les copies. Lors de la preuve de cette sous-question, l'étudiant aura un choix non forcé pour la variable y (c'est-à-dire qu'il existe plusieurs valeurs pour y qui conviennent à la preuve), qui ne dépendra pas de l'instanciation précédente (de x). Nous pensons que cela peut amener une difficulté par rapport à la sous-question (b) que nous analysons dans le paragraphe suivant. En effet, les choix non forcés donnent lieu à des preuves moins rigides, ce qui laisse plus de possibilités pour l'étudiant de se perdre dans son raisonnement.

En ce qui concerne la sous-question (b), le registre de la langue naturelle peut encore une fois amener une meilleure interprétation de l'énoncé et ainsi faciliter la détermination de la valeur de vérité. Les choix du x et du y sont ici forcés, le registre graphique peut amener ces choix rapidement. Il est possible que cet aspect amène de meilleurs résultats qu'au point (a), la preuve étant ici beaucoup dirigée. Il y a moins de possibilités d'égarement dans la preuve.

Le point (d) amène une difficulté supplémentaire par rapport au point précédent : une implication. À nouveau, il y aura des étapes à introduire : déterminer que l'énoncé est faux, expliciter la négation et prouver qu'elle est vraie. Nous pensons que la détermination de la négation est plus délicate ici qu'au point (a) suite à l'introduction de la notion d'implication.

I.3.3 Résultats et interprétation

Dans le but de déterminer si les étudiants ont des difficultés avec le langage mathématique, autant dans la syntaxe que dans le sens qu'il prend lors de la rédaction d'une preuve (notion de représentant, d'élément générique, d'exhibition de valeur pour un $\exists$, ...), nous portons principalement notre attention sur les points suivants :

1. l'étudiant détermine correctement la négation au niveau syntaxique,
2. l'étudiant utilise un vocabulaire adapté pour l'instanciation des variables quantifiées,
3. l'étudiant structure sa preuve en suivant l'ordre d'apparition des quantificateurs dans l'énoncé qu'il prouve.

Nous avons retenu les copies d'étudiants ayant tenté de répondre à la question. Nous avons ainsi retenu 45 copies. Nous reprenons ci-dessous la répartition de la moyenne globale par sous-question.

Question (a)	Question (b)	Question (c)	Moyenne globale
$53,3\%$	$87,2\%$	$27,2\%$	$55,9\%$

La moyenne globale des copies analysées est de $55,9\%$. Ces résultats montrent que plus l'énoncé contient et mélange les symboles mathématiques, comme l'implication et les quantificateurs, plus la moyenne est basse, indicateur que la maîtrise du langage mathématique influence probablement la qualité de rédaction de preuve.

Nous commençons par commenter les résultats de la question (b). Celle-ci a été très bien réussie, $95,6\%$ des étudiants ont bien déterminé la valeur de vérité de l'énoncé. Il n'y a aucune trace de l'utilisation du registre graphique ni du registre de la langue naturelle, ce qui n'exclut pas qu'ils aient été utilisés dans les brouillons. Les erreurs commises par les étudiants ayant bien répondu au vrai/faux sont en général des problèmes d'écriture comme « prenons $x, y = 0$ » ou encore « montrons que $p(x, y) = 0$ ».

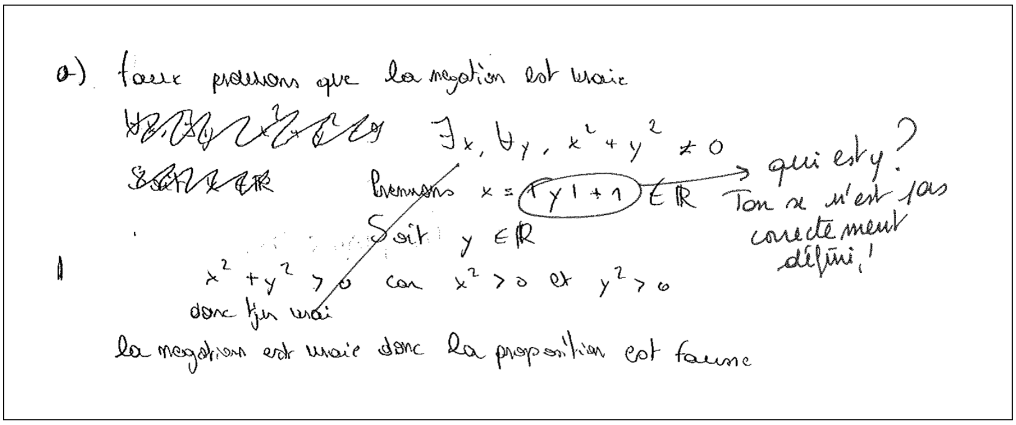
La question (a) a été moins bien réussie alors que 93% des étudiants ont bien déterminé la valeur de vérité de l'énoncé. La perte des points est donc provoquée par la justification et principalement par les instanciations des variables. En effet, seulement 69% des étudiants ont correctement instancié les variables. Ainsi, nous avons isolé trois problèmes fréquents liés à l'instanciation :

1. l'étudiant instancie une variable quantifiée universellement avec le bon mot mais donne une valeur précise à la variable par la suite (illustré par la FIGURE I.12),
2. l'étudiant instancie une variable en la faisant dépendre d'une variable non définie (illustré par la FIGURE I.10),
3. l'étudiant ne respecte pas l'ordre d'introduction des quantificateurs dans l'énoncé et instancie les variables dans un ordre différent (illustré par la FIGURE I.11).

Ces trois difficultés mettent chacune en avant plusieurs confusions sur la notion de quantificateur. La première peut découler d'une incompréhension de la notion de représentant et donc indirectement du sens du quantificateur universel lors d'une preuve. La deuxième peut résulter d'une incompréhension de la portée des variables instanciées. La dernière peut montrer une lacune sur les liens entre les quantificateurs dans un énoncé. En ce qui concerne la donnée de la négation, $83,3\%$ des étudiants ayant répondu faux l'ont correctement explicitée, ce qui est négligeable pour justifier la moyenne obtenue.

La question (d) affiche la moyenne la plus basse. Cette moyenne découle de deux points : des erreurs liées à l'instanciation des variables, très similaires à celles rencontrées lors de la question (b) ainsi que des problèmes lors de l'explicitation de la négation. À nouveau, une majeure partie des étudiants ont bien déterminé la valeur de vérité de l'énoncé ($93,3\%$), mais parmi ceux-ci, seulement $55,9\%$ ont explicité correctement la négation et c'est principalement à cause de l'implication.

Dans ces analyses, on distingue donc deux types de problèmes. Le premier, lié à la syntaxe, se manifeste lorsqu'il faut donner la négation d'un énoncé. Notons cependant que la notion de quantificateur n'est pas la principale source de difficulté dans ce cas. Il s'agit de l'implication. Le second est lié à la sémantique : des problèmes de compréhension du sens logique du quantificateur amènent des problèmes dans les rédactions, principalement liés à l'instanciation des variables.



a) faux prouvons que la negation est vraie

$\exists x, \forall y, x^2 + y^2 \neq 0$

Prenons $x = |y| + 1 \in \mathbb{R}$ → qui est y ? Ton x n'est pas correctement défini !

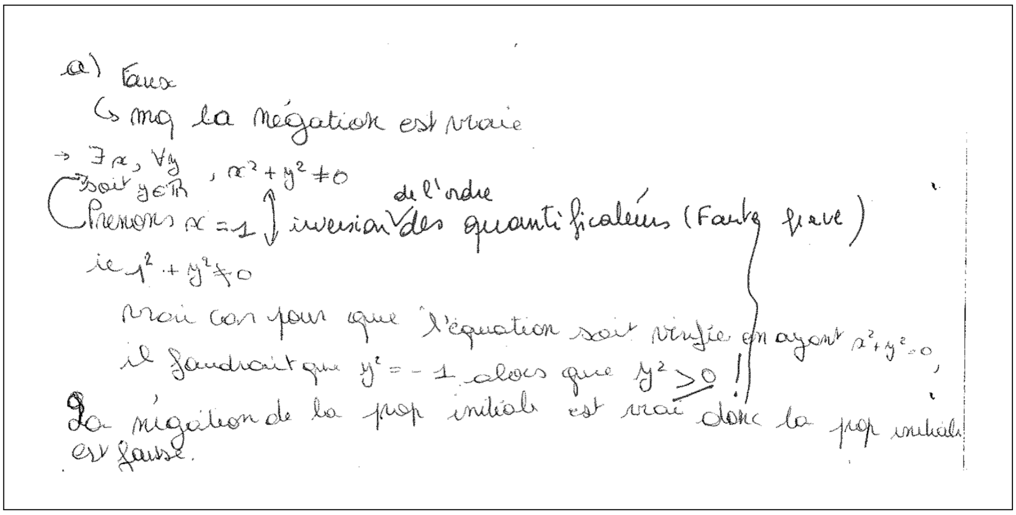
Soit $y \in \mathbb{R}$

$x^2 + y^2 > 0$ car $x^2 > 0$ et $y^2 > 0$

donc P vrai

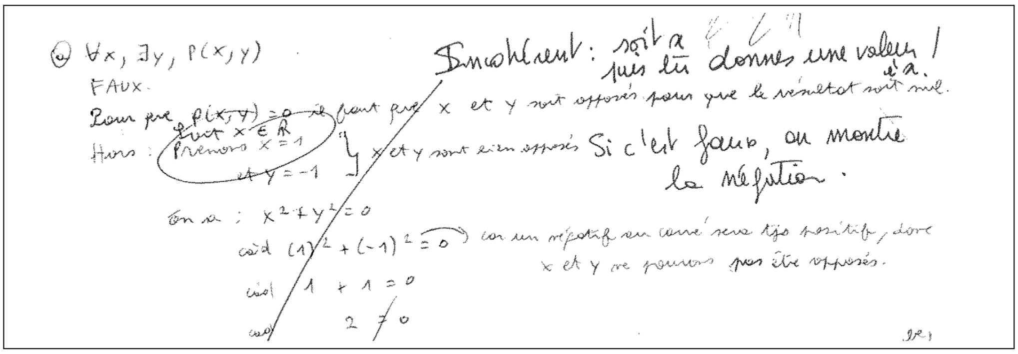
la negation est vraie donc la proposition est fausse

FIGURE I.10 – Extrait de copie - 1



a) Faux
↳ mq la négation est vraie
→ $\exists x, \forall y$, $x^2+y^2 \neq 0$
Soit $y \in \mathbb{R}$
Prenons $x = 1$ } inversion de l'ordre des quantificateurs (Faute grave)
ie $1^2 + y^2 \neq 0$
vrai car pour que l'équation soit vérifiée en ayant $x^2+y^2=0$,
il faudrait que $y^2 = -1$ alors que $y^2 \geq 0$!
La négation de la prop initiale est vraie donc la prop initiale est fausse.

Figure I.11 – Extrait de copie - 2



a) $\forall x, \exists y, P(x,y)$
FAUX.
Pour que ~~$P(x,y)=0$ il faut que~~ x et y soient opposés pour que le résultat soit nul.
Alors : Soit $x \in \mathbb{R}$ Prenons $x = 1$ et $y = -1$ } x et y sont bien opposés
On a : $x^2+y^2=0$
c-à-d $(1)^2+(-1)^2=0$ car un négatif au carré sera tjs positif, donc x et y ne pourront pas être opposés.
c-à-d $1+1=0$
c-à-d $2 \neq 0$

Incohérent : soit x puis lui donner une valeur de x !
Si c'est faux, on montre la négation.

Figure I.12 – Extrait de copie - 3

I.4 Bilan

Les analyses précédentes renseignent sur l'importance de la maîtrise du langage mathématique et donc des quantificateurs qu'un étudiant doit avoir. Les programmes du secondaire indiquent que l'étudiant qui rentre à l'université peut organiser un raisonnement et utiliser un langage précis et rigoureux. Cependant, ceux-ci n'indiquent pas comment l'étudiant est capable de le mettre en œuvre, ce qui pourrait amener des différences de connaissances.

Les analyses des copies d'étudiants de première année du bachelier en informatique nous montrent que les étudiants n'éprouvent pas de grande difficulté à déterminer la valeur de vérité d'un énoncé (en traduisant potentiellement l'énoncé dans un langage courant) mais que ceux-ci peinent à réaliser une preuve et à justifier correctement leurs démarches, même après avoir suivi un cours consacré à développer ces aspects.

On se rend alors compte que le langage mathématique peut rester un obstacle pour une partie des étudiants et que la manipulation de celui-ci peut amener des erreurs de rédaction. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons donc à l'enseignement du langage mathématique et plus particulièrement des quantificateurs. Dans ce but, nous présentons tout d'abord dans le chapitre suivant quelques éléments d'épistémologie sur la notion de quantificateur.

Chapitre II

Quelques éléments d'épistémologie sur la notion de quantificateur

Dans cette partie nous détaillons la construction de la notion de quantificateur et présentons un système de déduction naturelle, formalisant la manipulation des quantificateurs dans une preuve. Nous poursuivons en analysant des travaux antérieurs sur la notion de quantificateur mettant en avant plusieurs difficultés didactiques à prendre en compte lorsqu'on traite de la notion avec des élèves ou des étudiants.

II.1 Notion de quantificateur et de formule

Alors que la logique avait déjà sa place dans les mathématiques du temps d'Aristote, c'est principalement à Tarski (1936) [16] que nous devons l'utilisation et la beauté de la logique actuelle. En effet, dans ses travaux, Tarski distingue la logique syntaxique et la logique sémantique. Alors qu'en logique syntaxique, Tarski traite de façon abstraite des énoncés mathématiques, sans les interpréter dans un domaine précis, il leur donne des valeurs de vérité lorsqu'il les traite en logique sémantique. Afin de détailler la notion de quantificateur, nous allons suivre le raisonnement de Tarski en commençant tout d'abord par la construction de celui-ci. S'en suivra l'interprétation des symboles dans une partie sémantique.

II.1.1 Syntaxe

Afin de construire syntaxiquement le quantificateur, nous nous raccrochons à la Théorie des Modèles. La Théorie des Modèle est une branche de la logique mathématique qui traite de la construction de structures telles que les corps, des groupes, ...

Dans cette section, nous ne parlerons donc pas de valeur de vérité d'énoncés et de formules, dès lors qu'il s'agit uniquement de syntaxe.

Nous réalisons cette construction de la même façon qu'elle est faite dans les travaux de Tent et Ziegler [17].

Le quantificateur faisant partie intégrante de formules et d'énoncés, eux-mêmes constitués de symboles, nous commençons par introduire la notion de langage.

Définition (Langage)**.** Un langage est un 3-uplet $\Big((f_i)_{i\in I}, (R_j)_{j\in J}, (c_k)_{k\in K}\Big)$ où :

1. I, J, K sont des ensembles quelconques, finis ou infinis,
2. $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de symboles de fonctions,
3. $(R_j)_{j\in J}$ est une famille de symboles de relations,
4. $(c_k)_{k\in K}$ est une famille de symboles de constantes.

Chaque symbole de fonction et de relation étant muni d'une arité $n \in \mathbb{N}_0$

Lorsque c'est suffisamment explicite, les symboles ne sont pas placés en familles, c'est-à-dire que nous abuserons de la notation de langage en disant qu'un symbole C appartient au langage $\mathcal{L}$ en écrivant $C \in \mathcal{L}$.

Exemple (Langages)**.** $(+, \cdot, 0, 1)$ est appelé langage des corps. $(+, \cdot, 0, 1, <)$ est appelé langage des corps ordonnés.

Nous sommes maintenant capable de définir un terme, élément articulé dans les formules que nous définissons à la suite.

Définition (Terme)**.** Soit $\mathcal{L}$, un langage. Un terme est une expression syntaxique du type :

1. x, où x est un symbole de variable,
2. c, où c est un symbole de constante de $\mathcal{L}$,
3. $f(t_1, \ldots, t_n)$, où f est un symbole de fonction d'arité $n \in \mathbb{N}_0$ de $\mathcal{L}$ et $t_1, \ldots, t_n$, des termes.

Remarque. Pour la construction des termes, il faut noter que nous avons une infinité de variables à disposition.

Exemple (Termes)**.** En nous plaçant dans le langage des corps, les expressions suivantes sont des termes :
— x,
— $(x+1)\cdot y$,
— 1.

Dans le cadre de la sémantique, lors de l'interprétation des termes dans des structures bien précises, ceux-ci ne seront pas susceptibles de prendre une valeur de vérité. C'est la notion de formule atomique qui apporte cet aspect.

Définition (Formule atomique)**.** Soit $\mathcal{L}$, un langage. Une formule atomique est une expression du type :

1. $t_1 = t_2$ où t_1 et t_2 sont deux termes du langage $\mathcal{L}$,
2. $R(t_1, \ldots, t_n)$, où $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes du langage $\mathcal{L}$ et R un symbole de relation d'arité $n \in \mathbb{N}_0$ de $\mathcal{L}$

À partir des formules atomiques, nous pouvons construire par induction les formules finies. Nous détaillons cette induction. Si $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ sont des formules (atomiques ou non), alors :

1. $\neg\varphi$ est une formule,
2. $\varphi_1 \vee \varphi_2$ est une formule.

Dès lors, nous introduisons les notations $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ pour l'abréviation de la formule $\neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$ et $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ pour $\neg\varphi_1 \vee \varphi_2$.

Aussi, afin de faciliter la visualisation des formules, nous introduisons la notation $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ pour exprimer une formule φ dans laquelle apparaissent les symboles de variables *libres* $x_1, \ldots, x_n$ (que nous détaillons plus loin).

Le quantificateur est en réalité l'aboutissement de la construction des formules et il n'est autre qu'une abréviation de symboles. Ainsi, afin de clôturer la description d'une formule, nous ajoutons les formules suivantes :

$$\bigwedge_x \psi(x, y_1, \ldots, y_n)$$

et

$$\bigvee_x \psi(x, y_1, \ldots, y_n)$$

où la première est une conjonction sur x et la seconde une disjonction sur x. Dès lors, nous dirons que la variable x est liée dans les deux expressions précédentes alors que les variables $y_1, \ldots, y_n$ sont dites libres.

Nous pouvons maintenant poser les notations suivantes.

Notation. Nous notons $\forall x,\ \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ pour

$$\bigwedge_x \psi(x, y_1, \ldots, y_n)$$

et $\exists x,\ \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ pour

$$\bigvee_x \psi(x, y_1, \ldots, y_n)$$

II.1.2 Sémantique

La sémantique permet d'interpréter des formules et énoncés (formules sans variable libre) afin de leur attribuer une valeur de vérité [1] en fonction du domaine dans lequel nous nous plaçons. C'est ce qu'apporte la notion de structure.

Définition ($\mathcal{L}$-structure)**.** Soit $\mathcal{L}$, un langage. Une $\mathcal{L}$-structure est la donnée du couple $\mathcal{A} = \left(A, (Z^{\mathcal{A}})_{Z \in \mathcal{L}}\right)$ où

1. A est non-vide,
2. $Z^{\mathcal{A}} \in A$ si Z est un symbole de constante,
3. $Z^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ si Z est un symbole de fonction d'arité $n \in \mathbb{N}_0$,
4. $Z^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ si Z est un symbole de relation d'arité $n \in \mathbb{N}_0$.

Exemple ($\mathcal{L}$-structure)**.** $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ est une structure du langage des corps ordonnés.

Dès lors, au sein d'une structure, nous pouvons maintenant naturellement définir l'interprétation d'un terme, simplement en interprétant l'ensemble des symboles qui le constituent. La définition suivante nous détaille l'interprétation. Pour la suite de la section, nous fixons un langage $\mathcal{L}$.

Définition (Interprétation d'un terme)**.** Soit $\mathcal{A}$, une $\mathcal{L}$-structure.
Soit $t(x_1, \ldots, x_n)$, un terme constitué de n variables et $(a_1, \ldots, a_n) \in A$. On définit l'interprétation de $t(a_1, \ldots, a_n)$, notée $t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$, par induction grâce aux trois points suivants :

1. $x_i^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$,

1. C'est-à-dire vrai ou faux.

2. $c^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = c^{\mathcal{A}}$, où c est un symbole de constante de $\mathcal{L}$,
3. $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}})$ où f est un symbole de fonction d'arité $n \in \mathbb{N}_0$ de $\mathcal{L}$ et $t_1, \ldots, t_n$, des termes.

Une fois interprété, un terme est donc un élément du domaine de la structure. Il ne prend pas de valeur de vérité. L'interprétation des formules consiste en une fonction qui prend en paramètre une formule et des éléments du domaine de la structure et qui retourne une valeur de vérité, vraie ou fausse que nous noterons pour plus de simplicité 0 pour faux et 1 pour vrai. Nous détaillons l'interprétation.

Définition (Interprétation d'une formule atomique)**.** Soit $\mathcal{A}$, une $\mathcal{L}$-struc--ture. Soit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, une formule atomique constituée de $n \in \mathbb{N}_0$ variables libres et $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. Alors on définit l'interprétation de $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$, notée $\varphi^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ grâce aux points suivants :

1. $(t_1(\bar{a}) = t_2(\bar{a}))^{\mathcal{A}} = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1^{\mathcal{A}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{A}}(\bar{a}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $(R(\bar{a}))^{\mathcal{A}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{a} \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

L'interprétation de $\varphi_1(\bar{a}) \vee \varphi_2(\bar{a})$ ainsi que de $\neg\varphi(\bar{a})$ se fait naturellement grâce aux tables de vérité que nous rappelons ci-dessous :

$\varphi_1^{\mathcal{A}}(\bar{a})$	$\varphi_2^{\mathcal{A}}(\bar{a})$	$(\varphi_1(\bar{a}) \vee \varphi_2(\bar{a}))^{\mathcal{A}}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{a})$	$(\neg\varphi(\bar{a}))^{\mathcal{A}}$
0	1
1	0

L'interprétation des formules quantifiées se fait alors à l'aide des tableaux précédents[2]. Ainsi, pour une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$, $\big(\forall x,\ \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\big)^{\mathcal{A}} = 1$ si et seulement si, substitué à la variable x, tous les éléments de A rendent vraie l'interprétation de $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$. D'autre part, $\big(\exists x,\ \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\big)^{\mathcal{A}} = 1$ si et seulement si, substitué à la variable x, au moins un élément de A rend vraie l'interprétation de $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Notons aussi que ces interprétations sémantiques permettent de déduire les deux faits suivants :

2. Dans le cas d'un domaine infini, il faudrait être plus formel mais l'ordre d'idée reste le même.

1. Interprétées, les formules $\neg(\forall x,\ \varphi(x))$ et $\exists x,\ \neg\varphi(x)$ donnent les mêmes valeurs de vérité.
2. Interprétées, les formules $\neg(\exists x,\ \varphi(x))$ et $\forall x,\ \neg\varphi(x)$ donnent les mêmes valeurs de vérité.

Nous réalisons un tableau récapitulatif afin d'avoir une vision d'ensemble sur l'interprétation des éléments syntaxiques :

Objet syntaxique	Interprétation
Terme constitué de n variable(s) $(n \in \mathbb{N})$	$A^n \to A$
Formule constituée de n variable(s) libre(s) $(n \in \mathbb{N})$	$A^n \to \{0, 1\}$

Exemple (Syntaxe et sémantique)**.** Considérons la structure $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ notée $\mathcal{R}$ et les expressions syntaxiques suivantes :

- $t(x, y) \equiv x + y - x \cdot y$
- $\varphi(x, y) \equiv x < x \cdot y$

Dès lors, $t^{\mathcal{R}}(x, y)$ est une fonction de domaine $\mathbb{R}^2$ à images réelles. Par exemple, $t^{\mathcal{R}}(4, 2) = -2$. L'expression $\varphi^{\mathcal{R}}(x, y)$ est une fonction de domaine $\mathbb{R}^2$ à images dans $\{0, 1\}$. Par exemple, $\varphi^{\mathcal{R}}(4, 2) = 1$.

Nous verrons plus loin que la distinction entre syntaxe et sémantique peut être une source de difficultés chez l'étudiant.

II.2 Principe de preuve logique

Durand-Guerrier (2012) [10] rappelle les travaux réalisés par Wittgenstein et Tarski (1936) [16] qui proposent *un point de vue sémantique sur la validité* en distinguant la validité logique de la validité dans une interprétation. Nous reprenons dans cette section des éléments du travail de Durand-Guerrier et nous introduisons un outil de preuve développé par Copi.

II.2.1 Validité logique et validité dans une interprétation

Durand-Guerrier distingue deux types de vérités en logique mathématique : la validité logique et la validité dans une interprétation.

Pour cela, elle évoque l'importance de deux types d'énoncés jouant un rôle fondamental dans le système de preuves logiques : les tautologies et les contradictions. Pour nous raccrocher à la section précédente, la tautologie est un énoncé (formule sans variable libre) dont la valeur de vérité est constante et égale à 1 et ce, quelle que soit la structure dans laquelle il est interprété en logique sémantique. *A contrario*, la contradiction est un énoncé dont la valeur de vérité est constante et égale à 0 et ce, quelle que soit la structure dans laquelle il est interprété.

Les tautologies, aussi appelées lois logiques, constituent alors les théorèmes du système logique. Autrement dit, ce sont elles qui définissent la notion de déduction logique dans la réalisation de preuve. Parmi les lois logiques les plus connues, nous distinguons :

1. $\varphi \vee \neg\varphi$ (principe du tiers exclu),
2. $\big[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3)\big] \Rightarrow (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_3)$ (principe de transitivité),
3. $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Leftrightarrow (\neg\varphi_2 \Rightarrow \neg\varphi_1)$ (principe de contraposition).

Par exemple, la transitivité de l'implication constitue une loi logique comme nous le montre le tableau de vérité suivant :

φ_1	φ_2	φ_3	$(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3)$	$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_3$	T
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

La validité logique est donc la propriété des tautologies. En parallèle, la validité dans une interprétation caractérise la valeur vraie ou fausse d'une proposition non-logique (qui n'est ni une tautologie, ni une contradiction). Ces propositions non-logiques permettent donc de décrire l'état des choses dans une structure.

II.2.2 La démonstration naturelle de Copi

La démonstration naturelle de Copi (1954) [6] est un système de déduction naturelle. C'est-à-dire qu'il permet de gérer l'introduction et l'élimination des connecteurs logiques et des quantificateurs (Durand-Guerrier, 2012 [10]).

Parmi les règles qui permettent de gérer l'introduction et l'élimination de connecteurs logiques, on distingue par exemple :

1. Le *Modus Ponens* qui constitue une règle d'élimination du connecteur logique d'implication. Ainsi, de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ et $P(a)$, on déduit $Q(a)$.
2. Le *Modus Tollens* qui constitue une règle d'élimination du connecteur logique d'implication. Ainsi, de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ et $\neg Q(a)$, on déduit $\neg P(a)$.
3. La règle d'introduction de l'implication : si sous l'hypothèse $P(x)$ on prouve $Q(x)$, on déduit $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Nous décrivons maintenant les quatre règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs de la démonstration naturelle de Copi.

De « $\forall x,\ P(x)$ », on déduit $P(a)$ où a est une constante individuelle quelconque substituée à x.
Cette règle, appelée *règle d'élimination du quantificateur universel*, est associée à la loi logique suivante :

$$\forall y,\ \Big(\big(\forall x,\ P(x)\big) \Rightarrow P(y)\Big)$$

Règle 1 *- Instanciation universelle (IU)*

De $P(a)$, on déduit « $\forall x,\ P(x)$ » où a est une constante d'objet quelconque considérée uniquement du point de vue de son appartenance au domaine de x.
Cette règle, appelée *règle d'introduction du quantificateur universel*, est associée à la proposition non-logique suivante :

$$\forall y,\ \big(P(y) \Rightarrow \forall x,\ P(x)\big)$$

La proposition étant non-logique, il faudra s'assurer du caractère générique a.

Règle 2 *- Généralisation universelle (GU)*

De $P(a)$, on déduit « $\exists x,\ P(x)$ » où a est une constante d'objet quelconque.
Cette règle, appelée *règle d'introduction du quantificateur existentiel*, est associée à la proposition logique suivante :

$$\forall y,\ \big(P(y) \Rightarrow \exists x,\ P(x)\big)$$

Règle 3 *- Généralisation existentielle (GE)*

De « $\exists x,\ P(x)$ », on déduit $P(a)$ où a est une constante d'objet vérifiant $P(a)$ mais dont on ne sait rien de plus.
Cette règle, appelée *règle d'élimination du quantificateur existentiel*, est associée à la loi non-logique suivante :

$$\forall y,\ \big(\exists x,\ P(x) \Rightarrow P(y)\big)$$

La proposition étant non-logique, il faut bien faire attention que y n'ait pas déjà été introduit.

Règle 4 *- Instanciation existentielle (IE)*

Remarque. Les règles 2 et 4 sont liées à des propositions non-logiques ce qui veut dire qu'il y a lieu de réaliser un travail de vérification. Ainsi, pour la règle 2, lorsqu'un élément a vérifie la proposition $P(x)$, il y a lieu de s'assurer si a est bien considéré comme élément générique, c'est-à-dire considéré uniquement par son appartenance au domaine. Il en va de même pour la règle 4. En effet, lorsqu'on déduit $p(y)$ de $\exists x,\ P(x)$, il faut s'assurer que y est le symbole d'un élément qui n'a pas été introduit auparavant.

La démonstration naturelle de Copi permet, entre autre, de marquer la limite entre la preuve de la validité logique et la preuve de la validité dans une interprétation. Pour illustrer ce phénomène, nous reprenons la démonstration de la validité logique établie par Durand-Guerrier (2012) suivante :

$$\forall x,\ \forall y, \big(P(x) \Rightarrow Q(x,y)\big) \Rightarrow \forall x,\ \big(P(x) \Rightarrow \forall y,\ Q(x,y)\big) \qquad (T)$$

Preuve par la démonstration naturelle de Copi :

$\big[\ \forall x,\ \forall y, \big(P(x) \Rightarrow Q(x,y)\big)$	(1)	Prémisse auxiliaire
$\forall y, \big(P(a) \Rightarrow Q(a,y)\big)$	(2)	IU sur (1) pour x
$P(a) \Rightarrow Q(a,b)$	(3)	IU sur (2) pour y
$[\ P(a)$	(4)	Prémisse auxiliaire
$Q(a,b)$	(5)	Modus Ponens sur (3) et (4)
$\forall y,\ Q(a,y)\ ]$	(6)	GU sur (5) pour y
$P(a) \Rightarrow \forall y,\ Q(a,y)$	(7)	Introduction de l'implication sur (4) et (6)
$\forall x,\ \big(P(x) \Rightarrow \forall y,\ Q(x,y)\big)\big]$	(8)	GU sur (7) pour x
T	(9)	Introduction de l'implication sur (1) et (8)

Le déroulement de la preuve ne marque aucun arrêt nécessitant d'interpréter dans un domaine. La proposition (T) constitue donc bel et bien une loi logique. Nous donnons une autre proposition qui n'est pas une loi logique, nous établissons un début de preuve au sens de Copi et nous poursuivons sur une analyse didactique réalisée par Durand-Guerrier sur ce type de proposition :

$$\Big(\forall x,\ \exists y,\ P(x,y) \land \forall x,\ \exists y,\ Q(x,y)\Big) \Rightarrow \forall x,\ \exists y,\ \big(P(x,y) \land Q(x,y)\big) \qquad (T')$$

Début de preuve par la démonstration naturelle de Copi :

$\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)$	(1)	Prémisse auxiliaire
$\forall x,\ \exists y,\ Q(x,y)$	(2)	Prémisse auxiliaire
$\exists y,\ P(a,y)$	(3)	IU sur (1) pour x
$\exists y,\ Q(a,y)$	(4)	IU sur (2) pour x
$P(a,b)$	(3)	IE sur (3) pour y
$Q(a,c)$	(4)	IE sur (4) pour y

FIGURE II.1 – Début de preuve de (T')

On voit que nous ne pouvons pas continuer la preuve. En effet, comme l'explique Durand-Guerrier, il faudrait pouvoir réaliser une généralisation existentielle sur un énoncé de la forme $P(a,d) \wedge Q(a,d)$ mais comme expliqué dans la règle 4 de Copi, il nous est interdit d'utiliser la même lettre pour les instanciations existentielles de (3) et (4). Il s'agit alors de devoir interpréter pour continuer la preuve.

Lors de son étude, Durand-Guerrier a placé des étudiants scientifiques de première année universitaire devant cet énoncé interprété dans quatre domaines différents. Nous résumons son étude et nous mettons en évidence une première difficulté liée à la notion de quantificateur dans la section suivante.

II.3 Difficultés liées à la notion de quantificateur

Dans cette section, nous nous intéressons aux difficultés les plus couramment rencontrées par les étudiants avec la notion de quantificateur et qui ont été mises en évidence dans des travaux de recherche en didactique.

II.3.1 Problèmes liés l'instanciation existentielle

Durand-Guerrier (2015) [11] affirme que le calcul des prédicats est pertinent pour étudier le raisonnement mathématique en montrant que pour décider de la vérité d'un énoncé lorsque les règles d'inférence classiques ne s'appliquent pas (comme dans l'exemple donné par la figure II.1), l'étudiant est renvoyé aux objets en jeu (et donc à leurs propriétés). Dans Durand-Guerrier (2012) [10], un travail sur la règle d'instanciation existentielle (***Règle 4***) est réalisé.

Ainsi, elle place des étudiants devant les quatre énoncés suivants dont la valeur de vérité n'est pas donnée :

> Toute suite numérique telle que les suites extraites des termes de rang pair et de rang impair convergent vers une même limite est convergente et admet comme limite la limite commune à ces deux suites extraites.

FIGURE II.2 – Conjecture 1

> Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Montrer que si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a, b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que
>
> $$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

FIGURE II.3 – Conjecture 2

> Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Quelles que soient les parties A et B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

FIGURE II.4 – Conjecture 3

> Soient f et g deux fonctions numériques définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a un élément adhérant de A ; si $f(t)$ et $g(t)$ ont des limites respectives h et k lorsque t tend vers a en restant dans A, alors $f(t)+g(t)$ tend vers la limite $h+k$.

FIGURE II.5 – Conjecture 4

Notons premièrement que chaque conjecture est un problème pouvant se traduire par l'énoncé (T') présenté à la section précédente. Donc, la preuve débute de la même façon que dans la FIGURE II.1. La différence est que dans les FIGURES II.3 et II.4, la preuve ne peut pas être complétée en des preuves valides.

En analysant les copies des étudiants, Durand-Guerrier met en évidence que les aspects logiques et mathématiques sont étroitement imbriqués. Ainsi, si l'étudiant éprouve des difficultés à réaliser un contrôle logique (lié à la validité logique) et un contrôle mathématique (lié à l'interprétation dans un domaine), alors il éprouve des difficultés à contrôler la validité de ses preuves.

Deux erreurs récurrentes lors de la généralisation existentielle sont alors mises en avant :

1. une erreur de type logique directement liée à la remarque présente dans la ***Règle 4*** de la démonstration naturelle de Copi. L'étudiant ne réalise pas de contrôle sur la lettre introduite lors de l'instanciation existentielle et considère qu'il travaille avec le même objet lorsqu'il en instancie plusieurs,
2. une erreur de type mathématique consistant à supposer l'unicité de l'existence lors de l'instanciation.

Ce type d'erreur est directement lié au quantificateur existentiel lorsqu'il se trouve dans un énoncé utilisé comme hypothèse à une démonstration. D'autres difficultés sont liées à d'autres types d'utilisation des quantificateurs, c'est le sujet des sections suivantes.

II.3.2 Problèmes liés à la quantification implicite

Beaucoup d'auteurs mettent en avant plusieurs problèmes liés à la quantification explicite : on peut trouver des difficultés liées à l'interprétation dans la langue naturelle (Durand-Guerrier, 2015 [11]) ou encore l'interprétation d'énoncés non quantifiés (Adda, 1975 [1]). Nous reprenons ces deux points.

Durand-Guerrier met clairement en évidence que, si en langue naturelle les interprétations pour une phrase peuvent être multiples, elle est souvent unique pour un énoncé mathématique. Lorsqu'il y a lieu de réaliser des traductions du registre de la langue naturelle vers le registre symbolique, des divergences peuvent apparaître. Voici un exemple repris de Durand-Guerrier (2015) [11] qui illustre ce fait. Considérons la phrase suivante : *« Un chat ronronne »* et posons C l'ensemble de tous les chats, c un élément particulier de C et $P(x)$ la propriété qui traduit que x ronronne. Si on demande de traduire cette phrase en mathématique, on peut s'attendre à plusieurs résultats :

1. $P(c)$,
2. $\exists x \in C,\ P(x)$,
3. $\forall x \in C,\ P(x)$.

La première traduction fait allusion à un chat bien particulier qui ronronne. La deuxième interprète le « un » comme annonciateur de l'existence d'un tel chat. La dernière considère que la phrase annonce une généralité.

Un deuxième problème lié à cette quantification implicite est l'interprétation d'un énoncé mathématique en langage symbolique. Adda (1975) [1] rappelle l'interrogation d'un étudiant sur l'affirmation suivante : « Nous avons toujours $\big(A \Rightarrow B\big) \vee \big(B \Rightarrow A\big)$ ». L'étudiant affirmait que nous n'avons pas

$$x < y \Rightarrow x = y$$

ou bien

$$x = y \Rightarrow x < y$$

Il s'agit alors d'un problème d'interprétation de l'énoncé car, en réalité, dans son interprétation, l'étudiant n'avait pas tort vu que la quantification était implicite. Ainsi, l'énoncé de départ peut être interprété des deux façons différentes suivantes, l'une donnant lieu à une tautologie et l'autre non :

1. $\forall A,\ \forall B,\ (A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow A)$,
2. $(\forall A,\ \forall B,\ A \Rightarrow B) \vee (\forall A,\ \forall B,\ B \Rightarrow A)$ (interprétation de l'étudiant).

Une autre conséquence de la quantification implicite sont les différentes interprétations du symbole d'égalité amenant des confusions chez l'étudiant. En effet, lorsque nous écrivons

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

et

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nous sous-entendons que la première expression est quantifiée universellement alors que la seconde est quantifiée existentiellement.

Ces analyses montrent qu'il est toujours important de quantifier les énoncés même si le contexte semble suffisamment clair, d'autant plus lorsque le contexte est donné dans le registre de la langue naturelle. En effet, c'est souvent le contexte qui amène les erreurs chez les étudiants (Durand-Guerrier, 1996 [9]).

II.3.3 Problème d'inversion des quantificateurs

Beaucoup d'auteurs mettent en avant des difficultés liées à l'inversion des quantificateurs dans l'interprétation sémantique d'un énoncé. C'est notamment un problème que nous avons isolé dans les analyses menées à la section I.3.

Ainsi, sur des énoncés présentant les deux quantificateurs, les étudiants ont tendance à interpréter la même propriété en les inversant. Adda (1975) [1] affirme que ce problème peut être lié au passage du registre symbolique au registre de la langue naturelle, notamment à cause d'une mauvaise utilisation de l'expression « tel que » . Illustrons cela sur les deux énoncés suivants :

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ y > x \qquad (1)$$

$$\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ y > x \qquad (2)$$

Adda constate en faisant lire ces énoncés à des étudiants que ceux-ci traduisent parfois l'énoncé (2) par la phrase : « Il existe y pour tout x tel que $y > x$ » au lieu de « Il existe y tel que, pour tout x, $y > x$ ». De cette façon, la lecture de l'énoncé (2) s'interprète de la même façon que l'énoncé (1), ce qui est une erreur.

Adda souligne le fait que les symboles « $\exists x$ » ont le plus souvent été définis comme étant l'abréviation de « Il existe x » alors que, comme ils sont définis dans la section II.1, ils devraient être définis comme étant l'abréviation de « Il existe x tel que ».

Une étude de Chellougui (2001) [4] montre aussi que ce type de problème est lié aux difficultés dans la conversion d'énoncés du registre de la langue naturelle au registre symbolique (et inversement) et ajoute que cela peut amener des difficultés pour énoncer la négation d'un énoncé.

II.3.4 Problèmes liés au domaine d'interprétation

Les problèmes liés au domaine introduisent une confusion entre la syntaxe et la sémantique, tel que nous l'avons défini dans la section II.1. Ainsi, Adda (1975) [1] explique que les étudiants ne sont pas habitués à considérer un énoncé comme élément syntaxique, sans valeur de vérité, pouvant être interprété vrai dans une structure et faux dans une autre.

Chellougui (2001) [4] remarque aussi le phénomène du côté enseignant : le quantificateur universel est bien souvent employé sans pour autant faire référence au domaine dans des énoncés interprétés, ce qui alimente la confusion entre syntaxe et sémantique chez l'étudiant.

II.3.5 Problème de confusion des variables

Un autre problème, lié aux variables quantifiées, est mis en évidence par Adda et est lié à l'interprétation.

Adda fait remarquer que certains étudiants ont tendance à considérer une lettre de variable indépendamment de son occurrence. Autrement dit, certains étudiants interprètent l'énoncé

$$\exists t,\ P(t) \wedge \exists t,\ Q(t)$$

de la même façon qu'ils interprètent

$$\exists t, \big(P(t) \wedge Q(t)\big)$$

Ainsi, c'est à cause d'un tel problème que viendrait l'incompréhension du raisonnement par récurrence suivant :

$$\Big[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N},\ \big(P(n) \Rightarrow P(n+1)\big)\Big] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

où la lettre n est utilisée à deux reprises avec une signification différente.

II.4 Bilan

Ces quelques éléments d'épistémologie liés à l'étude de la notion de quantificateur et l'analyse des travaux antérieurs montrent des points à prendre en compte lorsque l'enseignant manipule des écritures quantifiées avec les étudiants. Ainsi, il est prudent de toujours quantifier les énoncés, même si le contexte semble suffisamment clair. Aussi, il faut faire attention à l'utilisation du registre de la langue courante. L'utilisation des mots « tel que » doit être faite avec prudence et les énoncés doivent être posés dans un contexte clair.

Il est aussi important de montrer à l'étudiant qu'un même énoncé peut être à la fois vrai ou faux en lien avec la structure dans laquelle nous nous trouvons ou encore avec le domaine des mathématiques traité, la quantification pouvant être utilisée dans plusieurs cadres.

Cette dernière remarque nous amène alors à considérer la quantification comme une notion paramathématique au sens de Chevallard (1985) [5], c'est-à-dire une *notion qui se rencontre dans l'environnement du travail mathématique pour y jouer le rôle d'outil de travail sans être elle-même des objets d'étude.*

Nous pensons que le cadre dans lequel la quantification est utilisée peut influencer l'apprentissage de celle-ci et prévenir plus ou moins bien certaines difficultés citées dans ce chapitre. Le choix d'un cadre doit donc être un point important lorsqu'on décide de travailler la notion de quantificateur avec les élèves.

Durant notre parcours à l'Université de Mons, nous avons remarqué que la théorie des jeux est un domaine des mathématiques riche dans son utilisation de la quantification, tant pour son abondance d'utilisation que pour l'interprétation de celle-ci dans le cadre mathématique.

Nous consacrons donc le chapitre suivant à une notion de la théorie des jeux afin de mettre en évidence des points qui pourraient prévenir l'une ou l'autre difficulté que nous avons isolée précédemment et nous en découlons une problématique.

Chapitre III

Problématique et méthodologie

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire les différentes notions de la théorie des jeux que nous pensons appropriées pour travailler la notion de quantificateur avec des élèves du secondaire. Nous poursuivons en expliquant la façon avec laquelle nous pouvons adapter ces notions dans le but de les rendre accessibles aux élèves du secondaire. De ce travail, nous émettons une problématique et nous détaillons la méthodologie que nous employons pour y répondre.

III.1 La théorie des jeux

La théorie des jeux est un domaine des mathématiques qui s'intéresse aux interactions entre des entités, appelées « joueurs », conscients de ces interactions et de leurs effets. Dans ce domaine, nous avons décidé de retenir la notion de jeu sous forme normale. En effet, nous pensons que cette notion est l'une des plus accessibles pour les élèves de fin du secondaire. De plus, cette notion est riche dans son utilisation des quantificateurs.

III.1.1 Les jeux sous forme normale

Les jeux sous forme normale sont les jeux où les joueurs jouent de façon simultanée en choisissant une action et en ayant une information parfaite du jeu : ils connaissent les actions possibles de tous les joueurs et ce qu'ils peuvent gagner. Nous commençons donc par définir mathématiquement un jeu sous forme normale et nous poursuivons en expliquant le déroulement d'un tel jeu.

Définition (Jeu sous forme normale)**.** Un jeu sous forme normale (ou stratégique) est un triplet $\Big(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\Big)$ où

1. N est un ensemble fini et non-vide de joueurs. Typiquement, $\exists k \in \mathbb{N}_0,\ N = \{1, \ldots, k\}$,
2. $\forall i \in N,\ A^i$ est l'ensemble non-vide des stratégies du joueur i,
3. $\forall i \in N,\ g^i : \prod_{k\in N} A^k \to \mathbb{R}$ est la fonction de gain du joueur i.

Dans le cadre de la théorie des jeux, on considère souvent que tous les joueurs sont égoïstes en ce sens qu'ils cherchent à maximiser leurs gains sans prendre en compte les gains des autres. Détaillons le déroulement d'un jeu sous forme normale.

Déroulement

1. Chaque joueur $i \in N$ choisit une stratégie $a^i \in A^i$. Ce choix est simultané et sans communication entre les joueurs. On obtient ainsi un profil de stratégie $a = (a^i)_{i\in N}$.
2. Chaque joueur $i \in N$ obtient $g^i(a)$.

Nous ne traitons ici que les jeux finis, c'est-à-dire où les ensembles de stratégies sont finis et mettant en jeu exactement deux joueurs, c'est-à-dire où $N = \{1, 2\}$.

Puisqu'un jeu sous forme normale à deux joueurs est entièrement défini par les stratégies et les gains, nous les représentons sous forme de tableau contenant les couples de gains des deux joueurs.

Ainsi, pour un jeu $G = \Big(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\Big)$ où $A^1 = \{a^1, \ldots a^n\}$ et $A^2 = \{b^1, \ldots b^m\}$, $(n, m \in \mathbb{N}_0)$, on écrit :

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & b^1 & \ldots & b^m \\
\hline
a^1 & \Big(g^1(a^1,b^1), g^2(a^1,b^1)\Big) & \ldots & \Big(g^1(a^1,b^m), g^2(a^1,b^m)\Big) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a^n & \Big(g^1(a^n,b^1), g^2(a^n,b^1)\Big) & \ldots & \Big(g^1(a^n,b^m), g^2(a^n,b^m)\Big)
\end{array}
$$

Voici deux exemples de jeux sous forme normale finis à deux joueurs.

Exemple (Dilemme du prisonnier)**.** Deux personnes suspectes sont interrogées séparément pour un même méfait. Chaque personne possède deux choix. Le premier consiste à parler en accusant l'autre personne. Il leur est aussi possible de se taire. Leur peine de prison est ensuite calculée comme suit. Si les deux se taisent, ils ont chacun deux ans de prison. Si l'un se tait et l'autre parle, la personne accusée obtient une peine de dix ans de prison alors que l'autre personne est libre. Si les deux personnes parlent, elles se retrouvent toutes deux en prison pendant cinq ans.

Voici le jeu sous la forme de tableau :

	Parler	Se taire
Parler	$(-5,-5)$	$(0,-10)$
Se taire	$(-10,0)$	$(-2,-2)$

Exemple (Pierre, papier, ciseaux !)**.** Deux personnes s'affrontent en choisissant chacun simultanément une stratégie parmi pierre, papier, ciseaux. Nous avons que la pierre gagne contre les ciseaux, les ciseaux gagnent contre le papier et le papier gagne contre la pierre. Ainsi, le gain associé à la victoire est 1, il est de -1 pour la défaite. Lorsque chaque joueur utilise la même stratégie, c'est un match nul et chacun remporte un gain nul.

Voici le jeu sous la forme de tableau :

	Pierre	Papier	Ciseaux
Pierre	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
Papier	$(1,-1)$	$(0,0)$	$(-1,1)$
Ciseaux	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(0,0)$

III.1.2 Notion de stratégie dominante et de stratégie dominée

Dans un jeu à deux joueurs, en considérant l'hypothèse qu'un joueur cherche à maximiser son gain, nous pouvons assurer que si un joueur possède une stratégie lui offrant un meilleur gain que ses autres stratégies et ce, quelle que soit la stratégie employée par le joueur adverse, il la privilégiera. On appelle une telle stratégie une stratégie dominante.

Définition (Stratégie dominante)**.** Soit $\Big(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\Big)$, un jeu sous forme normale fini à deux joueurs. Soit $a^1 \in A^1$. On dit que a^1 est une stratégie dominante pour le joueur 1 si

$$\forall b^1 \in A^1,\ \forall a^2 \in A^2,\ g^1(b^1, a^2) \leqslant g^1(a^1, a^2)$$

Exemple (Dilemme du prisonnier)**.** Dans le dilemme du prisonnier, le fait de parler est une stratégie dominante. En effet, si le joueur 1 décide de parler, il obtient un meilleur gain que s'il s'était tu dans le cas où le deuxième joueur parle. Il en va de même si le deuxième joueur se tait. Le tableau suivant l'illustre (les nombres en rouge sont les gains obtenus en jouant la stratégie dominante).

	Parler	Se taire
Parler	$(-5, -5)$	$(0, -10)$
Se taire	$(-10, 0)$	$(-2, -2)$

Exemple (Pierre, papier, ciseaux !)**.** Dans cet exemple, il n'existe pas de stratégie dominante pour le joueur 1. C'est ce qu'exprime l'énoncé suivant :

$$\forall a^1 \in A^1,\ \exists b^1 \in A^1,\ \exists a^2 \in A^2,\ g^1(b^1, a^2) > g^1(a^1, a^2)$$

Une autre notion restant dans le même ordre d'idée que la stratégie dominante est la stratégie dominée. Une stratégie lambda est dite dominée pour le joueur 1 si il possède une stratégie qui, quelle que la stratégie employée par le second joueur, offre un gain plus élevé que la stratégie lambda. C'est ce qu'exprime la définition suivante.

Définition (Stratégie dominée)**.** Soit $\Big(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\Big)$, un jeu sous forme normale fini à deux joueurs. Soit $a^1 \in A^1$. On dit que a^1 est une stratégie dominée pour le joueur 1 si

$$\exists b^1 \in A^1,\ \forall a^2 \in A^2,\ g^1(a^1, a^2) \leqslant g^1(b^1, a^2)$$

Exemple (Dilemme du prisonnier)**.** Dans le jeu dilemme du prisonnier, se taire est une stratégie dominée.

Exemple (Pierre, papier, ciseaux !)**.** Dans cet exemple, il n'existe pas de stratégie dominée pour le joueur 1. C'est ce qu'exprime l'énoncé suivant :

$$\forall a^1 \in A^1,\ \forall b^1 \in A^1,\ \exists a^2 \in A^2,\ g^1(a^1, a^2) > g^1(b^1, a^2)$$

III.2 Adaptations possibles pour l'enseignement secondaire

Nous souhaitons nous placer dans le cadre de la théorie des jeux afin de travailler la notion de quantificateur avec les élèves du secondaire. Pour ce faire, il est nécessaire d'analyser le contenu de la section précédente et de l'adapter pour qu'il soit accessible aux élèves de fin du secondaire. Ainsi, nous repartons de l'analyse des programmes de la section I.2. Nous y avons mis en évidence que les programmes demandent un travail sur la logique et le langage mathématique mais nous avons aussi remarqué que ceux-ci ne précisent pas les notions qui permettent ce travail. Nous pouvons donc travailler la logique et le langage mathématique à partir de connaissances anciennes comme à partir de connaissances nouvelles. Dès lors, il semble intéressant de mettre en évidence l'ensemble des notions présentes dans la section précédente et de vérifier s'il s'agit de connaissances nouvelles ou anciennes pour les élèves du secondaire.

III.2.1 Les notions outils des jeux sous forme normale

Nous reprenons la définition de jeu sous forme normale pour mettre en évidence les objets mathématiques présents.

Définition (Jeu sous forme normale)**.** Un jeu sous forme normale (ou stratégique) est un triplet $\Big(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\Big)$ où

1. N est un ensemble fini et non-vide de joueurs. Typiquement, $\exists k \in \mathbb{N}_0,\ N = \{1, \ldots, k\}$,

2. $\forall i \in N,\ A^i$ est l'ensemble non-vide des stratégies du joueur i,

3. $\forall i \in N,\ g^i : \prod_{k \in N} A^k \to \mathbb{R}$ est la fonction de gain du joueur i.

Une notion très présente est la notion d'ensemble. Lorsque nous regardons dans les programmes du secondaire, la notion est connue des élèves et est principalement utilisée pour expliciter l'ensemble des solutions d'une équation ou d'une inéquation ou encore pour donner le domaine et l'ensemble image d'une fonction. Il s'agit donc principalement de sous-ensembles de nombres réels. L'utilisation de l'objet dans la définition est alors nouvelle. En effet, le travail sur des ensembles constitués d'objets quelconques (de stratégies par exemple) n'est pas abordé dans le secondaire. Notons aussi que nous avons choisi de nous limiter aux jeux finis pour que ces ensembles soient eux-mêmes finis. Nous pensons que le travail sur des ensembles finis amène moins de difficulté, principalement lorsqu'il s'agit de prouver une propriété universelle et que la notion de représentant d'un ensemble n'est pas encore acquise (nous détaillons ce point dans le chapitre suivant).

Une deuxième notion présente est la notion de fonction. Lorsque nous regardons dans les programmes, l'objet fonction apparaît en troisième année avec les fonctions du premier degré. Jusqu'en dernière année, les élèves manipulent uniquement des fonctions 1-aire, définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. L'utilisation de la fonction amène donc deux nouveautés. La première est le caractère 2-aire de la fonction, la deuxième est que les fonctions sont définies sur des ensembles quelconques.

En ce qui concerne les notions de stratégie dominante et de stratégie dominée, c'est la notion de quantificateur qui fait son apparition. C'est donc avec ces notions que nous devons travailler pour faire manipuler les quantificateurs aux élèves.

Nous nous rendons compte que la plupart des notions présentes ont déjà été introduites chez les élèves du secondaire mais que la théorie des jeux les met en application différemment. Dans le but de travailler la notion de quantificateur correctement, il y a donc intérêt à donner du sens aux nouvelles utilisations des notions. Or, la théorie des jeux utilise plusieurs registres d'écritures pour un jeu sous forme normale et Coppé, Dorier et Yavuz (2007) [7] nous rappellent que les changements de registres sont porteurs de sens pour les notions mathématiques en jeux. De plus, les programmes mettent un accent sur la communication en insistant sur la traduction et la reformulation des notions travaillées, ce qui nous amène à nous intéresser aux registres d'écritures des notions de la théorie des jeux.

III.2.2 Les registres d'écritures

En mathématiques, un registre est un mode d'écriture et de représentation de la notion (Duval, 1993 [12]). Par exemple, la notion de droite peut être représentée dans le registre graphique grâce à un dessin ou dans le registre algébrique en donnant son équation cartésienne.

Dans le cadre de la théorie des jeux, nous relevons trois registres d'écriture de la notion de jeu sous forme normale. D'une part, nous pouvons conserver le registre symbolique de la définition donnée dans la section précédente. Il s'agit alors d'expliciter symboliquement l'ensemble des joueurs, les ensembles des stratégies des deux joueurs ainsi que leurs fonctions de gain. La FIGURE III.1 illustre le dilemme du prisonnier dans ce registre.

$N = \{1, 2\}$.

$A^1 = A^2 = \{\text{Parler}, \text{Se taire}\}$.

$g^1 : A^1 \times A^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g^1(a^1, a^2) = \begin{cases} -10 & \text{si } a^1 = \text{Se taire et } a^2 = \text{Parler} \\ -5 & \text{si } a^1 = \text{Parler et } a^2 = \text{Parler} \\ -2 & \text{si } a^1 = \text{Se taire et } a^2 = \text{Se taire} \\ 0 & \text{si } a^1 = \text{Parler et } a^2 = \text{Se taire} \end{cases}$$

$g^2 : A^1 \times A^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g^2(a^1, a^2) = \begin{cases} -10 & \text{si } a^1 = \text{Parler et } a^2 = \text{Se taire} \\ -5 & \text{si } a^1 = \text{Parler et } a^2 = \text{Parler} \\ -2 & \text{si } a^1 = \text{Se taire et } a^2 = \text{Se taire} \\ 0 & \text{si } a^1 = \text{Se taire et } a^2 = \text{Parler} \end{cases}$$

FIGURE III.1 – Dilemme du prisonnier, registre symbolique

En théorie des jeux, le registre symbolique amène beaucoup de symboles et, comme le montre la FIGURE III.1, peut être lourd à lire sans amener beaucoup de sens au déroulement du jeu ou à l'interprétation qui lui est liée. Cette interprétation peut se transmettre par une explication du jeu avec des mots : c'est ce qu'on appelle le registre de la langue naturelle. Nous reprenons dans la FIGURE III.2 un extrait de la section précédente qui illustre le dilemme du prisonnier dans ce registre.

Deux personnes suspectes sont interrogées séparément pour un même méfait. Chaque personne possède deux choix. Le premier consiste à parler en accusant l'autre personne. Il leur est aussi possible de se taire. Leur peine de prison est ensuite calculée comme suit. Si les deux se taisent, ils ont chacun deux ans de prison. Si l'un se tait et l'autre parle, la personne accusée obtient une peine de dix ans de prison alors que l'autre personne est libre. Si les deux personnes parlent, elles se retrouvent toutes deux en prison pendant cinq ans.

FIGURE III.2 – Dilemme du prisonnier, registre de la langue naturelle

Le registre de la langue naturelle semble donner plus de sens à l'interprétation du jeu et pourrait donc amener les élèves à avoir une meilleure réflexion sur des propriétés du jeu. Cependant, les images des fonctions de gain sont moins précises. C'est la raison pour laquelle le tableau est un outil apprécié en théorie des jeux lorsqu'il s'agit d'avoir une information complète et structurée sur les gains. Le registre du tableau semble donc plus adapté pour donner plus de sens aux fonctions de gains des deux joueurs. La FIGURE III.3 illustre le dilemme du prisonnier dans ce registre d'écriture.

	Parler	Se taire
Parler	$(-5, -5)$	$(0, -10)$
Se taire	$(-10, 0)$	$(-2, -2)$

FIGURE III.3 – Dilemme du prisonnier, registre du tableau

Ainsi, les FIGURES III.1, III.2 et III.3 donnent la même information mais chacune de ces représentations semble avoir ses propres avantages. Le registre symbolique donne une information complète et structurée mais place l'interprétation du jeu au second plan. C'est le registre de la langue naturelle qui semble donner plus d'importance à l'interprétation du jeu. Le registre du tableau donne une information très complète sur les fonctions de gains mais place à nouveau l'interprétation du jeu au second plan.

Ainsi, nous pensons que chaque registre peut avoir son utilité et que chacun peut présenter des avantages en fonction de la situation d'apprentissage. Rappelons aussi que l'introduction des registres et le passage de l'un à l'autre permettent de donner du sens aux notions présentées dans la section précédente.

Outre les registres, nous présentons un autre élément de la théorie des jeux qui semble pertinent pour donner du sens aux notions étudiées.

III.2.3 Gestuelle associée aux jeux

Nous avons fait remarquer qu'à un jeu sous forme normale est associé un déroulement. Le but de celui-ci est de fixer les règles du jeu. Nous pensons qu'il permet aussi de donner du sens aux notions si nous demandons aux élèves d'appliquer ce déroulement et donc de jouer entre eux. Mais un avantage que nous voulons mettre en évidence, c'est que ce déroulement peut être rendu séquentiel et donc s'adapter à l'aspect séquentiel des énoncés quantifiés. Prenons par exemple les deux énoncés suivants pour un jeu à deux joueurs.

1. $\exists a^1 \in A^1,\ \forall a^2 \in A^2,\ g^1(a^1, a^2) \geqslant g^2(a^1, a^2)$
2. $\forall a^2 \in A^2,\ \exists a^1 \in A^1,\ g^1(a^1, a^2) \geqslant g^2(a^1, a^2)$

Le premier énoncé dit que le premier joueur dispose d'une stratégie qui lui permet d'obtenir un meilleur gain que son adversaire, quelle que soit la stratégie employée par celui-ci. Le deuxième dit que, quelle que soit la stratégie employée par son adversaire, le premier joueur dispose toujours d'une stratégie qui lui permet d'obtenir un meilleur gain que son adversaire.

Pour travailler ces énoncés, le déroulement du jeu peut être adapté et rendu séquentiel. Autrement dit, nous pouvons décider que les deux joueurs ne choisissent plus leurs stratégies simultanément mais l'un après l'autre. Ainsi, on peut faire jouer un élève considéré comme joueur 1 puis un autre élève pour tenter de donner du sens au premier énoncé ou encore faire jouer un premier élève pour ensuite demander à un autre élève s'il est capable de gagner contre son adversaire pour travailler le second énoncé. De cette façon, les élèves peuvent visualiser de telles propriétés et nous pensons que cette gestuelle peut être porteuse de sens.

Ce type de travail auprès des élèves rentre dans la description des proximités-en-acte étudiées par Bridoux, Genier-Boley, Hache et Robert (2016) [2]. Nous détaillons cet outil didactique dans le chapitre suivant.

III.3 Problématique

Dans le chapitre II, nous avons mis en évidence différentes difficultés rencontrées par les apprenants dans l'optique de travailler la notion de quantificateur avec des élèves du secondaire. Au vu du caractère paramathématique de la notion de quantificateur, nous avons fait le choix de nous plonger dans le cadre de la théorie des jeux pour manipuler la quantification avec des élèves du secondaire. La section précédente explique ce choix : la théorie des jeux et plus particulièrement la notion de jeu sous forme normale permet d'établir de nombreux énoncés quantifiés pour caractériser les propriétés d'un jeu.

Ainsi, nous pensons avoir montré dans la section précédente que la manipulation séquentielle suivant l'ordre d'apparition des quantificateurs d'un énoncé peut se faire par l'intermédiaire d'une gestuelle qui peut être porteuse de sens et ainsi de travailler les liens qui existent entre les quantificateurs dans un énoncé.

Nous pouvons donc nous demander si cet aspect séquentiel permet de prendre en compte les difficultés reconnues sur l'inversion des quantificateurs vu que ce problème consiste en une confusion sur l'ordre d'apparition des quantificateurs dans un énoncé. Cela nous amène à formuler notre problématique de la manière suivante :

> En quoi la théorie des jeux permet-elle de prendre en compte les difficultés reconnues sur l'inversion des quantificateurs dans des énoncés en langage mathématique ?

Dans le but de répondre à cette problématique, nous consacrons la section suivante à la mise en place d'une méthodologie.

III.4 Méthodologie

Le point central de notre méthodologie est l'élaboration d'une séquence de cours permettant d'introduire la notion de quantificateur à des élèves du secondaire. Nous avons fait le choix de cibler les élèves du secondaire pour limiter toute préconception sur les quantificateurs. Au vu des programmes, nous pouvons cependant nous attendre à ce que certains élèves aient déjà quelques notions sur le sujet comme expliqué dans la section I.2.

Ainsi, la première étape de notre méthodologie sera la construction de la séquence de cours dans laquelle nous nous plaçons dans le cadre de la théorie des jeux. La séquence sera scindée en deux parties : l'une introduira la notion de quantificateur grâce à des jeux alors que l'autre consistera en un questionnaire prenant en compte les connaissances inculquées par le travail des élèves sur des énoncés quantifiés dans un cadre différent de la théorie des jeux. Nous faisons ce choix car nous souhaitons que les réponses au questionnaire mettent en évidence les réflexes acquis strictement liés aux quantificateurs, indépendamment du choix du cadre et donc de la théorie des jeux.

La deuxième étape consistera en une analyse *a priori* de la séquence de façon à mettre en évidence quel sera le travail de l'élève et le travail de l'enseignant mais aussi les difficultés potentielles que pourraient rencontrer les élèves et les adaptations sur les connaissances des élèves.

La troisième étape est la présentation de la séquence dans une classe de sixième année du secondaire et l'analyse de cette séquence. Dans cette analyse, nous présenterons des extraits du déroulement en classe entre élèves et enseignant et nous commenterons aussi le travail réalisé par les élèves de façon à déduire des éléments de réponse à notre problématique.

III.5 Bilan

La théorie des jeux est donc riche dans son utilisation des quantificateurs, tant par l'abondance de l'utilisation que par le sens qu'elle leur donne. C'est la raison pour laquelle nous pensons que ce cadre de travail est propice au travail de cette notion avec des élèves du secondaire et nous nous questionnons sur la manière dont les difficultés sont prises en compte. L'élaboration d'une séquence et les analyses de celle-ci seront notre base afin d'apporter des réponses à ce questionnement. Nous y consacrons le chapitre suivant.

Chapitre IV

Présentation de la séquence

Dans ce chapitre, nous présentons la séquence que nous avons élaborée pour travailler la notion de quantificateur avec des élèves du secondaire. Celui-ci se scinde en trois parties. Dans la première, nous présentons les choix réalisés en lien avec notre problématique pour la construction de la séquence. Dans la deuxième partie, nous détaillons les outils didactiques que nous utilisons dans la troisième partie pour réaliser une analyse *a priori* de la séquence.

IV.1 Présentation générale

Nous avons construit une séquence que nous prévoyons pour une période de huit fois cinquante minutes de cours. Celle-ci est destinée à des élèves de dernière année du secondaire ayant opté pour la filière comprenant six heures [1] de mathématiques par semaine plus une heure de P.E.S. Mathématiques (Préparation aux Études Supérieures en Mathématiques). Vu que les programmes du secondaire ne prévoient pas de chapitre explicitement dédié aux quantificateurs (voir section I.2), nous pensons qu'il est possible de la présenter dans le cours de P.E.S. Mathématiques vu que le contenu de ce cours est plus libre et que le travail de la logique est demandé dans le cours de mathématiques. Le contenu est présenté sous la forme d'un diaporama que possèdent les élèves en version papier et sera affiché sur un tableau blanc interactif. Le diaporama est donné dans l'annexe A.

1. Les heures de cours du secondaire sont des périodes de cinquante minutes.

IV.1.1 Choix en lien avec la problématique

Afin de construire la séquence de façon à ce qu'elle puisse apporter des éléments de réponse à notre problématique, nous avons réalisé plusieurs choix pour travailler l'inversion des quantificateurs. Le premier choix en lien avec la problématique est le choix du jeu « Pierre, Papier, Ciseaux ! » (PPC). En effet, comme nous l'avons mis en évidence dans la section III.1.1, PPC ne possède aucune stratégie dominante mais ne possède aussi aucune stratégie dominée. Ces aspects contribuent à ce que les valeurs de vérité des énoncés suivants soient différentes, où S est l'ensemble des stratégies $\{$Pierre, Papier, Ciseaux$\}$:

- $\exists \lambda_1 \in S,\ \forall \lambda_2 \in S,\ g^1(\lambda_1, \lambda_2) = 1$
- $\forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ g^1(\lambda_1, \lambda_2) = 1$

Comme le montrent les énoncés précédents, le choix de PPC permet aussi de se restreindre à un seul ensemble de stratégies identique pour chaque joueur, ce qui permet de manipuler moins d'objets de la théorie des jeux et donc de limiter les difficultés liées au cadre.

Un second choix que nous avons réalisé est l'enchaînement des questions. Nous présentons ici les trois questions dans le registre de la langue naturelle et en donnant une traduction dans le registre symbolique.

1. Le jeu peut-il se terminer par une égalité ?
2. Si l'un des joueurs annonce comment il compte jouer, l'autre joueur peut-il gagner à coup sûr ?
3. Existe-t-il une stratégie qui permet de gagner à tous les coups ?

Ces questions, une fois traduites dans le registre symbolique, donnent lieu aux énoncés suivants :

1. $\exists \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_1(\lambda_1, \lambda_2) = g_2(\lambda_1, \lambda_2)$
2. $\forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ g^1(\lambda_1, \lambda_2) = 1$
3. $\exists \lambda_1 \in S,\ \forall \lambda_2 \in S,\ g^1(\lambda_1, \lambda_2) = 1$

Les difficultés liées à l'inversion des quantificateurs sont souvent associées à des confusions sur la dépendance entre les quantificateurs dans un énoncé. Nous avons choisi d'introduire la première question pour commencer à sensibiliser les élèves sur l'importance de l'enchainement des quantificateurs. En effet, bien que l'inversion de deux quantificateurs existentiels n'impacte pas la valeur de vérité de celle-ci, une dépendance est clairement visible lors de la réalisation de la preuve. Ainsi, lorsque nous avons instancié la première variable, l'instanciation de la seconde va dépendre de la première (afin d'avoir une égalité, il est nécessaire et suffisant que chaque joueur utilise la même stratégie).

La seconde question amène une sensibilisation supplémentaire sur l'inversion des quantificateurs. En effet, grâce au registre de la langue naturelle, nous pensons que les élèves peuvent déjà se faire une idée sur les valeurs de vérité des deuxième et troisième questions et ainsi se rendre compte de l'effet que peut avoir l'inversion de deux quantificateurs. De plus, la dépendance est présente dans la preuve des énoncés (réalisée à la section suivante).

Nous avons aussi dû réaliser un choix en ce qui concerne l'évaluation des élèves. Dans le but d'apporter des éléments de réponse à notre problématique, nous avons fait le choix d'évaluer l'apprentissage des élèves à partir de questions dans un cadre de travail mieux maîtrisé des élèves. En effet, nous pensons que si nous voulons comprendre les apports de la séquence strictement liés à la notion de quantificateur, nous devons porter la difficulté des énoncés sur les quantificateurs et non sur les objets qui constituent l'énoncé. Cette réflexion nous a amené à considérer le cadre de la théorie des nombres naturels. Dès lors, nous évaluons les élèves grâce aux deux points suivants :

- la rédaction à cours ouvert de la preuve de la négation de la troisième question où nous reprenons les copies,
- la réalisation des exercices de fin de séquence.

Notons que le premier point reste dans le cadre de la théorie des jeux car il sera réalisé pendant la séquence de cours.

Nous présentons maintenant les outils didactiques que nous utilisons afin de réaliser notre analyse *a priori* de la séquence.

IV.2 Outils d'analyse

À la section III.2.3, nous avons expliqué comment l'utilisation d'une gestuelle peut être avantageuse pour donner du sens à la notion de quantificateur. Ainsi, cette gestuelle a pour but de se raccrocher à ce que les élèves connaissent, telle que la maîtrise du jeu PPC, de façon à ce qu'ils puissent mieux interpréter le sens des quantificateurs. Afin d'analyser comment l'enseignant prend appui sur la théorie des jeux pour introduire et développer la notion de quantificateur, il nous semble alors important d'étudier les discours et la gestuelle qu'il met en place, ce qui nous amène à étudier les proximités-en-acte.

IV.2.1 Les proximités-en-acte

La notion de proximité-en-acte a été introduite par Robert et Vandebrouck (2014) [15] dans le but d'étudier localement des moments de cours.

Une proximité-en-acte qualifie tout ce qui peut être interprété comme une tentative de rester proche des connaissances des élèves de la part de l'enseignant, que ce soit dans son discours, dans ses décisions ou encore dans sa gestuelle. Elles traduisent ainsi une action de l'enseignant qui a pour but d'exploiter une proximité entre ce qu'il cherche à introduire et les réflexions, les connaissances ou les activités des élèves.

Ainsi, Bridoux, Grenier-Boley, Hache et Robert (2016, [2]) expliquent que l'efficacité des moments de cours peut dépendre des activations de connexions entre ce qui est connu des élèves et les notions à introduire, par le biais de l'activité de l'enseignant, ce qui motive l'étude des proximités.

Dans leurs travaux, Bridoux & al ont proposé une classification des proximités. Ainsi, ils distinguent les proximités non strictement mathématiques tels que des encouragements et d'autre part les proximités dites cognitives mettant en jeux des liens entre les différents contenus du cours.

Nous allons nous intéresser aux proximités cognitives.

Les proximités ascendantes

Les proximités ascendantes caractérisent l'accompagnement entre ce que les élèves ont déjà fait, ce qu'ils connaissent ou des exemples/exercices et de nouveaux résultats, propriétés,... Ainsi, on peut parler de proximité ascendante lorsqu'il y a une généralisation, que ce soit d'une notion ou d'un contexte. Partir d'exemples pour déduire une propriété mathématique ou encore partir d'un outil mathématique pour introduire une notion plus générale constitue une telle proximité. L'enjeu de ces proximités est donc d'accompagner le passage du précis au plus général en marquant ce qui sera retenu et généralisé. Afin d'illustrer plus précisément la notion de proximité ascendante, nous reprenons dans la FIGURE IV.1 un exemple donné dans Bridoux & al (2016) [2].

Enseignant et élèves ont tracé la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = -2x + 3$ à partir de deux points (ils ont choisi deux valeurs de x et calculé $f(x)$).
L'enseignant reprend la parole :
Si je calcule l'image de 0 – (des élèves : 3) *c'est 3. C'est le quel 3 ?* (elle montre le 3 de $-2x + 3$ et le souligne) – *c'est l'ordonnée de ce point sur la courbe* (elle montre le point où la courbe coupe l'axe des y).
A chaque fois quand vous calculez l'image de 0 par $f(x) = ax + b$ *vous obtenez b que vous allez trouver sur l'axe des ordonnées* (elle désigne un point virtuel de coordonnées $(0, b)$ sur l'axe des ordonnées). *La valeur de b faut toujours qu'elle soit sur l'axe des ordonnées. Quel nom* ? (des élèves : ordonnée à l'origine).
Vous notez : b est appelé l'ordonnée à l'origine…

FIGURE IV.1 – Exemple de proximité ascendante

Dans cet exemple, on remarque que l'enseignant travaille d'abord sur l'ordonnée à l'origine d'une droite bien précise. Il accompagne ensuite les élèves en généralisant la notion sur une formule algébrique, consistant en une proximité ascendante tentée par l'enseignant.

Les proximités descendantes

Contrairement aux proximités ascendantes, les proximités descendantes se placent entre un résultat plus général et des exemples ou applications. On peut alors parler de proximité descendante lorsqu'on réalise une contextualisation d'une définition ou propriété en passant par exemple par la substitution de variables par des valeurs précises. Le fait réaliser des liens entre des exemples d'une définition et la définition même ou encore entre l'application d'un résultat dans un contexte plus précis constituent également une proximité descendante.

Afin de donner une idée plus précise de ce qu'est une proximité descendante, nous reprenons un autre exemple des travaux de Bridoux & al à la FIGURE IV.2.

L'enseignant reprend, après avoir donné la définition de l'ordonnée à l'origine.
On va tracer la courbe de $f(x) = 2x - 3$. *Que vaut b cette fois ?* (des élèves : -3)
Donc il va y avoir un point sur l'axe des ordonnées en (-3) – (elle le place directement).

FIGURE IV.2 – Exemple de proximité descendante

Dans cet exemple, l'enseignant part de l'expression algébrique générale d'une fonction affine pour expliciter la valeur à l'origine d'une fonction bien précise.

Les proximités horizontales

Les proximités horizontales caractérisent les proximités qui ne font pas changer le niveau de contextualisation du discours. Elles peuvent alors prendre la forme de reformulations orales, gestuelles ou écrites ou encore d'un complément d'information répondant à une question d'élève. Les proximités horizontales peuvent consister en des discours mettant en avant des relations entre les notions en jeu ou encore des analogies. Nous reprenons dans la FIGURE IV.2.1 un exemple de proximité horizontale à nouveau tiré des travaux de Bridoux & al.

Extrait d'un discours d'enseignant :

Donc maintenant nos fonctions on va les définir par leurs expressions algébriques

a et b deux réels donnés, la fonction affine est la fonction définie par, donc c'est « à x associe » donc c'est l'image de x par f donc $f(x) = ax + b$.

Donc mon, ma variable x *va être multipliée par le réel* a *et on va lui ajouter le réel* b*. Alors il y a deux cas particuliers que vous avez sûrement vus les années précédentes, l'année précédente, le cas où le réel* a *vaut* 0 (elle écrit $a = 0$) *ça fait* 0 *fois ma variable ça fait toujours... Quand on multiplie par* 0 *?*

Les élèves répondent 0

FIGURE IV.3 – Exemple de proximité horizontale

L'exemple de la FIGURE IV.2.1 met en avant deux proximités horizontales. La première est la description du calcul réalisé sur la variable x où l'enseignant formule ce calcul dans la langue naturelle. La seconde est la reformulation de la question précédente lorsque l'enseignant dit : « *Quand on multiplie par* 0 *?* ».

Distinction entre occasion et tentative de proximité

Lors de nos analyses, nous employons les termes « occasion de proximité » et « tentative de proximité ».

Une occasion de proximité constitue un endroit où l'enseignant a l'occasion de tenter une proximité, c'est ce que notre analyse *a priori* met en évidence.

Lors de l'enseignement d'un contenu de cours présentant une occasion de proximité, l'enseignant peut tenter la proximité, il y a alors tentative de proximité. Si l'occasion n'est pas tentée, on parle d'occasion manquée.

La FIGURE IV.2.1 donne un exemple de tentative et d'occasion de proximité.

Contenu du cours

Définition (Suite réelle). Une suite réelle est une fonction

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Exemple

$(n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$

Tentative de proximité - exemple de discours

« L'objet $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un exemple de suite. En effet, si on se rattache à la définition, ici, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(5) = 25$ et ainsi de suite, où f est la fonction qui à n associe n^2 »

FIGURE IV.4 – Occasion et tentative de proximité

Dans la FIGURE IV.2.1, on remarque que l'introduction d'un exemple de suite après la définition donne lieu à une occasion de proximité descendante consistant à rattacher l'exemple à la définition, ce qui est tenté dans l'exemple de discours qui suit.

Un autre aspect que nous voulons mettre en évidence dans nos analyses est le travail de manipulation de la notion de quantificateur. Outre la simple traduction d'énoncés, nous souhaitons analyser la façon avec laquelle les élèves adaptent leurs connaissances sur la notion de quantificateur pour rédiger une preuve correcte d'un énoncé. Ainsi, nous voulons regarder si, dans un exercice, les élèves doivent introduire des étapes, une structure ou encore réaliser des choix qui peuvent paraître délicats comme nous l'avons fait remarquer dans la section I.3.3. L'analyse des adaptations des connaissances semble alors utile pour pouvoir situer les points qui nécessitent du travail à l'élève et qui peuvent être source de difficultés.

IV.2.2 Les adaptations sur les connaissances

Les adaptations sur les connaissances sont une notion introduite par Robert (1998) [14] qui remarque que les exercices de mise en fonctionnement des connaissances peuvent varier. En effet, dans certains types d'exercices que nous décrivons juste après, il y a lieu de réaliser des adaptations sur ces connaissances de façon à ce qu'elles apportent une résolution de la tâche demandée. Au cours de ses travaux, Robert distingue sept grands types d'adaptations que nous reprenons ci-dessous :

- les reconnaissances des modalités d'application des connaissances. Par exemple reconnaître que le principe de preuve par récurrence constitue un bon choix pour rédiger une preuve quantifiée en $\forall n$,
- l'introduction d'intermédiaires, comme des notations, des expressions, ...
- les changements de cadre ou les changements de point de vue ou de registre, comme l'utilisation d'un graphique pour approximer les racines d'une fonction en appui à l'expression algébrique de la fonction,
- la structuration du raisonnement par l'introduction d'étapes, comme appliquer l'intégration par partie suivi d'un changement de variable dans le calcul intégral,
- l'utilisation des questions précédentes comme outils de résolution,
- la réalisation de choix, qui peut être forcé (un seul choix convient) ou non.
- le manque de connaissances nouvelles.

En fonction des adaptations à réaliser sur les connaissances mises en jeu, Robert caractérise trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances lors de la réalisation de tâche. Nous décrivons chacun de ces types et nous donnons un bref exemple d'exercices.

Applications immédiates

Le premier niveau de mise en fonctionnement des connaissances consiste en une application simple et isolée d'une connaissance précise ne nécessitant pas d'adaptation à réaliser sur les connaissances. Les exercices de substitutions constituent un exemple d'application immédiate, comme illustré à la FIGURE IV.5 par l'application isolée des règles d'addition et de multiplication de fractions.

> **Question 1.** Écrivez les expressions suivantes sous forme d'une fraction :
>
> - $\frac{a}{b} + \frac{c}{x} =$
> - $\frac{a}{y} \cdot \frac{x}{b} =$

FIGURE IV.5 – Exemple d'application directe d'une connaissance tiré du test n° 1 de Mathématiques élémentaires 2017-2018

Mise en fonctionnement mobilisable

Le deuxième type de mise en fonctionnement des connaissances caractérise une tâche pour laquelle les connaissances à mobiliser sont explicitées mais qu'il y a lieu de réaliser des adaptations sur celle-ci. De plus, ce qu'il faut réaliser est indiqué. On peut alors donner comme exemple les tâches dans lesquelles on impose une technique de résolution. La FIGURE IV.6 illustre une tâche où le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est mobilisable. En effet, le principe de preuve par récurrence est imposé et est connu des étudiants mais il y a lieu de réaliser des adaptations par rapport au contexte, telle que l'adaptation des connaissances au cadre de travail.

> **Question 1.** Soit la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
>
> $$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

FIGURE IV.6 – Exemple de mise en fonctionnement mobilisable tiré du test n° 5 de Mathématiques élémentaires 2017-2018

Mise en fonctionnement disponible

Ce dernier type de mise en fonctionnement des connaissances se distingue du précédent car il n'indique rien pour diriger l'élève dans l'exercice. En effet, en plus du travail d'application de méthodes, l'apprenant doit aussi chercher dans ses outils quelles méthodes conviennent à la réalisation de la tâche. L'exemple de la FIGURE IV.7 met en avant un exercice où l'étudiant devra lui-même choisir un des outils qu'il connaît lui permettant de caractériser la croissance d'une fonction. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées dans les rédactions. Parmi celles-ci, on peut citer l'analyse de la dérivée ou encore l'application de la définition de croissance de fonction.

Question 5. Considérons la famille de fonctions

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction f_a est-elle croissante ? Justifiez.

FIGURE IV.7 – Exemple de mise en fonctionnement disponible tiré du test n° 1 de Mathématiques élémentaires 2017-2018

IV.3 Analyse *a priori* de la séquence

Dans cette section, nous réalisons une analyse *a priori* à l'aide des outils présentés à la section précédente. Lors de cette analyse, nous mettons en évidence le travail de l'enseignant et le travail des élèves. Nous détaillons les nouvelles notions qui sont présentées aux élèves ainsi que les difficultés potentielles auxquelles ceux-ci peuvent se confronter tout en gardant à l'esprit les difficultés répertoriées à la section II.3.

Nous présentons notre analyse de manière séquentielle et chronologique. Ainsi, nous explicitons premièrement les notions abordées avant de reprendre partie par partie la séquence en les analysant.

IV.3.1 Notions abordées

Durant cette séquence, nous travaillons l'ensemble des notions suivantes avec les élèves :

- les quantificateurs universel et existentiel dans le registre de la langue naturelle et symbolique,

– la notion de preuve d'énoncé quantifié,
– la négation d'un énoncé quantifié dans le registre de la langue naturelle et symbolique,
– la notion d'implication et la preuve d'énoncés quantifiés incluant une implication.

Il faut noter que la notion de quantificateur n'est peut-être pas nouvelle pour tous les élèves. En effet, la section I.2 indique que les programmes du secondaire restent imprécis sur la manière de mettre en œuvre l'apprentissage de la logique mathématique.

IV.3.2 Analyse de la première partie

Dans cette partie, nous introduisons les notions de théorie des jeux [2].

Contenu

Considérons le jeu « Pierre, Papier, Ciseau ». Dans ce jeu, deux joueurs s'affrontent en choisissant simultanément une action parmi « Pierre », « Papier » ou « Ciseaux ».

La règle de victoire est la suivante : l'action « Pierre » l'emporte sur l'action « Ciseaux », qui l'emporte sur l'action « Papier » qui l'emporte sur l'action « Pierre ». Dans tous les autres cas de figure, le jeu se clôture par un match nul.

On peut alors se poser plusieurs questions à propos de ce jeu. À votre avis, quelles sont les réponses à ces trois questions :

- Le jeu peut-il se terminer par une égalité ?
- Si l'un des joueurs annonce comment il compte jouer, l'autre joueur peut-il gagner à coup sur ?
- Existe-t-il une stratégie qui permet de gagner à tous les coups ?

Afin d'étudier ce jeu et répondre mathématiquement à ces questions, les mathématiciens ont décidé de nommer chaque objet présent. Ainsi,

- les choix qui sont à disposition des deux joueurs, les actions « Pierre », « Papier » et « Ciseaux » sont appelés des **stratégies**,
- lorsqu'une partie se termine, chaque joueur gagne ou perd dans une

2. Dans le document des élèves, on peut remarquer que la séquence commence par une introduction historique de la théorie de jeux. Nous passons cette introduction car elle n'apporte pas de travail mathématique de la part des élèves à proprement parler.

certaine mesure. Nous appelons cela les **gains** des joueurs. Dans notre cas, nous disons que le gain d'un joueur est 1 s'il remporte la partie, -1 s'il la perd et 0 en cas de match nul.

Tentons maintenant de modéliser le jeu.

Pour un jeu, nous notons S l'ensemble des stratégies des joueurs. Ici, nous avons donc :

$$S = \{Pierre, Papier, Ciseaux\}$$

Une stratégie est donc un élément de S. Pour cela, nous utilisons le symbole d'appartenance $\in$. Ainsi, si λ est une stratégie on note :

$$\lambda \in S$$

Modélisons maintenant le gain d'un joueur. Le gain d'un joueur dépend de deux choses :

1. la stratégie employée par le premier joueur,
2. la stratégie employée par le second joueur,

Ainsi, on peut dire que le gain d'un joueur est une **fonction** qui à un **couple de stratégie** associe un **nombre réel** (ici, cela peut être -1, 0 ou 1. Nous notons g_1 le gain du joueur 1 et g_2 le gain du joueur 2. On peut alors noter pour illustrer le gain du joueur 1 :

$$g_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} S \times S & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\lambda_1, \lambda_2) & \mapsto & g_1(\lambda_1, \lambda_2) \end{array} \right.$$

Par exemple,

- $g_1(Pierre, Papier) = -1$
- $g_2(Pierre, Papier) = 1$
- $g_1(Ciseaux, Ciseaux) = 0$

Afin de mieux visualiser notre jeu, traçons un tableau qui reprend les couples des gains des deux joueurs pour une partie donnée.

VS	Pierre	Papier	Ciseaux
Pierre	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
Ciseaux	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Analyse du contenu

Nous commençons la séquence en introduisant le jeu PPC dans le registre de la langue naturelle. Il y a une occasion de proximité horizontale consistant à appliquer la gestuelle du jeu et à faire jouer les élèves. Le rôle de l'enseignant est de tenter cette proximité, en rattachant la définition du jeu aux actions des joueurs/élèves tout en essayant de faire émerger les trois questions qui suivent.

Dans le cas où cette occasion est tentée, nous ne nous attendons pas à des difficultés majeures pour la détermination de la valeur de vérité des questions exprimées dans le registre de la langue naturelle.

En ce qui concerne la modélisation du jeu, c'est-à-dire le passage au registre symbolique, plusieurs points retiennent notre attention. Premièrement, nous introduisons un ensemble d'objets quelconques. Rappelons que nous avons montré dans le chapitre précédent qu'il s'agit très probablement du premier ensemble qui n'est pas un sous-ensemble de nombres réels que rencontrent les élèves. Le travail de l'enseignant est donc de vérifier si un tel ensemble est bien compris par les élèves et n'amène pas d'ambiguïté. L'appartenance d'un élément à un ensemble est une notion qui est normalement connue des élèves et nous ne nous attendons donc pas à des difficultés pour exprimer une stratégie comme étant un élément de S. Par contre, l'introduction de la fonction binaire prenant des valeurs quelconques nécessitera probablement plus de travail de l'enseignant.

Ainsi, nous introduisons la fonction dans le registre de la langue naturelle et nous réalisons un changement de registre vers le registre symbolique pour tenter de donner plus de sens à la notion. Une occasion de proximité descendante se présente par l'introduction d'exemples d'images de couples de stratégies par la fonction en recontextualisant dans le jeu PPC. Vu que l'objet est peu familier des élèves et que la fonction est à valeurs discrètes, le registre du tableau est ensuite introduit. Le travail de l'enseignant est d'amener ce tableau étape par étape en introduisant premièrement le gain du premier joueur et ensuite le gain du second joueur.

Pour cette partie, l'enseignant doit s'assurer que les élèves manipulent sans difficulté l'ensemble des notions de théorie des jeux. En effet, comme indiqué dans le chapitre II, nous pensons que le cadre de travail influence la compréhension des quantificateurs et donc qu'une bonne maîtrise du cadre est nécessaire pour travailler sereinement la quantification. Pour ce faire, l'enseignant dispose dans cette partie de nombreux registres et peut toujours tenter des proximités descendantes pour donner des exemples en recontextualisant avec le jeu PPC.

IV.3.3 Analyse des deuxième et troisième parties

Dans ces deux parties, nous réintroduisons les trois questions et nous introduisons la notion de quantificateur et la preuve d'énoncés quantifiés.

Contenu - première question

Revenons à nos questions :

- Le jeu peut-il se terminer par une égalité ?
- Si l'un des joueurs annonce comment il compte jouer, l'autre joueur peut-il gagner à coup sur ?
- Existe-t-il une stratégie qui permet de gagner à tous les coups ?

Tentons de répondre mathématiquement à ces questions. Pour ce faire, nous avons besoin de traduire ces phrases dans un langage mathématique.

Reprenons la première phrase :

« Le jeu peut-il se terminer par une égalité ? »

En étant plus précis, cela revient à demander qu'

« Il existe une certaine stratégie pour le joueur 1 et qu'il existe une certaine stratégie pour le joueur 2 telle que les gains des deux joueurs sont égaux »

Traduisons pas à pas cette phrase en mathématique. Nous obtenons :

$$\exists \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_1(\lambda_1, \lambda_2) = g_2(\lambda_1, \lambda_2)$$

Au vu du travail précédent, nous pouvons affirmer que l'énoncé est vrai.

Il est donc possible de le prouver mathématiquement.

Démonstration. Prouvons l'énoncé précédent.

En mathématiques, pour prouver un objet existe, il faut l'**exhiber**. Nous devons donc exhiber une première stratégie λ_1.

Prenons $\lambda_1 = Pierre$.

Nous devons maintenant exhiber une deuxième stratégie λ_2.

Prenons $\lambda_2 = Pierre$.

Nous avons $g_1(Pierre, Pierre) = 0$ et $g_2(Pierre, Pierre) = 0$ et donc

$$g_1(Pierre, Pierre) = g_2(Pierre, Pierre)$$

□

Remarque. Au cours de la preuve, nous pouvons nous rendre compte que lorsqu'on écrit un énoncé mathématique, l'ordre a de l'importance, que ce soit dans l'énoncé comme dans la preuve. De plus, le choix du premier paramètre étant libre, il existe plusieurs preuves correctes différentes.

Analyse du contenu - première question

La réintroduction des questions permet de replonger les élèves dans la problématique de départ. Nous commençons par analyser le travail réalisé sur la première question. Il s'agit d'introduire le quantificateur existentiel à partir du registre de la langue naturelle. Le travail de l'enseignant est ensuite d'accompagner les élèves dans la traduction de l'énoncé dans le registre symbolique. Notons qu'il y a de nombreuses occasions de proximités horizontales par la reformulation constante d'un registre à l'autre, permettant de donner plus de sens à la notion de quantificateur. On peut aussi suggérer que l'enseignant introduise lui-même la notation $\exists \lambda_1 \in S$ et qu'il tente ensuite de faire construire la suite de l'énoncé par les élèves.

La preuve est la partie qui demande le plus d'attention car nous pensons qu'il s'agit de l'endroit propice pour donner du sens au quantificateur existentiel en expliquant pourquoi il est nécessaire et suffisant d'exhiber un objet pour prouver un « il existe ». C'est la raison pour laquelle le travail de l'enseignant est de réaliser cette preuve en tentant une proximité horizontale par la gestuelle du jeu. Cette gestuelle peut mettre en évidence chez les élèves que le choix de stratégie du premier joueur importe peu pour réaliser la preuve mais qu'une fois celle-ci fixée, le choix de stratégie du deuxième joueur est forcé pour obtenir une égalité. Ainsi, il y a d'abord un choix non forcé pour λ_1 qui peut être sujet à discussion chez les élèves et ensuite un choix forcé pour λ_2 qui, au vu des analyses réalisées dans la section I.3, devrait amener moins de difficulté que le premier choix.

Le travail de l'enseignant sera aussi de bien appuyer sur la structuration de la preuve qu'il peut construire en s'appuyant sur l'enchainement des quantificateurs dans l'énoncé et sur une gestuelle associée au jeu PPC dont le déroulement a été rendu séquentiel (les joueurs jouent l'un après l'autre). L'emploi des expressions telles que « prenons » et « donc » sont à appuyer auprès des élèves.

Contenu - deuxième question

Concentrons-nous maintenant sur la deuxième question. Afin de répondre mathématiquement à cette question, nous devons à nouveau traduire cette phrase en un énoncé mathématique.

Reprenons la question :

« Si l'un des joueurs annonce comment il compte jouer, l'autre joueur peut-il gagner à coup sur ? »

En étant plus précis, cela revient à demander que

« quelle que soit la stratégie pour le joueur 1, il existe une certaine stratégie pour le joueur 2 telle que le gain du joueur 2 est 1 »

Traduisons pas à pas cette phrase en mathématique. Nous obtenons :

$$\forall \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Au vu du travail précédent, nous pouvons affirmer que l'énoncé est vrai. Il est donc possible de le prouver mathématiquement.

Démonstration. Prouvons l'énoncé précédent.

En mathématiques, pour prouver qu'une propriété est vraie pour tous les éléments d'un ensemble, il faut à première vue prouver cette propriété pour chacun des éléments de cet ensemble.

Il y a donc trois cas possibles :

1. $\lambda_1 = Pierre$

2. $\lambda_1 = Papier$
3. $\lambda_1 = Ciseaux$

Pour chacun de ces λ_1, montrons :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Ainsi,

1. Si $\lambda_1 = Pierre$, **prenons** $\lambda_2 = Papier$ et nous avons alors

$$g_2(Pierre, Papier) = 1$$

2. Si $\lambda_1 = Papier$, **prenons** $\lambda_2 = Ciseaux$ et nous avons alors

$$g_2(Papier, Ciseaux) = 1$$

3. Si $\lambda_1 = Ciseaux$, **prenons** $\lambda_2 = Pierre$ et nous avons alors

$$g_2(Ciseaux, Pierre) = 1$$

$\square$

Remarque. À nouveau, nous nous rendons compte que le choix du deuxième paramètre dépend entièrement du choix du premier paramètre ce qui nous conforte dans l'idée que l'ordre a son importance dans les énoncés mathématiques.

Analyse du contenu - deuxième question

La deuxième question a pour but d'introduire le quantificateur universel. Lors du passage de cette question dans le registre de la langue naturelle au registre symbolique, le travail de l'enseignant peut se limiter à l'introduction du symbole $\forall$, la suite de la traduction de l'énoncé pouvant être réalisée par les élèves car il s'agit d'un exercice similaire à la traduction de l'énoncé précédent.

Le travail de la gestuelle devrait aider à amorcer la preuve en indiquant qu'il y a plusieurs cas à gérer et en donnant une intuition pour le choix du second paramètre. On peut s'attendre à des réflexions des élèves du type : « Le choix du λ_2 dépend de la stratégie employée par le joueur 1 » ce qui permet d'insister à nouveau sur l'importance de l'ordre et la dépendance des quantificateurs entre eux.

Au vu de la preuve de l'énoncé de la première question, nous pensons que le travail magistral peut se limiter à l'introduction des cas et que la suite de la preuve peut se faire en collaboration avec les élèves. Remarquons qu'une fois λ_1 fixé, le choix du λ_2 est forcé ce qui, pour les mêmes raisons que précédemment, nous conforte dans l'idée que cet exercice est accessible aux élèves.

Durant le travail de la preuve, le rôle de l'enseignant sera de bien mettre en parallèle l'écrit avec la gestuelle pour que les aspects que nous pensons avantageux de la théorie des jeux puissent bien impacter le sens qu'attribuent les élèves aux quantificateurs et ainsi potentiellement prévenir des difficultés liées à l'inversion des quantificateurs.

Contenu - troisième question

Considérons à présent la troisième et dernière question que nous nous sommes posée. Reprenons la question :

« Existe-t-il une stratégie qui permet de gagner à tous les coups ? »

En étant plus précis, cela revient à demander qu'

« il existe une stratégie pour le joueur 2 telle que quelle que soit la stratégie pour le joueur 1, le gain du joueur 2 est 1 »

Traduisons pas à pas cette phrase en mathématique. Nous obtenons :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Au vu du travail précédent, nous pouvons affirmer que l'énoncé est faux. Cependant, nous n'avons pas encore vu comment prouver qu'un énoncé est faux. Regardons sur de petits exemples.

Analyse du contenu - troisième question

Le travail sur la troisième question se limite à la traduction de l'énoncé vu que les élèves n'ont pas encore vu au cours de cette séquence comment prouver qu'un énoncé est faux.

Le travail de traduction peut être complètement réalisé par les élèves à la suite des exercices précédents. Il est aussi envisageable d'envoyer un élève au tableau afin d'évaluer la maîtrise en traduction acquise jusqu'ici.

IV.3.4 Analyse de la quatrième partie

La quatrième partie est destinée à travailler la notion de négation.

Contenu

Supposons qu'une personne affirme :

« Tous les chiens sont blancs »

Afin de lui prouver qu'il a tort, il faudrait lui prouver :

« Il existe un chien qui n'est pas blanc »

Supposons à présent qu'une autre personne nous affirme :

« Il existe un homme sur Terre qui mesure plus de 4 mètres »

Cette fois-ci, pour lui prouver que ce qu'il dit est faux, il faut lui prouver :

« Tous les hommes sur Terre mesurent moins de 4 mètres »

Regardons à présent sur l'énoncé mathématique suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > 5$$

Cet énoncé est faux. Pour le prouver nous devons prouver la négation de cet énoncé. Le symbole de négation est $\neg$. Ainsi, pour prouver que l'énoncé précédent est faux, il s'agit de montrer :

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N},\ n > 5)$$

En français, afin de prouver :

Quel que soit le naturel, il vérifie la propriété « être plus grand que 5 »

il faut montrer :

Il existe un naturel qui ne vérifie pas la propriété « être plus grand que 5 »

Autrement dit, montrer

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N},\ n > 5)$$

revient à montrer

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \neg(n > 5)$$

ou encore

$$\exists n \in \mathbb{N},\ n \leqslant 5$$

Nous pouvons alors émettre la conclusion suivante :

> Si P est une propriété, la négation de « $\forall x,\ P(x)$ » est « $\exists x,\ \neg P(x)$ ».

Considérons à présent l'énoncé suivant :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ n < 0$$

Cet énoncé est faux. À nouveau, pour montrer que cet énoncé est faux, il faut montrer que sa négation est vraie. C'est-à-dire montrer :

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N},\ n < 0)$$

En français, afin de prouver :

Il existe un naturel qui vérifie la propriété « être plus petit que 0 »

il faut montrer :

Quel que soit le naturel, il ne vérifie pas la propriété « être plus petit que 0 »

Autrement dit, montrer

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N},\ n < 0)$$

revient à montrer

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \neg(n < 0)$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 0$$

Nous pouvons alors émettre la conclusion suivante :

Si P est une propriété, la négation de « $\forall x,\ P(x)$ » est « $\exists x,\ \neg P(x)$ ».

Revenons maintenant à la troisième question. Nous voulons prouver :

$$(1) \quad \neg(\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1)$$

Mais nous savons maintenant que :

$$\neg(\exists \lambda_2,\ P(\lambda_2)) \text{ est équivalent à } \forall \lambda_2,\ \neg P(\lambda_2)$$

Prouver (1) revient alors à prouver :

$$(2) \quad \forall \lambda_2 \in S,\ \neg(\forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1)$$

Or, nous savons aussi que :

$$\neg(\forall \lambda_1,\ P(\lambda_1)) \text{ est équivalent à } \exists \lambda_1,\ \neg P(\lambda_1)$$

Prouver (2) revient alors à prouver :

$$(3) \quad \forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ \neg(g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1)$$

Ou encore :

$$\forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$$

En conclusion, pour prouver que l'énoncé suivant est faux :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

il faut montrer l'énoncé suivant :

$$\forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$$

Analyse du contenu

L'introduction de la négation se fait par l'intermédiaire d'un aller-retour entre le registre de la langue naturelle et le registre symbolique. Le travail de l'enseignant consiste à faire émerger les concepts des élèves dans la langue naturelle et d'ensuite les accompagner dans le registre symbolique.

La première partie permet ainsi à développer les idées de négation d'un

« pour tout » et d'un « il existe ». On s'attend à ce que la conclusion de la phrase « Tous les chiens sont blancs » soit assez immédiate. Au contraire, on s'attend à ce que les réponses des élèves pour la phrase « Il existe un homme sur Terre qui mesure plus de 4 mètres » donnent lieu à l'ajout simple de la négation de la langue naturelle, c'est-à-dire : « Il n'existe pas [. . .] ». Dans ce cas, l'enseignant doit tenter de faire passer l'idée qu'il est mathématiquement difficile de montrer qu'un objet n'existe pas mais qu'il existe une autre façon de nier une telle affirmation. Une fois le principe de négation acquis dans le registre de la langue naturelle, l'enseignant peut passer à un énoncé mathématique.

Lors du travail sur l'énoncé en $\forall n$, il y a une occasion de proximité horizontale consistant à reformuler l'énoncé dans le registre de la langue naturelle pour que les élèves puissent avoir une idée claire de la valeur de vérité de l'énoncé et se raccrocher aux exemples précédents. Ainsi, par l'intermédiaire de cette reformulation, l'enseignant peut amener les élèves à construire la négation de l'énoncé en $\forall n$. Nous nous attendons cependant à une erreur lorsqu'il s'agit de nier l'expression « $n < 0$ » où les élèves pourrait amener l'expression $n > 0$ au lieux de $n \geqslant 0$.

La formulation de la conclusion est purement syntaxique, indépendante d'un domaine, il faut alors s'assurer que celle-ci est bien comprise pas les élèves. Pour ce faire, l'enseignant peut questionner les élèves pour tenter de faire émerger la conclusion de leur part en prenant profit de l'occasion de proximité ascendante qui consiste à utiliser l'exemple précédent.

Le travail sur la propriété en langage symbolique suivante est similaire au précédent, présentant les mêmes occasions de proximités.

Une fois que ces notions semblent intégrées par les élèves, l'enseignant peut repasser à la troisième question pour écrire sa négation. Il y a une occasion de proximité descendante qui consiste à recontextualiser les conclusions qui découlent du travail précédent afin de construire la négation de la troisième expression.

À la suite, nous obtenons un énoncé dont le travail nécessaire à la rédaction de la preuve est similaire à celui réalisé pour la preuve de l'énoncé précédent. Il s'agit d'une occasion de proposer l'exercice aux élèves et de récolter les copies pour avoir une première idée de l'apport de la séquence dans le cadre de la théorie des jeux.

Nous présentons à la Figure IV.8 une preuve de l'énoncé que nous avons réalisée et analysons les adaptations sur les connaissances à réaliser et les difficultés potentielles.

Premièrement, il y a une introduction d'étapes à réaliser. L'élève doit d'abord remarquer qu'il s'agit d'un énoncé quantifié universellement et qu'il s'agit alors de montrer l'énoncé pour chacun des éléments de S. C'est une étape qui peut être délicate si les élèves éprouvent des difficultés à démarrer un exercice. Dans ce cas, l'enseignant peut rediriger l'élève en difficulté en lui faisant relire la preuve de l'énoncé précédent. Une deuxième adaptation est à réaliser lorsqu'il s'agit d'exhiber un λ_1. En effet, celui-ci a une dépendance par rapport au cas du λ_1 mais il existe plusieurs choix possibles pour chaque λ_1. Ce cas de figure peut amener les élèves à rencontrer des difficultés comme nous l'avons fait remarquer lors de notre analyse de copies d'étudiants à la section I.3. La vérification que le gain est différent de 1 doit se faire en deux étapes : la première consiste à calculer la valeur du gain avec les stratégies fixées et la seconde à indiquer que ce gain est différent de 0. On peut potentiellement s'attendre à ce que l'élève ignore l'une de ces étapes qui, au vu de la rigueur souhaitée, doivent apparaître.

Pour prouver l'énoncé :

$$\forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$$

il faut prouver pour chaque $\lambda_2 \in S$ l'énoncé suivant :

$$\exists \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$$

Il y a donc trois cas possibles.

1. Si $\lambda_2 = Pierre$, **prenons** $\lambda_1 = Pierre$ et nous avons alors
$$g_2(Pierre, Papier) = 0 \neq 1$$
2. Si $\lambda_2 = Papier$, **prenons** $\lambda_1 = Papier$ et nous avons alors
$$g_2(Papier, Ciseaux) = 0 \neq 1$$
3. Si $\lambda_2 = Ciseaux$, **prenons** $\lambda_1 = Ciseaux$ et nous avons alors
$$g_2(Ciseaux, Pierre) = 0 \neq 1$$

FIGURE IV.8 – Preuve de la négation du troisième énoncé

IV.3.5 Analyse de la cinquième partie

Cette partie est la plus délicate car elle travaille les quantificateurs différemment. En effet, les élèves ont appris précédemment à les utiliser dans des énoncés à prouver. Il s'agit ici d'utiliser les quantificateurs dans des énoncés qui constituent des hypothèses. On se raccroche alors aux règles d'instanciation universelle et existentielle présentées à la section II.2.2.

Contenu

Reprenons maintenant en langage mathématique les deux dernières questions que nous nous sommes posées.

$$(1) \quad \forall \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1 \quad \text{Vrai}$$

$$(2) \quad \exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1 \quad \text{Faux}$$

Nous nous posons deux questions :

1. Quelle est la différence entre ces deux énoncés ?
2. Pensez-vous que, pour un jeu donné, les réponses puissent être inversées ?

On peut remarquer que si un jeu vérifie la propriété (2) alors il vérifie automatiquement la propriété (1). Mathématiquement, on dit que la propriété (2) implique la propriété (1) et on note :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Le fait qu'une propriété découle d'une autre s'appelle une implication. Le symbole d'implication est « $\Rightarrow$ ». Ce qui se trouve à gauche de ce symbole est appelé l'hypothèse ou la prémisse. Ce qui se trouve à droite est appelé la thèse ou la conclusion.

Pour prouver qu'une implication est vraie, on peut :

1. supposer que l'hypothèse est vraie,
2. sous la supposition précédente, montrer que la thèse est vraie.

Avant de prouver l'implication précédente, faisons une petite remarque. Les noms donnés aux variables dans une proposition sont strictement liés à leur quantificateur. Si ce même nom est utilisé à nouveau, il constitue une nouvelle instance pour cette variable.

Par exemple, pensez-vous que l'énoncé suivant est vrai ou faux ?

$$\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 3 \wedge \exists x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 1$$

Une solution pour mieux s'y retrouver est de changer le nom du « x » dans sa deuxième occurrence :

$$\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 3 \wedge \exists y \in \mathbb{N},\ y \leqslant 1$$

Cette fois-ci, nous pouvons plus facilement affirmer que cet énoncé est vrai.

Revenons alors à notre implication précédente. Pour mieux s'y retrouver dans l'énoncé suivant :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

on peut remplacer les deuxièmes occurrences de λ_1 et λ_2 par μ_1 et μ_2. Dès lors, nous obtenons :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \mu_1 \in S,\ \exists \mu_2 \in S,\ g_2(\mu_1, \mu_2) = 1$$

Nous pouvons maintenant rédiger une preuve.

Démonstration.

Hypothèse : $\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$

Thèse : $\forall \mu_1 \in S,\ \exists \mu_2 \in S,\ g_2(\mu_1, \mu_2) = 1$

Ici, il est impossible de lister les éléments de S : on ne sait pas ce qu'il y a dedans ! On peut tout de même faire la preuve en prenant un élément quelconque de S : on l'appelle un « représentant ». Pour dire que nous prenons un **représentant**, les mathématiciens utilisent le mot « **Soit** ».

Soit $\mu_1 \in S$. Nous devons montrer :

$$\exists \mu_2 \in S,\ g_2(\mu_1, \mu_2) = 1$$

Qu'allons-nous prendre pour μ_2 ? Notre hypothèse nous dit qu'**il existe** λ_2 tel que $\forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$. Puisque $\mu_1 \in S$, c'est en particulier vrai pour $\lambda_1 = \mu_1$ et donc $g_2(\mu_1, \lambda_2) = 1$. **Prenons** alors $\mu_2 = \lambda_2$.

Dès lors, $g_2(\mu_1, \mu_2) = g(\mu_1, \lambda_2)$ et, par hypothèse :

$$g(\mu_1, \lambda_2) = 1$$

$\square$

Analyse du contenu

Cette partie débute par la réintroduction des deux dernières questions traitées. L'introduction de la notion d'implication est donc réalisée dans un cadre plus familier vu que les élèves ont déjà travaillé les deux énoncés en jeu. Le rôle de l'enseignant sera ici double. En effet, il devra premièrement décontextualiser la situation en faisant comprendre aux élèves que nous nous plaçons dans un jeu quelconque. Deuxièmement, il devra saisir une occasion de proximité horizontale consistant à faire imaginer un jeu qui vérifie la propriété (2) et questionner les élèves sur ce qu'ils pensent alors de la propriété (1). Le but est que les élèves parviennent à déduire que (1) découle de (2) et que les valeurs de vérité ne peuvent donc être inversées. L'enseignant peut aussi tenter l'occasion de proximité horizontale consistant à reformuler les énoncés dans la langue naturelle pour amener plus facilement cette idée d'implication.

Le vocabulaire ne devrait pas poser problème aux élèves dans le sens où les termes thèse et hypothèse sont des termes qui ont déjà été rencontrés.

Afin de travailler sur cette implication et au vu des analyses des travaux antérieurs réalisés dans la section II.3, la partie suivante est destinée à prévoir les potentielles difficultés liées à la confusion des variables. Ainsi, l'enseignant doit interpréter les réponses qu'il obtient des élèves lorsqu'il demande si l'énoncé suivant est vrai ou faux :

$$\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 3 \land \exists x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 1$$

En effet, en analysant cet énoncé, on peut remarquer que si les élèves interprètent la variable x comme étant la même occurrence pour les deux quantificateurs, c'est-à-dire en interprétant incorrectement l'énoncé comme étant équivalent à

$$\exists x \in \mathbb{N},\ (x \geqslant 3 \wedge x \leqslant 1)$$

alors ils répondront que cet énoncé est faux. Le rôle de l'enseignant est de corriger cela en indiquant que chaque occurrence constitue une nouvelle instance. Lorsqu'il s'agit de transférer ce qui vient d'être fait à l'implication précédente, l'enseignant peut demander aux élèves de remplacer eux-mêmes les doubles occurrences pour vérifier la compréhension.

La rédaction constitue le moment le plus délicat de la séquence. En effet, c'est le moment où trois nouvelles notions sont introduites. Il s'agit de l'instanciation universelle et existentielle ainsi que la notion de représentant d'un ensemble. Dans cette preuve, l'enseignant peut tenter de nombreuses occasions de proximité horizontale en reformulant les notions ou en plongeant les élèves dans une gestuelle de jeu pour qu'ils visualisent mieux la situation. Il faut bien réaliser l'exercice étape par étape : poser μ_1, regarder ce que l'on doit prouver pour μ_1 et ce qu'on peut tirer de l'hypothèse puis conclure. Il est important que l'enseignant insiste lors de l'instanciation existentielle car nous savons que celle-ci est sujette à des difficultés. Pour favoriser la compréhension, l'enseignant peut tenter d'amener les élèves à trouver eux-même la valeur de μ_2.

IV.3.6 Analyse de la sixième partie

La sixième partie est la séquence d'exercices. Ceux-ci sont prévus pour être réalisés individuellement par les élèves. Les élèves peuvent ensuite utiliser le tableau blanc interactif pour la correction afin de mettre en commun et discuter des réponses. Le rôle de l'enseignant est de repérer les difficultés potentiellement que rencontrent les élèves lors du travaille en autonomie mais aussi lors des corrections communes et de les pousser à toujours utiliser les différents registres qui sont à leur disposition afin de donner plus de sens aux notions. Nous présentons premièrement les exercices et nous donnons ensuite une solution que nous réalisons pour chacun d'eux de façon à ensuite analyser les difficultés potentielles, les compétences testées ainsi que les adaptations à réaliser sur les connaissances.

Exercices

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux, réalisez une preuve de ce que vous affirmez.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$

2. $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$
5. $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 1$

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux, réalisez une preuve de ce que vous affirmez.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x < y$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y$
3. $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x > y$
4. $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y$
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x < y$

Prouvez les énoncés suivants.

1. Soit A, un sous-ensemble des nombres naturels.
$$\forall x \in A,\ x \leqslant 4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ x < y$$
2. Soit A, un sous-ensemble des nombres réels
$$\exists x \in \mathbb{R}^{<0}, \forall y \in A,\ y < x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in A,\ y < x$$

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux, réalisez une preuve de ce que vous affirmez.

1. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ y \leqslant x \leqslant z$
2. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ y < x < z$

Solution des exercices

Première série d'exercices.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$

Cet énoncé est vrai.

Démonstration. Prenons $x = 2$ ($2 \in \mathbb{N}$).

Nous avons $x \geqslant 0 \ \Leftrightarrow 2 \geqslant 0$

$\square$

2. $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$

Cet énoncé est vrai.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{N}$.

Nous avons $x \geqslant 0$ car $x \in \mathbb{N}$ et par définition des nombres naturels. $\square$

3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$

Cet énoncé est vrai.

Démonstration. Prenons $x = 2$ $(2 \in \mathbb{R})$.

Nous avons $x \geqslant 0 \ \Leftrightarrow 2 \geqslant 0$ $\square$

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$

Cet énoncé est faux. Montrons que la négation est vraie.

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x < 0$$

Démonstration. Prenons $x = -1$ $(-1 \in \mathbb{R})$.

Nous avons $x < 0 \Leftrightarrow -1 < 0$ $\square$

5. $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 1$

Cet énoncé est faux. Montrons que la négation est vraie.

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{N},\ x < 1$$

Démonstration. Prenons $x = 0$ $(0 \in \mathbb{N})$.

Nous avons $x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1$ $\square$

Deuxième série d'exercices.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x < y$

Cet énoncé est vrai.

Démonstration. Prenons $x = 0$ ($0 \in \mathbb{N}$) et $y = 1$ ($1 \in \mathbb{N}$).

Nous avons $x < y \Leftrightarrow 0 < 1$

$\square$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y$

Cet énoncé est faux. Montrons que la négation est vraie.

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geqslant y$$

Démonstration. Prenons $x = 2$ ($2 \in \mathbb{R}$) et $y = -2$ ($-2 \in \mathbb{R}$)

Nous avons $x \geqslant y \Leftrightarrow 2 \geqslant -2$

$\square$

3. $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x > y$

Cet énoncé est faux. Montrons que la négation est vraie.

La négation est

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{N}$. Prenons $y = x$ ($x \in \mathbb{R}$)

Nous avons $x \leqslant y \Leftrightarrow x \leqslant x$

$\square$

4. $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y$

Cet énoncé est vrai.

Démonstration. Prenons $x = 0$ ($0 \in \mathbb{N}$). Soit $y \in \mathbb{N}$.

Nous avons $x \leqslant y \Leftrightarrow 0 \leqslant y$, ce qui est vrai car $y \in \mathbb{N}$.

$\square$

5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x < y$

Cet énoncé est vrai.

Démonstration. Prenons $x = -1$ ($-1 \in \mathbb{R}$). Soit $y \in \mathbb{N}$.

Nous avons $x < y \Leftrightarrow -1 < y$, ce qui est vrai puisque $-1 < 0 \leqslant y$ car $y \in \mathbb{N}$.

□

Troisième série d'exercices

1. Soit A, un sous-ensemble des nombres naturels.

$$\forall x \in A,\ x \leqslant 4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ x < y$$

Démonstration. Supposons

$$\forall x \in A,\ x \leqslant 4$$

et montrons que

$$\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ x < y$$

Prenons $y = 5$ ($5 \in \mathbb{N}$). Soit $x \in A$.

Nous avons $x < y \Leftrightarrow x < 5$ ce qui est vrai car $x \in A$ et par hypothèse $x \leqslant 4$ et $4 < 5$.

□

2. Soit A, un sous-ensemble des nombres réels

$$\exists x \in \mathbb{R}^{<0}, \forall y \in A,\ y < x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in A,\ y < x$$

Démonstration. Supposons

$$\exists x \in \mathbb{R}^{<0}, \forall y \in A,\ y < x$$

et montrons que

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in A,\ y < x$$

ou encore

$$\forall a \in \mathbb{N},\ \forall b \in A,\ b < a$$

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in A$.

Par hypothèse, nous avons un certain $x < 0$ ($x \in \mathbb{R}$) tel que

$$\forall y \in A,\ y < x$$

Or, $b \in A$ donc $b < x$. Puisque $x < 0$ et que $a \in \mathbb{N}$, nous avons $x < a$ et donc $b < a$.

□

Quatrième série d'exercices.

1. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ y \leqslant x \leqslant z$

Cet énoncé est vrai.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{N}$. Prenons $y = x$ et $z = x$ ($x \in \mathbb{N}$).

Nous avons $y \leqslant x \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant x \leqslant x$.

□

2. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ y < x < z$

Cet énoncé est faux. Montrons que la négation est vraie.

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ \big(y \geqslant x \text{ ou } x \geqslant z\big)$$

Démonstration. Prenons $x = 0$ ($0 \in \mathbb{N}$). Soit $y \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{N}$.

Puisque $y \in \mathbb{N}$, nous avons $x \leqslant y \Leftrightarrow 0 \leqslant y$ ce qui est vrai par définition des nombres naturels.

□

Analyse des exercices

Notons premièrement que l'ensemble de ces exercices constitue des tâches de mise en fonctionnement des connaissances relevant du niveau mobilisable. En effet, les techniques de preuves viennent d'être données aux élèves. Ceux-ci doivent maintenant les adapter dans des exercices.

La première série d'exercices comprend uniquement des énoncés composés d'un seul quantificateur relativement simples. Ainsi, ceux-ci permettent aux élèves de s'habituer au changement de cadre qui constitue un changement majeur. Le but est donc d'observer si ce changement impacte ou non la compréhension de la notion de quantificateur chez les élèves.

Le premier exercice ne met en avant aucune difficulté potentielle si ce n'est qu'il y a présence d'un choix non forcé. Dès lors, on peut s'attendre à ce que des élèves proposent plusieurs valeurs différentes pour x. L'enseignant peut alors rappeler qu'il suffit d'en exhiber un pour prouver l'énoncé existentiel. La deuxième question permet d'introduire la notion de représentant dans les exercices et pourrait donc amener des difficultés sur cette notion si celle-ci a mal été comprise lors du cours magistral. La troisième question est similaire à la première et permet de mettre en évidence la notion de domaine pour sensibiliser les élèves. En effet, nous avons fait remarquer dans la section II.3 que le domaine peut parfois poser problème chez les apprenants. Les deux dernières questions sont similaires, elles permettent de vérifier si les élèves exhibent correctement les négations. La quatrième question amène un choix non forcé pour le choix du x alors que la cinquième amène un choix forcé. Il s'agit alors d'un bon endroit pour vérifier si le choix non forcé amène plus de difficulté et si les élèves tiennent bien compte du domaine.

La deuxième série d'exercices met en avant des énoncés pouvant amener des difficultés liées à l'inversion des quantificateurs

Le premier énoncé présente deux quantificateurs existentiels. La dépendance des quantificateurs est visible dans la preuve. L'élève devra ainsi adapter ses connaissances en réalisant une structuration de sa preuve, calquée sur l'ordre des quantificateurs de l'énoncé ainsi qu'un choix non forcé pour la variable y. Le deuxième énoncé permet aussi de s'assurer que les élèves interprètent bien l'ordre des quantificateurs. En effet, on peut s'attendre à ce qu'un élève nous affirme que l'énoncé est vrai car « quel que soit deux nombres réels, l'un est toujours plus petit que l'autre » ce qui nous indiquerait une confusion sur l'ordre. La troisième question permet de mettre de vérifier si la théorie des jeux a bien prévenu les problèmes d'inversion. En effet, s'il y a confusion, un élève peut affirmer que l'énoncé est vrai. De plus, cet exercice demande à l'élève de bien adapter ses connaissances en introduisant plusieurs étapes et en réalisant un bon choix lors de l'instanciation de y. La quatrième question permet de vérifier l'intérêt que porte l'élève sur le domaine. En effet, cet énoncé est faux dans les nombres réels. À nouveau, cet exercice peut mettre en évidence des difficultés liées à l'inversion des quantificateurs. La cinquième question est presque identique à la précédente et teste les mêmes aspects.

La troisième série est la plus difficile. En effet, les élèves n'ont eu l'occasion de travailler que sur un seul exemple dans le cadre de la théorie des jeux. Cette série doit donc être faite avec l'aide de l'enseignant. Elle permet de mettre en évidence les capacités d'instanciation universelle et existentielle des élèves. Vu qu'il y a présence de doubles quantifications, nous pouvons à nouveau vérifier si des problèmes au niveau de l'ordre transparaissent.

Ainsi, le premier exercice amène une occasion de proximité horizontale qui nous semble nécessaire de tenter pour amener les élèves à réaliser un bon choix pour y. Cette proximité consiste à réaliser un schéma similaire à celui présenté dans la FIGURE IV.9. D'autre part, il faudra bien vérifier que les élèves comprennent la différence de traitement d'un énoncé utilisé comme propriété à prouver avec un énoncé utilisé comme hypothèse. Cet énoncé peut aussi être formulé dans le registre de la langue naturelle pour amener les élèves à construire la preuve.

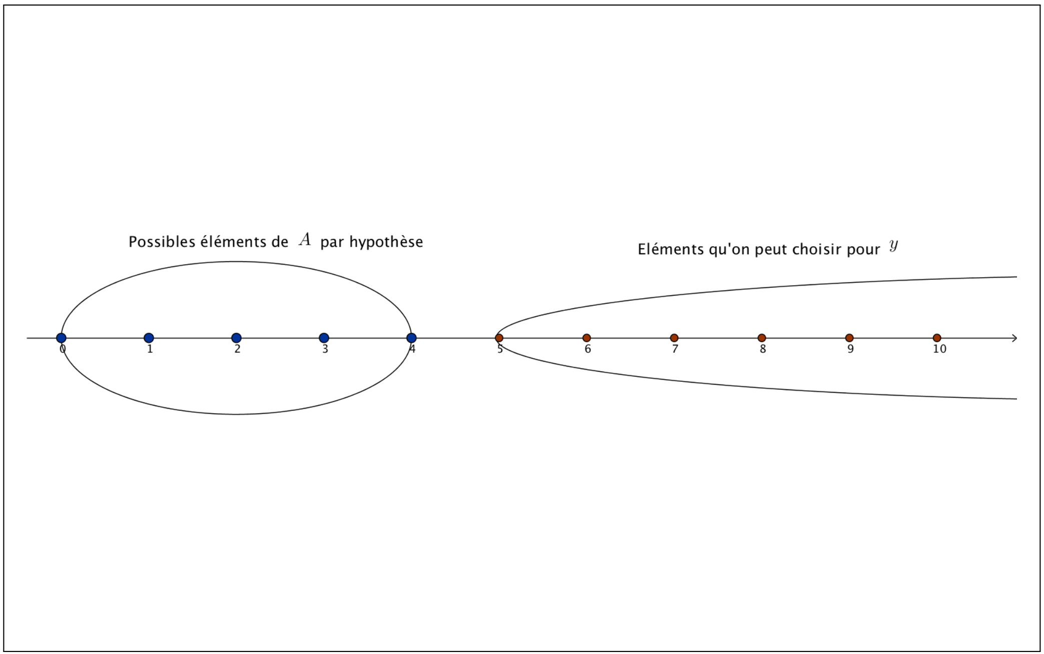


FIGURE IV.9 – Exemple de schéma pour réaliser l'exercice 1 de la série 3

Le deuxième énoncé peut à nouveau être amené grâce à schéma pour convaincre les élèves de la valeur de vérité de l'énoncé. Ici, il faut s'assurer que les élèves comprennent bien le sens de la thèse et de l'hypothèse. Un problème d'inversion des quantificateurs compromettrait la preuve. L'enseignant devra à nouveau introduire les étapes et bien faire ressortir l'utilisation de la thèse. Il s'agit d'un exercice délicat qui manipule trois ensembles différents.

La quatrième série constitue des exercices supplémentaires qui sont proposés aux élèves. Ils testent les mêmes aspects que la deuxième série. Le premier énoncé marque une dépendance des variables y et z par rapport à la variable x mais l'exercice reste relativement simple si les élèves prennent la peine de l'interpréter dans un registre graphique ou dans le registre de la langue courante. Le deuxième énoncé est plus compliqué car l'élève manque de connaissance pour résoudre l'exercice. En effet, nous n'avons pas entamé la négation de conjonction d'expression et l'exercice ici présente la conjonction $y < x \wedge x < z$. La négation est alors $y \geqslant x \wedge x \geqslant z$. L'enseignant doit alors rester à la disposition des élèves qui tenteraient l'exercice.

IV.4 Bilan

Nous avons construit une séquence qui permet aux élèves de manipuler la notion de quantificateur et qui semble prendre en compte les aspects de dépendance entre les quantificateurs. Le travail est réalisé dans le cadre de la théorie des jeux et sera évalué par l'intermédiaire de copies récoltées durant la séquence pour évaluer les connaissances sur les quantificateurs dans le cadre de la théorie des jeux et par une séance d'exercices sur tableau blanc interactif dans un cadre plus algébrique. Nous avons mis en évidence que les exercices sont susceptibles d'amener des difficultés liées à l'inversion des quantificateurs tout en prenant aussi en compte les différentes difficultés détaillées dans la section II.3. Nous consacrons alors le chapitre suivant à l'analyse de notre expérimentation où nous mettons en évidence les aspects conformes à l'analyse *a priori* et les différences qu'il y a pu avoir entre ce que nous avons prévu et le déroulement de la séquence.

Chapitre V

Expérimentation de la séquence

Dans ce chapitre, nous détaillons le déroulement de l'expérimentation. Celui-ci se scinde en deux parties. La première commente la présentation de la séquence devant la classe de sixième année du secondaire. La seconde partie consiste en une analyse des copies récoltées lors du travail sur la troisième question centrale de la séquence.

V.1 Analyse du déroulement de la séquence

Dans cette section, nous reprenons les difficultés rencontrées au cours de la présentation, les discussions élèves-enseignant qui mettent en évidence des aspects qui nous semblent importants ainsi que les points qui, selon nous, se sont bien déroulés. Nous réalisons aussi une comparaison avec ce qui était prévu *a priori*. Cette analyse est organisée de la même façon que dans la section IV.3

V.1.1 Première partie

La première partie de la séquence a permis de familiariser les élèves avec les notions de théorie des jeux. Nous avons commencé par une introduction historique de celle-ci avant d'introduire le jeu « Pierre, Papier, Ciseaux ». Premièrement, l'ensemble des élèves connaît le jeu PPC ce qui a permis de tenter directement une proximité horizontale en plaçant les élèves dans une gestuelle de jeu. C'est dans cette gestuelle que nous avons introduit, l'une après l'autre, les trois questions centrales de la séquence dans le registre de la langue naturelle. Les réponses des élèves étaient instantanées et un élève a directement émis une argumentation pour la deuxième question qui est : « Si l'un des joueurs annonce comment il compte jouer, l'autre joueur peut-il gagner à coup sûr ». Ainsi, nous reprenons une discussion qui a eu lieu entre deux des élèves (noté A et B) et l'enseignant (noté C) :

A C'est logique cette question.

C Et pourquoi tu peux affirmer ça, tu peux me convaincre ?

A Euuuh... C'est parce que « Pierre, Papier, Ciseaux », c'est basé sur un triangle. En fait, il y a toujours quelque chose pour battre autre chose.

C Je ne suis pas convaincu.

A Regardez, si B joue en premier, je vais gagner. Vas-y Jean, joue.

B Oui c'est ça, ainsi si je fais pierre, tu vas faire papier, si je fais papier, tu vas faire ciseaux et si je fais ciseaux, tu vas faire pierre !

A Bah voilà c'est ça, vous voyez Monsieur ?

À la suite de cette discussion, nous avons demandé aux mêmes élèves s'ils pouvaient argumenter de la même façon le fait qu'ils estiment que la réponse à la troisième question est non et pour eux, la discussion précédente en était aussi une argumentation valable.

Lors de la modélisation de la situation, il n'y a pas eu de difficulté majeure avant l'expression des gains. Exhiber un ensemble comprenant des objets quelconques n'a pas semblé difficile pour les élèves. De plus, lorsque nous avons demandé comment exprimer une stratégie, les élèves ont émis sans difficulté l'expression « $\lambda \in S$ ». Une proximité descendante a été tentée en indiquant l'exemple « $Pierre \in S$ » et en faisant le lien « ici, λ vaut $Pierre$ » pour familiariser les élèves avec l'appartenance d'objets non réels à une ensemble.

Nous avons rencontré des difficultés lorsqu'il s'agit de reconnaître l'objet utilisé pour exprimer le gain d'un joueur. Aucun élève n'est parvenu à citer l'objet « fonction » malgré l'appui réalisé sur l'association d'un réel à un couple de stratégie. Les élèves n'ont ainsi rien proposé. Une tentative de proximité horizontale a alors été réalisée. Nous avons demandé aux élèves s'ils ne connaissaient pas un objet qui, à un nombre réel, associe un autre nombre réel en indiquant l'adaptation qu'ici, il s'agit d'associer un nombre réel à un couple de stratégie. Malgré cette tentative de proximité, la réponse n'est jamais venue des élèves et nous avons décidé de donner la réponse. Une fois donnée, l'objet fonction a été considéré comme trivial des élèves, qui ont indiqué que « *c'est logique !* ». Plusieurs d'entre eux ont alors fait la remarque qu'ils n'avaient vu que des fonctions où « on ne mettait qu'un seul nombre entre les parenthèses (en faisant référence aux parenthèses de la notation $f(x)$) ».

L'introduction du registre symbolique illustré à la FIGURE V.1 a permis d'éclaircir la situation et le statut de fonction de l'objet gain a pris du sens aux yeux des élèves en appuyant le fait que g_1 associe un nombre réel à chaque couple de stratégie.

$$g_1 : \begin{cases} \overbrace{S \times S}^{\text{des couples de } S} & \to & \mathbb{R} \\ (\lambda_1, \lambda_2) & \mapsto & g_1(\lambda_1, \lambda_2) \end{cases}$$

FIGURE V.1 – Extrait du tableau - gain dans le registre symbolique

Ainsi, nous avons tenté une proximité horizontale en reformulant les symboles mathématiques dans la langue naturelle. Nous avons ainsi indiqué que la première ligne de l'expression de la FIGURE V.1 signifie que g_1 est définie sur l'ensemble des couples de stratégies, ce qui nous a parmi d'introduire la notation de produit cartésien, et leur associe un nombre réel. Nous avons saisi l'occasion de recontextualisation pour demander aux élèves quel était l'ensemble image dans le cas de PPC. Ceux-ci ont alors rapidement indiqué qu'il s'agissait de $\{-1, 0, 1\}$. La deuxième ligne a permis de tenter une occasion de proximité descendante. Ainsi, nous avons explicité les exemples suivants :

- $g_1(Pierre, Papier) = -1$
- $g_2(Pierre, Papier) = 1$
- $g_1(Ciseaux; Ciseaux) = 0$

Nous avons relié chacun de ces exemples à la deuxième ligne de l'expression symbolique décontextualisée de la fonction de gain en indiquant, entre autres pour $g_1(Pierre, Papier)$ qu'ici le λ_1 de la définition est *Pierre* et le λ_2 est *Papier*. Ces tentatives de proximités semblent avoir clarifié les gains des joueurs pour les élèves.

Nous avons ensuite introduit le registre du tableau étape par étape en explicitant premièrement les gains du premier joueur, comme le montre la FIGURE V.2, pour ensuite introduire les gains du second joueur. Le but étant de prévenir des confusions éventuelles entre les couples de stratégies et les couples de gain.

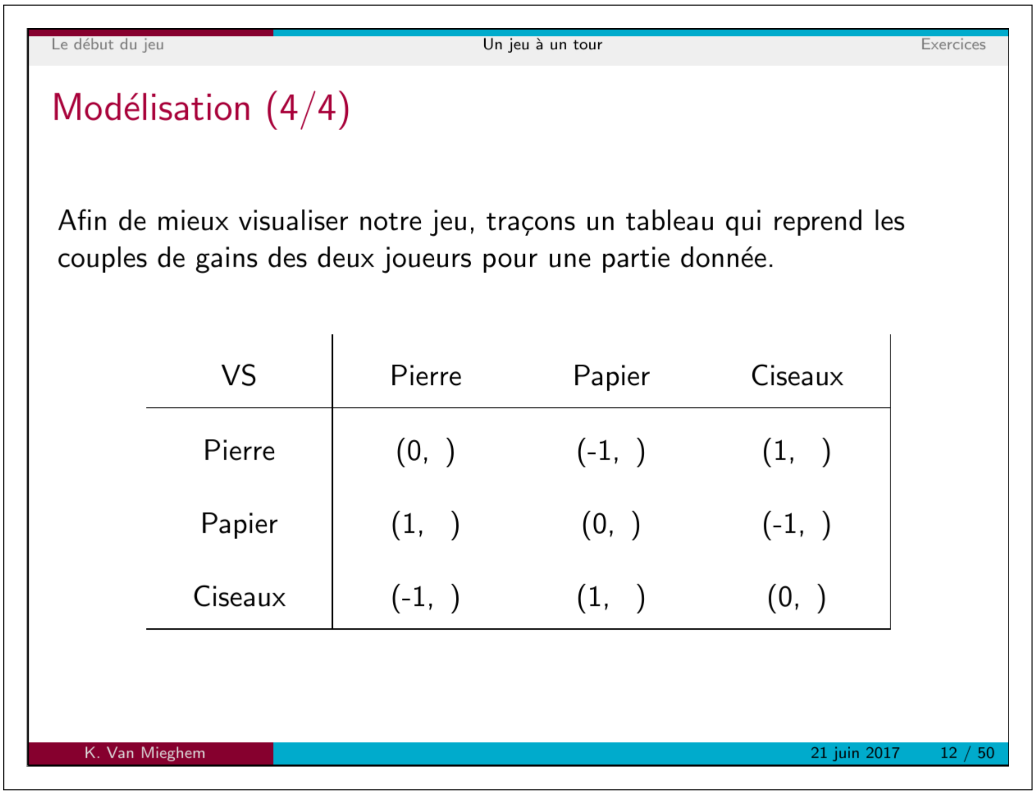


FIGURE V.2 – Introduction du jeu dans le registre du tableau

Par rapport à ce que nous avons prévu dans l'analyse *a priori*, nous nous rendons compte que seule la notion de gain a amené des difficultés de compréhension. La reconnaissance de celle-ci a semblé être délicate pour les élèves même si, une fois reconnue, la notion n'a pas amené de difficulté de compréhension. Les connaissances des ensembles réels des élèves semblent s'être directement transférées à la notion d'ensemble de stratégies ce qui constitue un bon point dans la maîtrise du cadre pour mieux entamer les parties de la séquence destinées au travail de la notion de quantificateur.

V.1.2 Deuxième et troisième parties

Dans cette partie, nous avons travaillé les trois questions centrales que nous reprenons :

1. Le jeu peut-il se terminer par une égalité ?
2. Si l'un des joueurs annonce comment il compte jouer, l'autre joueur peut-il gagner à coup sûr ?
3. Existe-t-il une stratégie qui permet de gagner à tous les coups ?

Première question

Lors du travail de traduction sur la première question, les élèves sont parvenus à exprimer sans aide le symbole du quantificateur existentiel mais ont omis le symbole d'appartenance en ne citant que « $\exists\lambda_1$ » . Cependant, après avoir exprimé les premiers symboles de l'expression « $\exists\lambda_1 \in S$ », les élèves ont correctement traduit la suite de l'énoncé sans l'aide de l'enseignant. Au terme de la traduction, une discussion autour de l'aspect séquentiel de la traduction a eu lieu entre un élève (noté A) et l'enseignant (noté B) :

A Mais Monsieur, les deux joueurs là, ils jouent en même temps et ici j'ai l'impression qu'on fait comme s'ils jouaient l'un après l'autre.

B Oui c'est vrai. C'est parce que tu peux t'imaginer que le jeu est séquentiel quand tu travailles, que les joueurs jouent l'un après l'autre, mais ensuite quand tu regardes l'énoncé, tu te rends compte qu'il caractérise bien le fait que c'est possible d'avoir une égalité quand les deux joueurs jouent en même temps, tu comprends ?

A Oui mais alors, on perd le hasard, je ne comprends pas.

B Tu dois voir l'énoncé comme un tout. Quand tu le lis, tu le traites de façon séquentielle mais quand tu interprètes ce qu'il veut dire, tu dois le voir comme un tout.

A Ah oui ok, ok.

B Tu comprends mieux ?

A Oui oui.

B Tu verras quand on fera la preuve, on va faire comme s'ils jouaient l'un après l'autre et cela va bien nous aider.

A D'accord.

Cette discussion indique que la traduction de la première question morceau par morceau peut déjà amener les élèves à traiter l'énoncé de manière séquentielle et à transférer ce point de vue sur la gestuelle du jeu. Cela nous a ainsi permis d'indiquer aux élèves que ce traitement séquentiel est intéressant dans la rédaction de preuve. En effet, nous pensons que le travail séquentiel d'un énoncé amène à mieux considérer les dépendances entre les variables. Nous avons ensuite pris appui sur cette discussion pour replacer les élèves dans la gestuelle de jeu, en le rendant séquentiel comme l'a remarqué l'élève lors de la discussion. Chaque joueur joue ainsi à tour de rôle. Cela a bien permis d'amorcer la preuve. En effet, lorsqu'on demande au premier élève ce qu'il doit jouer, celui-ci a affirmé qu'il pouvait jouer ce qu'il voulait dans l'optique de réaliser une égalité. Après avoir choisi, le deuxième élève a choisi la même stratégie que le premier. Cette gestuelle s'est ensuite directement retranscrite dans la preuve en mettant en relation chaque choix de variable dans la rédaction avec les choix réalisés par les élèves lors du jeu. Ainsi, pour le choix du premier paramètre, les élèves ont indiqué que nous pouvons prendre la stratégie que nous voulons et, lors du choix du second paramètre, ceux-ci ont indiqué qu'il fallait prendre la même stratégie que le premier paramètre.

Cela a permis de montrer aux élèves que cet aspect séquentiel met en avant une dépendance des paramètres introduits par rapport aux paramètres déjà introduits, ce qui a semblé logique pour les élèves et n'a pas suscité de question ou de remarque. Ainsi, il semble que la maîtrise du cadre et la gestuelle a ici fait éviter toute discussion que nous avons prévue sur le choix libre du λ_1 et le choix forcé du λ_2 qui ont semblé naturels pour les élèves.

Deuxième question

Le travail de traduction de la seconde question s'est déroulé sans rencontrer de difficulté majeure. Nous avons décidé d'envoyer un élève au tableau qui avait indiqué connaître le symbole du quantificateur universel. Celui-ci a alors indiqué la traduction sans commettre d'erreur avec l'aide des autres élèves.

Nous avons ensuite replacé les élèves dans une gestuelle de jeu tout en rappelant la discussion qu'il y avait eu au début de la séquence à propos de cette question (où un élève avait émis une idée de preuve). Le travail séquentiel de l'énoncé n'a plus suscité de confusion chez les élèves et la gestuelle a, à nouveau, permis de donner aux élèves une bonne idée de la structure de la preuve. En effet, nous avons mis en évidence dans la gestuelle qu'il y avait trois cas et que pour chacun de ces cas, le deuxième joueur devait choisir une stratégie adaptée pour gagner, nous permettant ainsi d'introduire le fait que pour montrer une propriété précédée de $\forall \lambda_1 \in S$, il est suffisant de montrer la propriété pour chaque λ_1 de S.

Ainsi, lors de la rédaction de la preuve, nous avons explicité les cas possibles pour λ_1 et isolé la propriété

$$\exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

à montrer pour chacun des cas. Nous avons ensuite laissé du temps aux élèves pour réaliser la fin de la preuve qui a été commencée comme présenté à la FIGURE V.3.

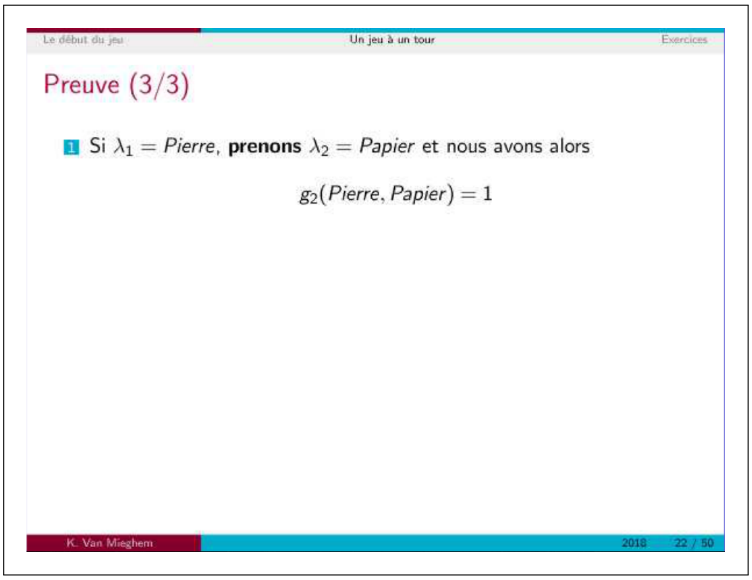


FIGURE V.3 – Extrait du tableau - début de preuve de la deuxième question

Lors du travail individuel, de nombreux élèves ont indiqué que l'exercice était similaire à la question précédente, ce qui nous amène à penser que l'instanciation d'une variable quantifiée existentiellement est comprise. Certains élèves ont aussi demandé comment faire s'il y a plus de cas, ce qui nous a permis de leur indiquer qu'il existe une autre façon de faire, grâce à la notion de représentant.

Lors de la correction réalisée par l'enseignant au tableau, la majorité des élèves ont réalisé une preuve correcte et se sont replongés dans une gestuelle de jeux pour argumenter leur raisonnement. Nous avons à nouveau mis en évidence la dépendance du paramètre λ_2 par rapport au paramètre λ_1, ce qui a été clair pour l'ensemble des élèves.

Durant le travail de la deuxième question, nous avons vraiment senti que la gestuelle du jeu a amorcé la structure de la preuve, notamment pour introduire les différents cas pour λ_1 où un élève a indiqué qu'il y avait trois possibilités comme quand nous avons joué et facilité le choix du paramètre pour les élèves qui prenaient appui sur l'action du second joueur pour choisir une stratégie pour λ_2.

Troisième question

Après avoir repris dans le registre de la langue naturelle la troisième question, nous avons à nouveau laissé un élève écrire la traduction de celle-ci dans le registre symbolique au tableau, ce qui a été réalisé sans erreur et sans difficulté, nous amenant à penser que les élèves commencent à bien maîtriser la compétence de traduction. Nous avons ensuite questionné les élèves pour demander si l'un d'entre eux avait une idée de ce qu'il fallait prouver pour vérifier que cette question était fausse. Aucun élève n'a proposé la réponse attendue, mais nous reprenons une discussion qui indique que les élèves émettent des arguments de cause à effet (l'élève est noté A et l'enseignant est noté B) :

A On vient de montrer que chaque stratégie peut être contrée donc ça veut dire qu'il n'y en a pas une qui gagne contre toutes. Donc c'est la phrase d'avant qu'il faut montrer mais on l'a déjà fait.

B Je suis d'accord avec toi. En fait, l'énoncé qu'on a prouvé avant implique cet énoncé. L'implication on la verra après. Garde bien à l'esprit ce que tu viens de dire, nous, on va regarder ce qu'il faut vraiment montrer au minimum pour montrer que c'est faux. Parce que l'énoncé précédent, il montre plus qu'il n'en faut.

Cette discussion nous a alerté dans le sens où il était peut-être nécessaire d'introduire à ce moment-ci de la séquence les notions de condition nécessaire et suffisante. En effet, la séquence n'indique à aucun moment ce qu'est réellement une preuve d'un énoncé, ce qui amène certains élèves à vouloir prouver une propriété suffisante pour démontrer une autre propriété. Nous avons choisi de ne pas improviser d'introduction à ces notions pour ne pas amener de difficultés et de notions supplémentaires et indiqué aux élèves que pour montrer un énoncé, il fallait prouver l'énoncé même et pas un autre qui pourrait en être la cause, ce qui a paru injuste à un élève à qui nous avons suggéré d'attendre pour voir ce qu'il fallait réellement prouver.

V.1.3 Quatrième partie

Nous rappelons que cette partie consiste à apprendre aux élèves à expliciter la négation d'un énoncé. Nous leur avons premièrement suggéré d'expliciter, dans le registre de la langue naturelle, les négations des phrases « Tous les chiens sont blancs » et « Il existe un homme sur Terre qui mesure plus de 4 mètres » en posant la question comme telle : « que prouveriez-vous pour montrer que ces phrases sont fausses ? ». Les négations attendues à l'analyse *a priori* ont été données. Ainsi, la majorité des élèves a indiqué que les négations étaient « Tous les chiens ne sont pas blancs » et « Il n'existe pas d'homme sur Terre qui mesure plus de 4 mètres ». Nous avons alors demandé aux élèves de donner les négations sans utiliser de « ne ... pas » sur le premier verbe. La négation de la première phrase est alors venue directement alors que la deuxième a nécessité plus de réflexion.

Le travail sur les négations de ces phrases a bien permis d'amorcer le travail sur les énoncés mathématiques dans le registre symbolique. Ainsi, par le biais de comparaison entre les phrases et le travail réalisés sur celles-ci et les énoncés suivants reformulés dans la langue naturelle, les élèves sont parvenus sans difficulté majeure à émettre les négations suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 5$
2. $\exists n \in \mathbb{N}n\ n < 0$

La seule difficulté rencontrée a porté sur la négation de « $n > 5$ » où plusieurs élèves ont indiqué que la négation est « $n < 5$ ».

Cette partie semble ainsi nous montrer que la langue naturelle influence les élèves à nier des phrases par l'emploi du « ne ... pas » mais que celle-ci, une fois bien cadrée, permet d'introduire la négation d'une façon qui nous semble efficace.

Nous avons ensuite proposé aux élèves de prouver les deux énoncés obtenus suivants, en sachant que le deuxième n'était pas accessible car nous n'avons pas encore vu la notion de représentant :

1. $\exists n \in \mathbb{N},\ n \leqslant 5$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 0$

Contrairement à ce que nous pensions, le changement de cadres n'a pas amené de remarque ou de changement de traitement des énoncés de la part des élèves qui ont directement choisi une valeur correcte pour n pour la preuve du premier énoncé, nous confortant dans l'idée que les premières parties de la séquence semblent bien expliquer l'instanciation d'une variable quantifiée existentiellement aux élèves.

Pour le second, les élèves ont du adapter leurs connaissances au vu du manque de savoir et ont tenté d'énumérer les naturels en vérifiant qu'ils sont positifs et en clôturant leur preuve par « etc. », ce qui était prévisible compte tenu du fait que la notion de représentant n'est pas connue et du travail réalisé lors du traitement de la deuxième question centrale où nous avons distingué tous les cas de l'ensemble des stratégies.

Nous avons alors indiqué aux élèves que nous allons voir une méthode pour prouver un « pour tout » qui est associé à un domaine infini ou qu'on ne connait pas.

Les conclusions des FIGURES V.4 et V.5 ont été déduites naturellement par les élèves sans rencontrer de difficulté grâce à une tentative de proximité ascendante consistant à les exprimer en décontextualisant le travail réalisé sur les propositions précédentes. L'aspect plus syntaxique des conclusions et l'absence de domaine dans celle-ci n'a pas suscité de question.

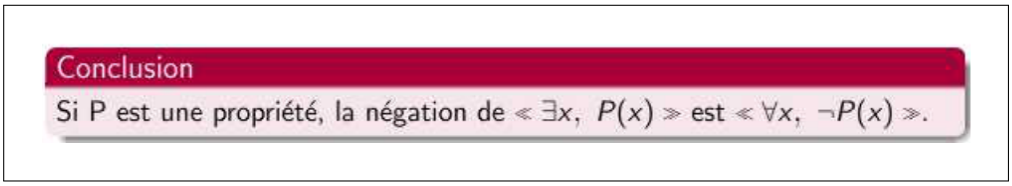


FIGURE V.4 – Extrait du tableau - conclusion n° 1

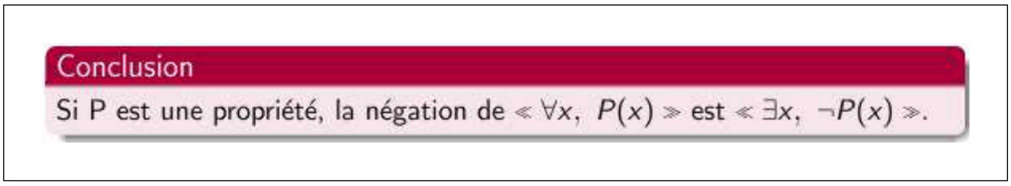


FIGURE V.5 – Extrait du tableau - conclusion n° 2

Par la suite, nous avons repris l'énoncé de la troisième question centrale de la séquence et nous avons exprimé sa négation. Vu qu'il s'agissait de la première fois que nous réalisions l'expression de la négation d'un énoncé doublement quantifié, nous avons travaillé de manière séquentielle en niant quantificateur par quantificateur pour ainsi suivre les quatre étapes ci-dessous :

$$(1) \quad \neg(\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1)$$

$$(2) \quad \forall \lambda_2 \in S,\ \neg(\forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1)$$

$$(3) \quad \forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ \neg(g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1)$$

$$(4) \qquad \forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$$

Pour passer de la première à la deuxième étape, nous avons saisi l'occasion de proximité descendante consistant à se raccrocher à la conclusion de la FIGURE V.4 en indiquant aux élèves qu'ici, le P de la définition est « $\forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$ » et, de la même manière, nous avons pris appui sur la conclusion de la FIGURE V.5 pour passer de la deuxième à la troisième étape. Même si les élèves n'ont pas éprouvé de difficulté dans ce travail de substitution des symboles dans les conclusions, nous avons remarqué que ceux-ci ne comprenaient pas le lien qu'il y a entre un énoncé et sa conclusion et donc que la preuve de la négation montre que l'énoncé est faux. En effet, lorsque nous leur avons demandé s'ils étaient convaincus qu'en démontrant l'énoncé obtenu par la négation, nous démontrons que l'énoncé de départ est faux, ceux-ci ont indiqué qu'ils ne voyaient pas pourquoi.

Pour tenter de faire passer ce lien, nous avons effectué un changement de registre sur l'exemple actuel pour exprimer (4) dans la langue naturelle et se convaincre que la preuve de cet énoncé affirme bien que l'énoncé de départ est faux. Le lien entre les énoncés a alors pris plus de sens aux yeux des élèves qui ont ainsi répondu correctement à la question suivante : « que vais-je obtenir si je refais la négation de (4) ? »

La preuve que la négation est vraie a été demandée sur papier et reprise. Nous avons laissé quinze minutes de rédaction aux élèves. Nous réalisons une analyse des copies dans la section suivante. La FIGURE V.6 reprend la correction d'une élève qui a été réalisée sans aide de la part de l'enseignant et des autres élèves après la reprise des copies au tableau et qui montre une structure de rédaction. L'élève a ainsi pris la peine d'indiquer l'ensemble S pour plus facilement énumérer les cas.

Durant le travail individuel, nous nous sommes rendu compte que le traitement séquentiel d'un énoncé semble devenir un automatisme lors de la rédaction de preuve. En effet, tous les élèves ont structuré leur raisonnement en fonction de l'enchaînement des quantificateurs dans l'énoncé, en les traitant un par un et en considérant la dépendance entre eux. De plus, l'ensemble des élèves se sont systématiquement replongés dans une gestuelle de jeu pour réaliser les choix pour λ_1 qui n'étaient pas forcés. Un élève a proposé de réaliser plusieurs preuves puisqu'il y avait plusieurs valeurs correctes pour λ_1. Dès lors, nous lui avons demandé si un seul choix était suffisant pour prouver que l'énoncé est vrai, ce qu'il a répondu affirmativement.

Ainsi, le cadre de la théorie des jeux semble, au terme du travail sur les trois questions centrales prises individuellement, amener les élèves à traiter un quantificateur après l'autre et à considérer les liens qu'il existe entre ceux-ci.

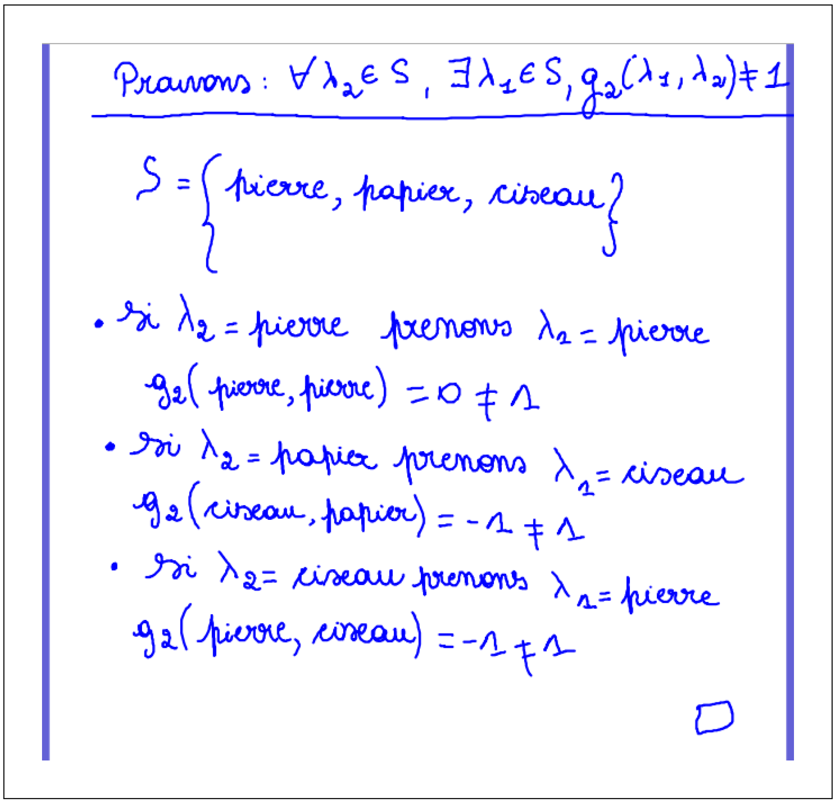


FIGURE V.6 – Extrait du tableau - correction de la preuve de la troisième question par une élève

V.1.4 Cinquième partie

Nous rappelons que cette partie consiste à introduire la notion d'implication entre la deuxième et la troisième phrases centrales de la séquence. Nous avons commencé par réintroduire ces deux questions dans les registres de la langue naturelle et symbolique. Ici, les élèves ont éprouvé des difficultés à comparer les deux énoncés. Ils ont indiqué que ces deux énoncés étaient syntaxiquement très similaires et ont demandé de rappeler en quoi ils étaient différents.

Dès lors, nous avons réinterprété ces énoncés dans une gestuelle de jeu en jouant à « Pierre, Papier, Ciseaux », ce qui a permis aux élèves confus de saisir la différence entre les deux énoncés et de se remémorer les preuves qui avaient été réalisées la semaine précédente.

Le fait que le troisième énoncé implique le deuxième a mis plus de temps à émerger lorsque nous avons demandé aux élèves s'il était possible que la troisième question centrale soit vraie et que la deuxième soit fausse. Certains élèves ont indiqué que c'était possible alors que la troisième implique la deuxième. C'est la raison pour laquelle nous avons réagi introduisant un nouveau jeu, similaire à « Pierre, Papier, Ciseaux » dans lequel nous ajouté la stratégie « Puit » qui permet de gagner contre toutes les stratégies (dans le cas où les deux joueurs jouent « Puit », chaque joueur obtient un gain de 1).

À partir de ce jeu et grâce à la gestuelle associée, les élèves se sont convaincus que le troisième énoncé était vrai en désignant la stratégie « Puit ». Dès lors, lors du travail sur la deuxième question consistant à demander s'il existe toujours une stratégie qui permet de gagner contre une autre stratégie, les élèves ont indiqué que la stratégie « Puit » convenait dans tous les cas.

Ce passage semble montrer que le cadre de la théorie des jeux amène beaucoup d'intuition chez les élèves et facilite ainsi l'interprétation des énoncés en langage mathématique. Ici, c'est le lien entre les deux questions qui a été mis en évidence dans la gestuelle et convaincu les élèves que l'une implique l'autre.

Afin de mieux traiter l'implication entre ces deux énoncés qui utilisent les mêmes symboles de variable, nous avons placé les élèves devant l'énoncé

$$\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 3 \wedge \exists x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 1$$

et demandé s'il est vrai ou faux.

Très rapidement, la discussion suivante a eu lieu (où nous notons A l'élève et B pour l'enseignant) :

A Non, elle est fausse la phrase. En fait, le x, on suppose que c'est le même et que ça change pas ? C'est le même naturel ? Enfin le même nombre ? C'est le même x ?

B C'est justement ça la question. Je vais essayer de l'énoncer sans parler du x. À la place, je dirai « un naturel ». On est d'accord que dire qu'il existe x appartenant aux naturels, ça veut dire qu'il existe un naturel ?

A Oui.

B Alors, ça donne : il existe un naturel qui est plus grand que 3, c'est vrai ?

A Oui.

B Et il existe un naturel qui est plus petit que 1. C'est vrai ?

A Oui. 1 ou 0.

B Donc, sans prononcer x, cette phrase, elle est vraie ?

A Oui.

B C'est ainsi qu'il faut interpréter.

A Donc la phrase, elle est vrai Monsieur ?

Cette discussion met en avant deux choses. La première est que les élèves ont très vite cerné le problème de la phrase et se sont rendu compte que la valeur de vérité dépend de l'interprétation, ce qui met aussi en avant que ceux-ci comprennent la signification de l'énoncé. La seconde est que ceux-ci ont très vite compris le fait que chaque nouvelle occurrence de symbole de variable annonce une nouvelle variable.

Afin de vérifier la compréhension des élèves sur ce qui vient d'être fait, nous avons suggéré de réaliser la preuve de l'affirmation

$$\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 3 \wedge \exists y \in \mathbb{N},\ y \leqslant 1$$

Celle-ci a été réalisée sans rencontrer de difficulté, les élèves ayant introduit d'eux-mêmes la séparation de la preuve en deux parties dues au symbole $\wedge$ et choisi des valeurs correctes pour les variables x et y.

Nous sommes alors revenu sur l'implication (5) suivante :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

et avant demandé aux élèves ce qu'on pouvait faire pour que ce soit plus clair pour réaliser une preuve en rappelant ce qui venait d'être fait.

Rapidement, les élèves ont proposé de remplacer les deuxièmes occurrences de λ_1 et λ_2 par λ_3 et λ_4 (nous avons cependant suggéré les symboles μ_1 et μ_2 en motivant le fait de conserver les numéros associés aux joueurs).

Avant de remplacer, nous leur avons demandé si les λ de $g_2(\lambda_1, \lambda_2)$ de la prémisse étaient les mêmes que les λ de $g_2(\lambda_1, \lambda_2)$ de la conclusion et les élèves ont bien répondu non, ce qui nous a convaincu qu'ils comprennent que chaque occurrence est différente. Nous avons ainsi examiné chaque λ de l'énoncé et indiqué où il était introduit avant de remplacer les deuxièmes occurence.

Le travail de la preuve a été très compliqué et a suscité de nombreuses discussions. Un élève ne comprenait pas comment montrer qu'il existe un λ_2 (dans la prémisse) vu qu'il ne connaissait pas le jeu. Cette confusion peut être liée au fait que l'implication de la langue française tend à ne considérer que les implications à prémisses vraies, ce qui amènerait l'élève à penser qu'il doit montrer que la prémisse traitée ici doit être vraie. Afin de remédier à la situation, nous avons d'abord présenté la phrase suivante :

« *Si j'obtiens une bonne note à mon examen alors mes parents m'offrent un cadeau* »

et nous avons demandé aux élèves si, de cette phrase, on pouvait déduire avoir obtenu une bonne note aux examens, ce à quoi ils ont répondu négativement. Nous avons ainsi convaincu l'élève qui voulait prouver que la prémisse était vérifiée. Nous avons également demandé aux élèves si la phrase était contredite dans le cas où nous avons obtenu une mauvaise note à l'examen et que nos parents nous offre un cadeau et tous les élèves ont été d'accord de dire que la phrase n'était pas contredite. Dès lors, afin d'appuyer le fait que pour montrer une implication, on suppose la prémisse et on montre la conclusion, nous avons demandé aux élèves ce qu'il fallait vérifier pour que cette phrase soit vraie. Ceux-ci ont alors bien indiqué qu'il fallait supposer qu'on ait réussi ses examens et vérifier que nous avons bien reçu un cadeau de nos parents.

Ce travail a bien permis d'introduire la structure de la preuve de (5) en supposant que la prémisse est vraie et en considérant la conclusion comme énoncé à prouver.

Un autre point qui a été très délicat est la notion de représentant. Nous avons saisi une occasion de proximité horizontale en réintroduisant l'exemple

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 0$$

La preuve de cet exemple a été réalisée en introduisant un représentant des nombres naturels que les élèves ont considéré comme « éléments des naturels dont on ne connait pas l'identité », idée que nous avons ensuite transférée sur l'ensemble des stratégies.

Lors de l'utilisation de l'hypothèse, les élèves ont aussi eu des difficultés à se rendre compte d'eux-mêmes que, l'énoncé $\forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$ étant considéré comme vrai, ils peuvent en déduire que $g_2(\mu_1, \lambda_2) = 1$. Il s'agit alors de la règle d'instanciation universelle selon Coppi qui n'a pas paru immédiate pour l'ensemble des élèves.

Nous ne sommes pas parvenu à rendre la preuve claire pour l'ensemble des élèves. Seuls deux élèves sont parvenus à la comprendre en affirmant qu'ils ne seraient pas capables de reproduire un tel travail seuls. Nous avons alors décidé de nous concentrer sur les exercices car nous nous sommes rendu compte que la compréhension d'une telle implication nécessite un travail préalable sur des implications dont les prémisses et les conclusions comportent au plus un quantificateur et non deux. L'instanciation existentielle pour considérer λ_2 est la seule notion qui n'ayant pas amené de confusion dans la preuve.

V.1.5 Sixième partie

Nous détaillons le déroulement de la séquence d'exercices en suivant l'organisation des énoncés. Ainsi, nous commençons par commenter la réalisation de la première partie reprenant les énoncés composés d'un quantificateur. Ensuite, nous reprenons la réalisation des énoncés composés de deux quantificateurs pour terminer avec les implications. La réalisation des énoncés triplement quantifiés a été laissée en tant qu'exercices supplémentaires et aucun d'entre eux n'a été réalisé par les élèves.

Les exercices se sont déroulés de la façon suivante : nous avons laissé du temps aux élèves pour rédiger leurs réponses pendant lequel nous sommes passé dans les bancs pour remédier à d'éventuelles difficultés, nous envoyons un élève au tableau blanc interactif et nous vérifions si l'ensemble des solutions proposées par la classe rejoignent celle qui est proposée par l'élève au tableau par le biais d'une discussion.

À chaque énoncé, nous demandons aux élèves de réaliser une traduction dans le registre de la langue naturelle et d'interpréter avec leurs mots la signification de la phrase.

Première série d'exercices

Les deux premiers exercices ont été faits en commun avec la classe et l'enseignant pour accompagner les élèves dans le changement de cadres. Celui-ci n'a pas amené de difficulté et a plutôt suscité une remarque d'un élève. Au moment de l'instanciation de la variable x de l'énoncé $\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$, celui-ci a demandé s'il était nécessaire de dire que l'élément choisi pour x appartient bien au domaine, ici aux nombres naturels, ce qui nous amène à penser que certains réflexes d'instanciation peuvent se déclencher en réalisant un changement de cadres. La fin du premier exercice s'est déroulé sans difficulté. Pour le second exercice, les élèves ont bien instancié la variable x en utilisant le mot « Soit » malgré les difficultés rencontrées précédemment. Ces deux énoncés n'ont ainsi pas amené de difficulté aux des élèves. L'unique remarque des élèves concernait le symbole de relation d'équivalence sur lequel nous avons fait une petite parenthèse en indiquant qu'il est indispensable de placer ce symbole entre chaque égalité qui était équivalente car nous avons remarqué que l'utilisation de ce symbole n'était pas automatique.

Avant de laisser les élèves travailler à la rédaction des preuves des trois derniers énoncés de la première série, nous avons demandé oralement la valeur de vérité de ceux-ci. Tous les élèves ont correctement répondu après avoir traduit les énoncés dans le registre de la langue naturelle et les avoir reformulés avec leurs mots (par exemple, pour le quatrième énoncé, la reformulation a été « Tous les réels sont positifs ») et un élève a même explicité oralement la négation du quatrième énoncé et donné une preuve correcte.

Plusieurs élèves ont posé une question en ce qui concerne la preuve de la négation des énoncés faux. Ceux-ci ont demandé comment organiser une preuve lorsqu'on doit prouver que la négation est vraie. Nous avons alors rappelé comment expliciter la négation d'un énoncé en revenant sur les deux conclusions des FIGURES V.4 et V.5 et comment organiser une telle preuve en utilisant la langue naturelle de la façon suivante : « Nous voulons montrer que la propriété P est fausse. Pour cela, montrons que la négation de P est vraie, c'est-à-dire que $\neg P$ est vraie ». Ce rappel a été clair pour les élèves et n'a pas amené de question de leur part.

Lorsque les élèves ont explicité les négations des énoncés 4 et 5, ceux-ci ont fait l'erreur d'affirmer que la négation de $x \geqslant 0$ est $x \leqslant 0$. Puisque ce type d'erreur revenait fréquemment, nous avons décidé de réaliser une parenthèse sur la négation d'expressions mathématiques en amenant le tableau suivant :

Expression	Négation
$a = b$	$a \neq b$
$a \neq b$	$a = b$
$a \geqslant b$	$a < b$
$a > b$	$a \leqslant b$
$a \leqslant b$	$a > b$
$a < b$	$a \geqslant b$

Suite à cette première série, nous n'avons pas remarqué de difficulté majeure portant sur la notion de quantificateur. Notons cependant que la notion de représentant n'a pas été manipulée puisque les quatrième et cinquième énoncés, bien que quantifiés universellement, ont été niés. Notons qu'il n'y a plus eu d'erreur sur la négation d'expressions mathématiques non quantifiées suite à l'introduction du tableau ci-dessus.

Dans notre analyse *a priori*, nous nous étions questionné sur l'impact du changement de cadres. Au terme de cette première série qui visait à accompagner les élèves dans ce changement, nous pouvons dire que l'impact a ici été bénéfique en interpellant les élèves sur les domaines de quantification et en prévoyant ainsi des problèmes d'appartenance d'élément.

Deuxième série

Les deux premiers exercices de la deuxième série ont été donnés en préparation aux élèves. La correction a alors directement été faite à leur retour en classe où nous avons envoyé un élève au tableau. La rédaction du premier exercice n'a posé aucun problème, la majorité des élèves ayant correctement instancié les variables en vérifiant l'appartenance au domaine.

La traduction du deuxième énoncé a par contre amené une discussion. Un élève a tenté de traduire l'énoncé « $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, x < y$ » par « Tout réel est plus petit qu'un autre réel ». D'autres élèves ont indiqué que l'énoncé était faux mais que la traduction qui avait était donnée semblait être vraie. Lors de cette discussion, nous avons pu remarquer que les élèves avaient compris le sens de l'énoncé mais que la traduction était plus délicate à réaliser pour donner la signification de l'énoncé. Les élèves se sont alors mis d'accord sur la traduction « n'importe quel réel est plus petit que n'importe quel réel ».

La négation de cet énoncé a été réalisée sans difficulté et les élèves ont à nouveau instinctivement vérifié que les éléments instanciés appartiennent bien au domaine.

Le travail de traduction et de compréhension du sens du troisième énoncé a été réalisé sans difficulté. Mais le travail d'instanciation a amené des complications. En effet, lors de la preuve de l'énoncé $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y$, les élèves ne sont pas parvenus à exhiber un y par rapport à la variable x. Ceux-ci considéraient que le mot « prenons » devait toujours être suivi d'un nombre du domaine défini, ce qui n'est pas le cas ici puisqu'il doit dépendre de x qui a été instancié universellement. Dès lors, les élèves ont à nouveau voulu donner des valeurs à la variable x. De façon à remédier à cette difficulté, nous avons travaillé dans le registre de la langue courante et nous reprenons un extrait de discussion pour illustrer au lecteur, où nous notons A et B pour les élèves et C pour l'enseignant :

C Bon, le x qu'on a posé avec « Soit x appartenant aux naturels », c'est un naturel quelconque, c'est-à-dire...

A Qu'on ne le connait pas.

C Voilà, c'est ça. On doit faire quoi maintenant ?

A Montrer qu'il existe y appartenant aux naturels tel que y est plus grand ou égal à x.

C Et pour prouver ça, tu dois faire quoi ?

A Baaah... Prendre un y mais on ne connait pas x donc on ne sait pas quoi prendre pour y

C C'est vrai qu'on ne connait pas vraiment qui est x mais le x c'est un nombre naturel fixé. « Soit x », ça veut dire considérons un nombre x naturel fixé. Donc, quand tu as un nombre, tu prends quoi pour avoir un nombre plus grand ?

A Le suivant.

C Et le suivant, tu l'exprimes comment ?

A Bah je ne sais pas vu qu'on ne connait pas x.

B On peut faire « $+1$ » à x Monsieur ?

A Ah oui, on peut prendre $y = x + 1$ en fait ?

C Bien sûr que tu peux. Du coup, on met quoi ici (en montrant au tableau « Prenons $y =$ ») ?

B $x + 1$.

Cette discussion peut mettre en avant deux difficultés. La première est que les élèves ne cernent toujours pas le statut de représentant d'un ensemble. Dans la réalisation de l'exercice, certains élèves ont même attribué une valeur naturelle à x qu'ils disaient prendre au hasard. La seconde est le fait qu'ils ont tendance à considérer que le mot « Prenons » doit être suivi d'une valeur connue et bien définie. Nous avons dès lors bien pris attention à ces aspects dans la suite des exercices. Notons tout de même qu'aucune difficulté liée à l'inversion des quantificateurs n'a été rencontrée pour cet exercice.

Lors du travail individuel des élèves sur le quatrième énoncé, nous reprenons une discussion entre l'enseignant, noté B et un élève, noté A :

B Ton idée est bonne, mais le problème, c'est que la phrase commence par « il existe x » et donc ta preuve doit démarrer par « prenons $x =$ » et donc ton « prenons » doit être avant ton « soit » .

A C'est super important ça ?

B C'est super important dans le sens où, si tu inverses les quantificateurs, cette phrase est peut-être fausse.

A Ah ok, d'accord. Donc, il suffit juste que j'inverse dans la preuve. C'est juste parce que ça sonnait moins bien.

B En fait, quand tu prouves, tu dois vraiment suivre l'ordre de l'énoncé dans ta preuve comme on a fait remarquer quand on a fait les preuves pour « Pierre, Papier, Ciseaux ».

Cette discussion indique que l'élève a inversé les instanciations des variables dans sa rédaction. Cependant, il s'agissait de l'unique erreur dans la preuve. En effet, même si l'élève avait réalisé une inversion au niveau de la rédaction, l'interprétation de l'énoncé était correcte et l'inversion n'y avait pas eu lieu. La suite de sa preuve était réalisée dans ce sens.

Ce même élève a rédigé la preuve au tableau et les élèves ont fait la remarque que 0 était l'unique possibilité pour le choix de la variable x. Le y a été instancié correctement malgré les difficultés rencontrées sur le quantificateur universel lors du travail des énoncés précédents, ce qui semble nous montrer que, dans notre cas, les énoncés de type $\forall - \exists$ amènent plus de difficultés aux élèves du à une instanciation qui peut dépendre d'un représentant par rapport aux énoncés de type $\exists - \forall$ où la dépendance est moins marquée lors de l'instanciation de la variable quantifiée existentiellement.

Le dernier énoncé n'a pas amené d'ambiguïté. Les élèves ont même fait la remarque qu'ils pouvaient choisir une infinité de valeurs différentes correctes pour le choix de la variable x. Ce qui indique que la liberté du choix pour la variable n'a pas été un obstacle pour eux.

Étant donné les difficultés portant sur la notion de représentant, nous avons introduit à la suite de cette série d'exercices l'énoncé de type $\forall - \exists$ mettant en avant un travail plus conséquent lors du choix de la variable y :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{N}, y \geqslant x$$

Cet exercice a été réalisé en commun avec la classe et l'enseignant. La traduction de l'énoncé dans le registre de la langue naturelle ainsi que la détermination de la valeur de vérité ont été réalisés sans difficulté. Ici, l'instanciation de la variable x n'a pas posé de problème aux élèves et les élèves se sont très vite rendu compte que choisir $y = x$ était une erreur à cause du domaine, ce qui nous amène à penser que le travail réalisé lors du troisième énoncé a pu porter ses fruits.

Un élève a alors émis l'idée de prendre n'importe quel naturel si x est négatif, ce qui a amorcé la preuve représentée à la FIGURE V.7. Un autre élève a aussi appuyé la nécessité d'employer la valeur absolue, ce qui a pu amorcer la preuve représentée à la FIGURE V.8.

Lors du travail sur la première preuve, la séparation en deux cas a semblé naturelle suite à la remarque de l'élève. Lors du choix du y dans le deuxième cas, la partie entière supérieure n'est pas venue instinctivement, même si un élève a suggéré « faire +1 ou +2 et enlever les nombres après la virgule ». La dépendance du y et de x n'a plus posé de problème et les élèves n'ont plus attribué de valeur précise à la variable instanciée universellement.

La seconde preuve n'a amené aucune question et a même été préférée par les élèves. Notons que nous savions que les élèves connaissaient les notions de valeur absolue et de partie entière supérieure qui avait été introduite récemment dans le chapitre d'intégration.

Cet exercice supplémentaire semble avoir permis de vérifier que la notion de représentant est mieux maîtrisée que précédemment pour ce type d'énoncé. Nous avons alors décidé d'introduire la troisième partie des exercices.

Cet énoncé est vrai.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Si $x < 0$, prenons $y = 0$ ($y \in \mathbb{N}$).

   Dès lors, nous avons $y \geqslant x \Leftrightarrow 0 \geqslant x$, ce qui est vrai dans ce cas.
2. Si $x \geqslant 0$, prenons $y = \lceil x \rceil$ ($y \in \mathbb{N}$ car x est positif).

   Dès lors, nous avons $y \geqslant x \Leftrightarrow \lceil x \rceil \geqslant x$, ce qui est vrai par définition de partie entière supérieure.

□

FIGURE V.7 – Preuve 1

Cet énoncé est vrai.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Prenons $y = \left\lceil |x| \right\rceil$. Dès lors, y est un naturel car il est positif avec la valeur absolue et entier grâce à la partie entière supérieure.

Nous avons alors $y \geqslant x \Leftrightarrow \left\lceil |x| \right\rceil \geqslant x$ et on a

$$\left\lceil |x| \right\rceil \geqslant |x| \geqslant x$$

□

FIGURE V.8 – Preuve 2

Troisième série

La troisième série porte sur les implications.

Lors de la traduction du premier énoncé, nous nous sommes rendu compte qu'un rappel sur l'implication était nécessaire. Lors du rappel, nous avons à nouveau dû appuyer sur le fait que l'hypothèse n'était pas à vérifier. Au vu du déroulement de la séquence lors de l'introduction de l'implication, nous avons choisi de réaliser cet exercice en commun avec les élèves.

La détermination de la valeur de vérité de l'implication a été donnée sans difficulté et, lors de la preuve, la règle d'instanciation universelle selon Coppi a correctement été employée pour utiliser l'hypothèse. L'utilisation du dessin décrit dans la figure IV.9 en parallèle lors de la réalisation de la preuve semble avoir aidé les étudiants à cibler le moment où utiliser cette hypothèse et à choisir une valeur correcte pour x.

Malgré que les élèves n'ont pas commis d'erreur majeure lors de la preuve, nous avons beaucoup dû les aiguiller, nous confortant dans l'idée que la notion d'implication entre deux énoncés quantifiés est plus délicate à prendre en main et suscite beaucoup plus de maîtrise de la notion de quantificateur que nous le pensions. C'est la raison pour laquelle nous avons décidé de laisser le dernier exercice en tant qu'exercice supplémentaire (aucun n'est revenu vers l'enseignant), estimant que l'énoncé était trop compliqué.

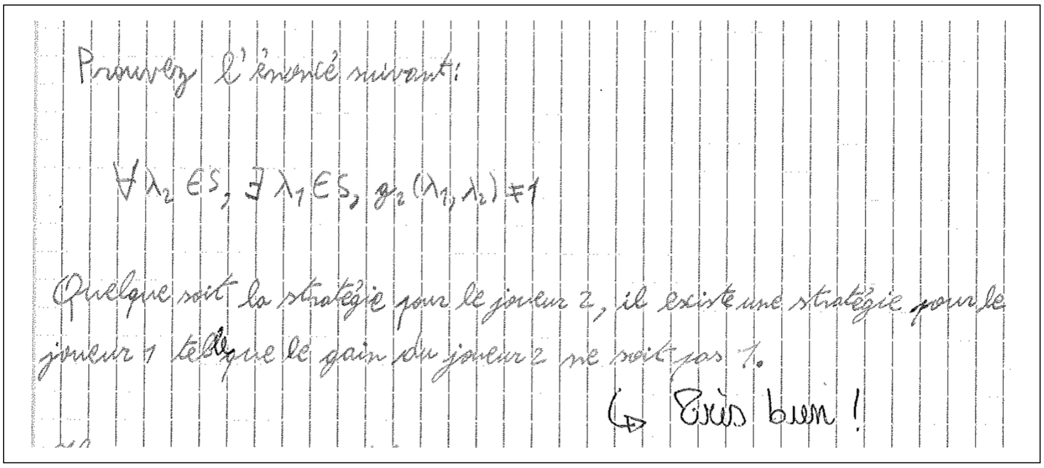
Nous poursuivons en analysant les copies ramassées sur l'énoncé résultant de la traduction de la troisième question centrale afin d'évaluer la manipulation des quantificateurs dans le cadre de la théorie des jeux.

V.2 Analyse de copies d'élèves

Nous avons récolté un total de sept copies d'élèves car deux d'entre eux étaient absents. L'ensemble des copies sont présentées dans l'annexe B. Nous rappelons qu'une solution est donnée à la Figure IV.8.

Dans ces copies, nous mettons en évidence les différentes difficultés rencontrées sur la notion de quantificateur, notamment sur l'inversion de ceux-ci. Nous regardons aussi si la structure de la preuve est adaptée à l'exercice et est rigoureuse, par l'emploi d'un vocabulaire adapté et de notations justes. Notons que la plupart des éléments que nous présentons sont ponctuels à cause du nombre réduit de copies récoltées et nous ne tirons donc aucun résultat général ici.

Premièrement, l'entièreté des copies présente une preuve structurée correctement. Chaque élève introduit une variable quantifiée existentiellement dans l'énoncé puis une variable quantifiée universellement, ce qui nous amène à penser qu'aucun élève ne présente des difficultés liées à l'inversion des quantificateurs. Nous avons aussi retrouvé plusieurs traces du registre de la langue naturelle dans les copies comme le montre la FIGURE V.9


Prouvez l'énoncé suivant :

$\forall \lambda_2 \in S, \exists \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$

Quelque soit la stratégie pour le joueur 2, il existe une stratégie pour le joueur 1 telle que le gain du joueur 2 ne soit pas 1.

Très bien !

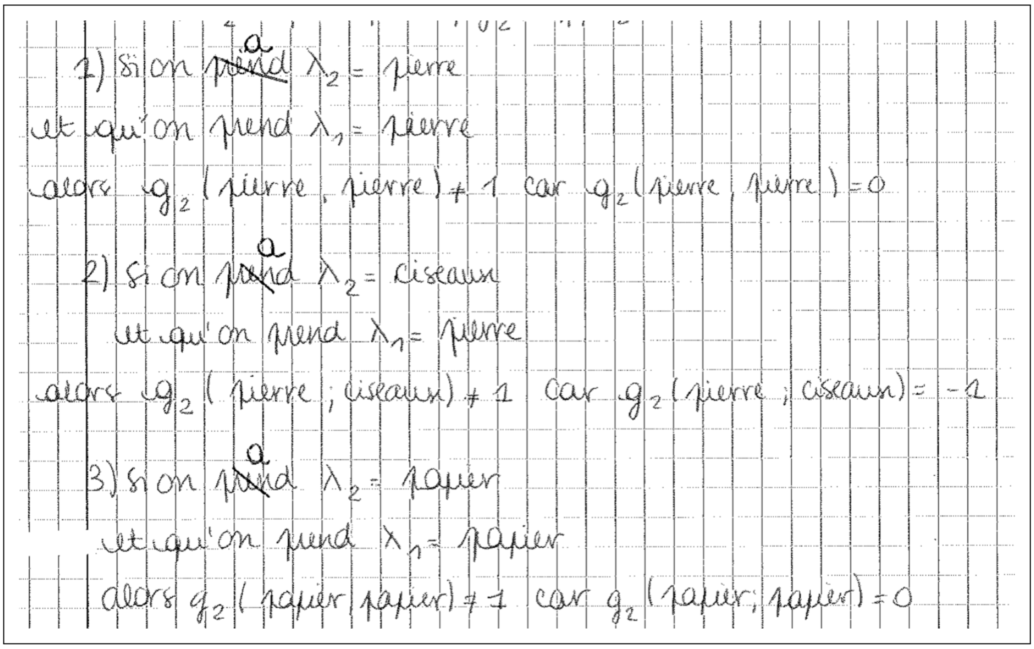
FIGURE V.9 – Registre de la langue naturelle dans une copie

Nous remarquons dans la traduction de l'énoncé que l'emploi des termes « telle que » ont correctement été utilisés, de la façon que nous l'avons détaillée à la section II.3.3.

Une erreur que nous avons rencontrée à plusieurs reprises porte sur les notations de fonctions de gain où les g_2 ont parfois été remplacés par les g_1 et des variables λ_1 et λ_2 qui ont aussi pu être inversées (indépendamment de leur quantificateur, ce qui nous amène à penser qu'il ne s'agit pas d'un problème d'inversion des quantificateurs).

Une autre copie présente un problème de vocabulaire lié à l'emploi du mot prendre qui n'a pas été utilisé correctement comme l'indique la FIGURE V.10.

En ce qui concerne le choix à réaliser pour la variable λ_1, celui-ci n'a pas posé de problème. Certains élèves ont préféré rendre le gain toujours égal à la même valeur pour chacun des cas de λ_2 alors que d'autres ont alterné différentes valeurs pour le gain. Nous avons cependant retrouvé un élève qui a réalisé une preuve pour chacune des valeurs possibles, ce qui n'est pas une erreur en soi mais qui peut être le résultat d'une confusion sur le principe de preuve d'un énoncé existentiel. La FIGURE V.11 illustre le phénomène.

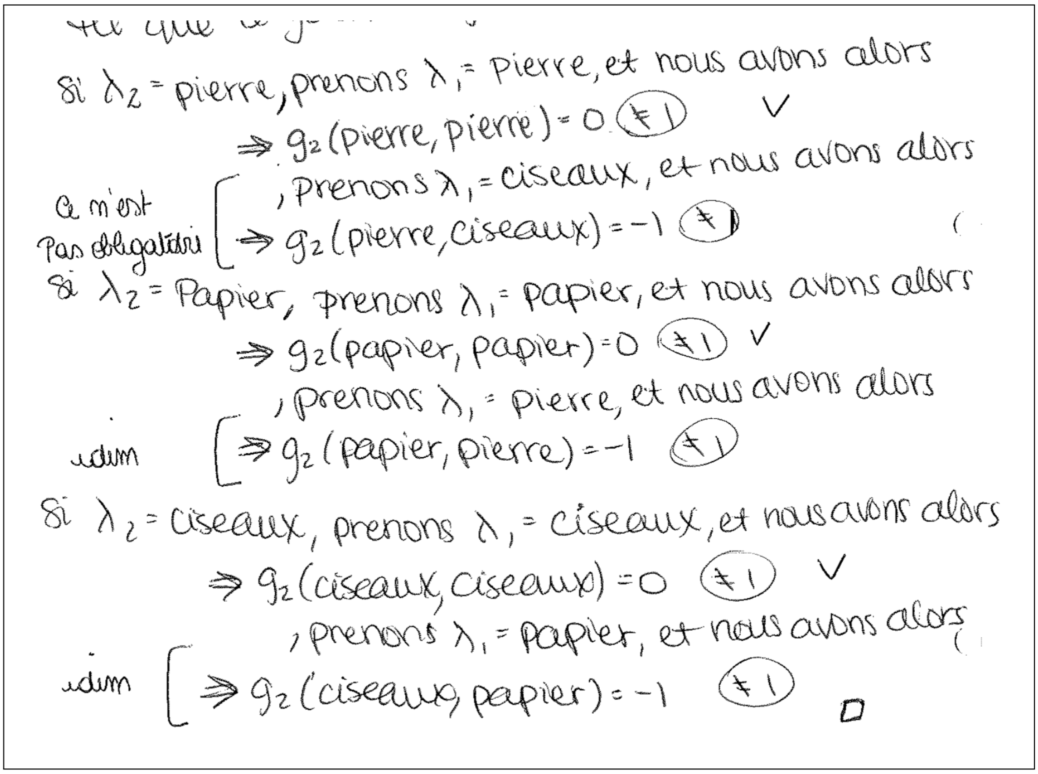


1) si on ~~prend~~ a λ_2 = pierre
et qu'on prend λ_1 = pierre
alors g_2(pierre, pierre) $\neq 1$ car g_2(pierre, pierre) = 0

2) si on ~~prend~~ a λ_2 = ciseaux
et qu'on prend λ_1 = pierre
alors g_2(pierre ; ciseaux) $\neq 1$ car g_2(pierre ; ciseaux) = −1

3) si on ~~prend~~ a λ_2 = papier
et qu'on prend λ_1 = papier
alors g_2(papier papier) $\neq 1$ car g_2(papier; papier) = 0

Figure V.10 – Mauvaise utilisation du verbe prendre dans une copie



si λ_2 = pierre, prenons λ_1 = pierre, et nous avons alors
⇒ g_2(pierre, pierre) = 0 $\neq 1$ V
ce n'est pas obligatoire [, prenons λ_1 = ciseaux, et nous avons alors
⇒ g_2(pierre, ciseaux) = −1 $\neq 1$
si λ_2 = Papier, prenons λ_1 = papier, et nous avons alors
⇒ g_2(papier, papier) = 0 $\neq 1$ V
, prenons λ_1 = pierre, et nous avons alors
idem [⇒ g_2(papier, pierre) = −1 $\neq 1$
si λ_2 = ciseaux, prenons λ_1 = ciseaux, et nous avons alors
⇒ g_2(ciseaux, ciseaux) = 0 $\neq 1$ V
, prenons λ_1 = papier, et nous avons alors
idem [⇒ g_2(ciseaux, papier) = −1 $\neq 1$ □

Figure V.11 – Preuve multiple pour chacun des choix de λ_1

L'analyse de ces copies montre ainsi que la majorité des élèves manipule correctement les quantificateurs dans le cadre de la théorie des jeux et que les réflexes de traduction et d'interprétation d'énoncés sont présents chez une partie des élèves.

V.3 Bilan

Le déroulement de la séquence semble avoir permis aux élèves de travailler le sens de l'ordre des quantificateurs dans un énoncé par le biais de l'utilisation d'une gestuelle de jeux et de différents registres d'écritures. En effet, lors des séances d'exercices et dans les copies récoltées, on ne distingue pas de confusion sur l'ordre des quantificateurs même si nous avons dû faire face à des soucis de dépendance non liée à l'ordre, principalement dans l'instanciation d'une variable quantifiée existentiellement dépendant de la précédente.

Notons cependant que la séquence a été donnée dans une classe dont le nombre d'élèves était très restreint, permettant ainsi de bien se consacrer individuellement aux questions des élèves mais donnant des résultats à plus faible portée.

Nous consacrons le dernier chapitre de notre travail à la présentation des éléments de réponse que nous déduisons des analyses précédentes ainsi qu'aux perspectives envisageables et aux limites méthodologiques de cette recherche.

Conclusion

Au début de notre travail, nous avons illustré l'importance de la maîtrise du langage mathématique pour entamer des études supérieures en sciences mathématiques et informatiques tant pour la rédaction d'une argumentation claire et structurée que pour la compréhension des outils manipulés, tels que les définitions, les propriétés, les théorèmes, ...

Cependant, nos analyses ont pu nous faire remarquer que le langage mathématique reste une source de difficultés pour les étudiants de première bachelier, notamment dans l'utilisation des quantificateurs. Les quantificateurs constituent ainsi une notion qui nécessite d'être travaillée en amont de la manipulation d'objets mathématiques pour potentiellement prévenir des difficultés au niveau de l'utilisation de ceux-ci.

Une analyse des programmes du secondaire a mis en évidence le besoin de travailler le langage mathématique, la communication et la rédaction structurée de démonstrations mais n'indiquent pas comment mettre en œuvre cet apprentissage ni la discipline qui le permet. Or, nous avons considéré que la notion de quantificateur est une notion paramathématique au sens de Chevallard (1985) [5] et avons donc fait l'hypothèse que le cadre de travail influence l'apprentissage des quantificateurs.

Dans l'optique de réaliser une séquence de cours pour introduire la notion de quantificateur à des élèves du secondaire, nous avons ainsi choisi de nous placer dans le cadre de la théorie des jeux car nous pensons que la richesse d'utilisation du langage mathématique pour la notion de jeu sous forme normale ainsi que le fait de pouvoir interpréter les propriétés en jouant sont propices au travail sur la dépendance entre les quantificateurs dans un énoncé mathématique.

De plus, la dépendance entre les quantificateurs peut être source de difficultés pour les apprenants qui peuvent parfois inverser les quantificateurs au niveau de l'interprétation d'un énoncé mathématique et ainsi avoir une confusion sur les énoncés en « $\forall - \exists$ » et en « $\exists - \forall$ ».

Nous en sommes donc venu à formuler la problématique suivante :

> En quoi la théorie des jeux permet-elle de prendre en compte les difficultés reconnues sur l'inversion des quantificateurs dans des énoncés en langage mathématique ?

Afin d'apporter des éléments de réponse à cette problématique, nous avons donc conçu une séquence de cours d'une durée de huit fois cinquante minutes travaillant des énoncés doublement quantifiés et destinée à des élèves de dernière année du secondaire ayant choisi une filière comprenant au moins six heures de mathématiques. Dans le but de mettre en évidence les aspects « jeux » de la théorie des jeux et leurs avantages pour travailler la notion de quantificateur et leur dépendance, nous avons porté notre attention sur les occasions de proximités de la séquence et sur le discours de l'enseignant lors du déroulement de celle-ci.

Nous notons qu'au terme de la partie de la séquence travaillant dans le cadre de la théorie des jeux, aucun élève n'a eu de confusion majeure sur l'ordre des quantificateurs et les difficultés rencontrées à propos de la dépendance de ceux-ci semblaient directement liées à des confusions sur la notion de représentant d'un ensemble.

Ainsi, après analyse du déroulement, nous pouvons amener plusieurs éléments de réponse à la problématique ci-dessus.

Premièrement, la théorie des jeux met en avant plusieurs types d'objets, notamment des objets qui sont encore inconnus pour des élèves du secondaire, tels que des fonctions d'arités 2 ou encore des ensembles non réels. Néanmoins, ces objets ont rapidement été pris en main grâce à leur interprétation dans le jeu lors du déroulement de la séquence, permettant aux élèves de travailler dans un cadre porteur de sens et d'ainsi pouvoir focaliser toute leur attention sur la notion de quantificateur.

Deuxièmement, la gestuelle du jeu a toujours été utilisée en parallèle de la réalisation des preuves lors du déroulement de la séquence. Celle-ci a apporté des résultats notables. En effet, lorsqu'il y a eu lieu de faire un choix pour une variable quantifiée existentiellement, se plonger dans la gestuelle a semblé faciliter les élèves à le réaliser. En effet, lors du jeu, ceux-ci indiquaient que leur choix de stratégie dépendait de la stratégie employée par l'adversaire, autrement dit de la variable introduite précédemment.

Les élèves utilisaient aussi cette gestuelle pour se convaincre les uns et les autres et pour accompagner leur argumentation lorsqu'ils devaient expliquer leur preuve, ce qui amène à penser que cette gestuelle constitue un outil de compréhension, de communication et d'illustration de la dépendance entre les quantificateurs très efficace.

Autre fait, les jeux sous forme normale à deux joueurs peuvent être rendus séquentiels, simplement en faisant jouer les joueurs successivement au lieu de simultanément. Cette adaptation permet de réaliser un scénario de jeu dont les étapes se calquent sur la lecture quantificateur par quantificateur d'un énoncé mathématique.

Cette adaptation semble avoir inculqué aux élèves l'automatisme de bien suivre l'ordre d'introduction des quantificateurs de l'énoncé lors de la réalisation de preuve, prévoyant ainsi des difficultés liées à l'ordre au niveau de la syntaxe.

Notre recherche a toutefois été effectuée avec certaines contraintes méthodologiques que nous exposons ci-dessous.

Limites méthodologiques

Deux limites méthodologiques sont à mettre en évidence lorsque nous exposons nos éléments de réponse. La première est que nous avons présenté la séquence une seule fois et les résultats auraient pu être différents si nous l'avions présentée dans d'autres classes. De plus, le nombre d'élèves de la classe était assez réduit (neuf élèves). Nous aurions ainsi pu rencontrer certaines difficultés dans une classe plus nombreuse. En effet, dès qu'un élève faisait face à une difficulté, nous avons pu directement réagir en lui proposant une explication plus individualisée, ce qui n'est pas toujours possible dans une classe plus nombreuse.

La deuxième limite méthodologique concerne le temps obtenu pour la séquence. La notion de quantificateur nécessite davantage d'heures d'apprentissages pour être correctement maîtrisée. En effet, dans notre séquence, nous avons remarqué que le travail des instanciations existentielles et universelle selon Coppi n'a pas pu être réalisé correctement. De plus, un questionnaire post-séquence a été réalisé deux semaines après la fin de la présentation de celle-ci et les résultats n'ont pas correctement reflété l'apport de la séquence qui a été visible lors de la réalisation des exercices en classe. C'est très probablement dû au fait que huit séances de cours est insuffisant pour ancrer la notion de quantificateur, bien que cela constitue une introduction non négligeable.

Perspectives de travail

Une perspective de travail est de présenter la séquence de cours dans d'autres classes afin de vérifier si celle-ci apporte des résultats similaires, différents ou complémentaires. Aussi, la séquence peut être adaptée de plusieurs façons. On peut par exemple consacrer le temps destiné à la partie sur l'implication au travail sur d'autres énoncés sans implication au vu des résultats obtenus sur cette partie. On peut également adapter la séquence pour une durée plus longue et tenter un encrage plus important de la notion de quantificateur.

Il est aussi envisageable de rechercher un autre cadre qui pourrait être propice à l'apprentissage du langage mathématique, présentant peut-être d'autres avantages que la théorie des jeux et permettant de prévenir d'autres difficultés exposées dans le deuxième chapitre.

Apport pour notre futur métier d'enseignant

Ce travail de recherche a permis de nous sensibiliser sur l'importance du langage mathématique. Nous retiendrons ainsi que la notion de quantificateur reste tout à fait accessible pour des élèves de dernière année du secondaire dans les filières comprenant au moins six heures de mathématiques et que donc, l'emploi des quantificateurs ne doit pas être retenu lorsqu'il est propice de les utiliser. De plus, les programmes du secondaire laissent une certaine liberté pour enseigner cette notion, permettant ainsi de l'inclure dans les savoirs disciplinaires appropriés.

Bibliographie

[1] ADDA, J. (1975), L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques. *Nico 19*, 107–126.

[2] BRIDOUX, S. GRENIER-BOLEY, N. HACHE, C. ROBERT, A. (2016), Les moment d'exposition des connaissances, analyses et exemples. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol. 21, 187–233.

[3] BRIDOUX, S. (2014), La transition secondaire-université : une expérience en belgique. *REPERES - IREM*, n^{o} 95, 91–102.

[4] CHELLOUGUI, F. (2001), Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x*, n^{o} 61, 11–34.

[5] CHEVALLARD, Y. (1986), *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage éditions, Grenoble.

[6] COPI, I. (1954), *Symbolic Logic*. NewYork : The Macmillan Company.

[7] COPPÉ, S. DORIER, J.-L. YAVUZ, I. (2007), De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement. de la notion de fonction en France en seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 27, n^{o} 2, 151–186.

[8] DIEUDONNE, M. DRONIOU, J. DURAND-GUERRIER, V. RAY, B. THERET, D. (2011), Bilan de praticiens sur la transition lycée - université. *REPERES - IREM*, n^{o} 85, 5–30.

[9] DURAND-GUERRIER, V. (1996), *Logique et raisonnement mathématique : Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liée à l'implication.* Thèse de Doctorat, Université de Lyon 1.

[10] DURAND-GUERRIER, V. (2012), Vérité mathématique et validité logique. perspectives épistémologique et didactique. *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le siècle - Acte du colloque EMF2012*, 414–424.

[11] Durand-Guerrier, V. (2015), Formalisme et signification en mathématiques : phénomènes d'anaphore et quantifications implicites. *Actes du colloque EMF2015 - GT8*, 731–740.

[12] Duval, R. (1993), Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, ULP, IREM Strasbourg*, n° 5, 37–65.

[13] Robert, A. (1982), *L'acquisition de la notion de convergence de suites dans l'enseignement supérieur*. Thèse d'État, Université Paris 7.

[14] Robert, A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18, n° 2, 139–190.

[15] Robert, A. Vandebrouck F. (2014), Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 34, 239–285.

[16] Tarski, A. (1936), *Le concept de vérité dans les langages formalisés.* Logique, sémantique et métamathématique.

[17] Tent, K. Ziegler, M. (2014), *A course in Model Theory.* Cambridge University Press.

Annexe A

Documents élèves de la séquence de cours

Atelier mathématique
Les jeux pour faire des maths

K. Van Mieghem

Université de Mons - Faculté des Sciences

UMONS Faculté des Sciences

21 juin 2017

Plan

Un peu d'histoire (1/2)

Les jeux ont toujours fait partie du quotidien. Autrefois que ludiques, ils constituent actuellement un point central de la civilisation actuelle : **paris**, **Lotto**, **échecs**, **puissance 4**, . . .

En Europe, ce n'est seulement qu'à la Renaissance qu'un mathématicien italien, Fra Luca Bartolomeo de Pacioli, publie un livre qui introduit les jeux combinatoires.

Un peu d'histoire (2/2)

Dans son ouvrage, Pacioli nous présente un tout premier jeu à deux joueurs qu'on nomme actuellement la course à 10 :

« *À tour de rôle et en partant de 10, soustrayez un nombre de 1 à 3. Le premier qui atteint 0 gagne la partie.* »

C'est un jeu à plusieurs tours. Nous allons nous intéresser à un jeu à un tour.

Pierre-Papier-Ciseaux

Dans ce jeu, chaque joueur possède trois actions :

1. Jouer pierre
2. Jouer papier
3. Jouer ciseaux

Des premières questions

Les mathématiciens peuvent se poser plusieurs questions :

- Le jeu peut-il se terminer par une égalité ?
- Si l'un des joueurs annonce comment il compte jouer, l'autre joueur peut-il gagner à coup sur ?
- Existe-t-il une stratégie qui permet de gagner à tous les coups ?

Modélisation (1/4)

Afin d'étudier ce jeu en mathématiques, il faut nommer tous les objets.

- Les choix de jeu qu'un joueur peut faire sont appelés les **stratégies**. Ici, elles sont... Pierre, Papier et Ciseaux.
- Lorsqu'une partie se termine, chaque joueur gagne ou perd dans une certaine mesure. Nous appellerons cela les **gains**. Ici, nous dirons que le gain d'un joueur est 1 en cas de victoire, -1 en cas de défaite et 0 en cas de match nul.

Tentons de modéliser notre jeu !

Modélisation (2/4)

Posons notre ensemble de stratégie que nous noterons S. Ici, nous avons :

$$S = \{Pierre, Papier, Ciseaux\}$$

Une stratégie est donc un élément λ de S. En mathématiques, on notera :

$$\lambda \in S$$

Tentons maintenant de modéliser les gains. Le gain d'un joueur dépend de plusieurs paramètres :

- la stratégie employée par le joueur 1,
- la stratégie employée par le joueur 2.

Modélisation (3/4)

Le gain d'un joueur est donc une... **fonction** qui, à un **couple** de... **stratégies**, associe un nombre réel (ici -1, 0 et 1). On notera cette fonction g_1 pour le joueur 1 et g_2 pour le joueur 2. On peut alors noter pour le gain du joueur 1 :

$$g_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} S \times S & \to & \mathbb{R} \\ (\lambda_1, \lambda_2) & \mapsto & g_1(\lambda_1, \lambda_2) \end{array} \right.$$

Exemple : $g_1(Pierre, Papier) = -1$, $g_2(Pierre, Papier) = 1$ et $g_1(Ciseaux, Ciseaux) = 0$

Modélisation (4/4)

Afin de mieux visualiser notre jeu, traçons un tableau qui reprend les couples de gains des deux joueurs pour une partie donnée.

VS	Pierre	Papier	Ciseaux
Pierre	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
Ciseaux	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Retour sur nos questions

- Le jeu peut-il se terminer par une égalité ?
- Si l'un des joueurs annonce comment il compte jouer, l'autre joueur peut-il gagner à coup sur ?
- Existe-t-il une stratégie qui permet de gagner à tous les coups ?

Même si les réponses à ces questions nous paraissent logiques, tentons d'y répondre en mathématiques. Pour ce faire, nous avons besoin de traduire mathématiquement ces phrases.

Première question

Le jeu peut-il se terminer par une égalité ?

Autrement dit : les joueurs peuvent-ils jouer chacun une stratégie afin d'avoir tout deux des gains égaux ?

En mathématiques, nous demanderons qu'

« Il existe une certaine stratégie pour le joueur 1 et qu'il existe une certaine stratégie pour le joueur 2 tel que les gains des deux joueurs sont égaux »

Première question : écriture mathématique

« *Il existe une certaine stratégie pour le joueur 1 et qu'il existe une certaine stratégie pour le joueur 2 tel que les gains des deux joueurs sont égaux* »

Traduisons cette phrase en mathématiques :

$$\exists \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_1(\lambda_1, \lambda_2) = g_2(\lambda_1, \lambda_2)$$

Preuve

Prouvons donc l'énoncé suivant :

$$\exists \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_1(\lambda_1, \lambda_2) = g_2(\lambda_1, \lambda_2)$$

En mathématiques, pour prouver qu'un objet existe, il faut l'**exhiber**.

Exhibons donc une première stratégie pour le joueur 1.

Prenons $\lambda_1 = Pierre$.

Exhibons maintenant une stratégie pour le joueur 2.

Prenons $\lambda_2 = Pierre$.

Pour terminer la preuve, il reste à vérifier l'égalité.

Nous avons $g_1(Pierre, Pierre) = 0$ et $g_2(Pierre, Pierre) = 0$ et donc

$$g_1(Pierre, Pierre) = g_2(Pierre, Pierre)$$

$\square$

Quelques remarques...

Lors de la preuve, pour choisir la stratégie du joueur 1, nous avons pu choisir n'importe quelle stratégie.

Mais qu'en est-il du choix de la deuxième stratégie ?

Lorsqu'on écrit mathématiquement un énoncé, l'ordre a de l'importance : aussi bien dans l'énoncé que dans sa preuve !

Ainsi, chaque assertion d'une formule a une dépendance en ce qui la précède.

Une autre remarque est qu'il y avait d'autres moyens de faire la preuve : une preuve mathématique est rarement unique. Pouvez-vous en produire une autre ?

Deuxième question

Si l'un des joueurs annonce comment il compte jouer, l'autre joueur peut-il gagner à coup sur ?

En mathématiques, nous demanderons que

« *quelle que soit la stratégie pour le joueur 1, il existe une certaine stratégie pour le joueur 2 tel que le gain du joueur 2 est 1* »

Deuxième question : écriture mathématique

« *Quelle que soit la stratégie pour le joueur 1, il existe une certaine stratégie pour le joueur 2 tel que le gain du joueur 2 est 1* »

Traduisons cette phrase en mathématiques :

$$\forall \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Preuve (1/3)

Prouvons donc l'énoncé suivant :

$$\forall \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Pour prouver un énoncé mathématique quel que soit l'élément d'un ensemble, il faut montrer la propriété **pour tous** les éléments de l'ensemble.

Preuve (2/3)

Il y a donc 3 cas possibles :

1. $\lambda_1 = \mathit{Pierre}$
2. $\lambda_1 = \mathit{Papier}$
3. $\lambda_1 = \mathit{Ciseaux}$

Pour chacun de ces λ_1, prouvons donc :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Preuve (3/3)

1. Si $\lambda_1 = \mathit{Pierre}$, **prenons** $\lambda_2 = \mathit{Papier}$ et nous avons alors
$$g_2(\mathit{Pierre}, \mathit{Papier}) = 1$$
2. Si $\lambda_1 = \mathit{Papier}$, **prenons** $\lambda_2 = \mathit{Ciseaux}$ et nous avons alors
$$g_2(\mathit{Papier}, \mathit{Ciseaux}) = 1$$
3. Si $\lambda_1 = \mathit{Ciseaux}$, **prenons** $\lambda_2 = \mathit{Pierre}$ et nous avons alors
$$g_2(\mathit{Ciseaux}, \mathit{Pierre}) = 1$$

$\square$

La même remarque

De nouveau, on se rend compte que le choix du deuxième paramètre dépend entièrement du premier paramètre.

On peut à nouveau dire que l'ordre a de l'importance dans les énoncés mathématiques

Troisième question

Existe-t-il une stratégie qui permet de gagner à tous les coups ?

En mathématiques, nous demanderons qu'

« il existe une stratégie pour le joueur 2 telle que quelle que soit la stratégie pour le joueur 1, le gain du joueur 2 est 1 »

Troisième question : écriture mathématique

« *Il existe une stratégie pour le joueur 2 telle que quelle que soit la stratégie pour le joueur 1, les gains du joueur 2 est 1* »

Traduisons cette phrase en mathématiques :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Vrai ou faux ?

Reprenons :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Pensez-vous qu'il soit possible de prouver cette expression ? Pourquoi ?

Que devons-nous prouver pour montrer que cette expression est fausse ?

Regardons sur de plus petits exemples.

Des chiens blancs et des géants

Une personne vous affirme :

« *Tous les chiens sont blancs* »

Comment lui prouver que ce qu'elle dit est faux ? Il s'agit de lui prouver que :

« *Il existe un chien qui n'est pas blanc* »

De nouveau, cette personne vous affirme :

« *Il existe un homme sur Terre qui mesure plus de 4 mètres* »

Cette fois-ci, pour lui prouver qu'elle a tord, il faudra lui montrer que :

« *Tous les hommes sur Terre mesurent moins de 4 mètres* »

Et mathématiquement ? (1/6)

Considérons l'énoncé mathématique suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > 5$$

Cet énoncé est... faux. Pour le prouver, nous devons donc prouver sa **négation**. Le symbole de négation est $\neg$.

Nous voulons donc prouver :

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N},\ n > 5)$$

Et mathématiquement ? (2/6)

Nous voulons donc prouver :

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N},\ n > 5)$$

Pour prouver la négation de l'expression :

Quel que soit le naturel, il vérifie la propriété « être plus grand que 5 »

Il faut montrer :

Il existe un naturel qui ne vérifie pas la propriété « être plus grand que 5 »

Et mathématiquement ? (3/6)

Autrement dit, montrer

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N},\ n > 5)$$

revient à montrer

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \neg(n > 5)$$

ou encore

$$\exists n \in \mathbb{N},\ n \leqslant 5$$

Conclusion

Si P est une propriété, la négation de « $\forall x,\ P(x)$ » est « $\exists x,\ \neg P(x)$ ».

Et mathématiquement ? (4/6)

Considérons l'énoncé mathématique suivant :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ n < 0$$

Cet énoncé est... faux. Pour le prouver, nous devons donc prouver sa **négation**.

Nous voulons donc prouver :

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N},\ n < 0)$$

Et mathématiquement ? (5/6)

Nous voulons donc prouver :

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N},\ n < 0)$$

Pour prouver la négation de l'expression :

Il existe un naturel qui vérifie la propriété « être plus petit que 0 »

Il faut montrer :

Quel que soit le naturel, il ne vérifie pas la propriété « être plus petit que 0 »

Et mathématiquement ? (6/6)

Autrement dit, montrer

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N},\ n < 0)$$

revient à montrer

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \neg(n < 0)$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 0$$

Conclusion

Si P est une propriété, la négation de « $\exists x,\ P(x)$ » est « $\forall x,\ \neg P(x)$ ».

Revenons à notre question (1/2)

Nous voulons prouver :

$$(1) \quad \neg(\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1)$$

Nous savons maintenant que :

$$\neg(\exists \lambda_2,\ P(\lambda_2)) \text{ est équivalent à } \forall \lambda_2,\ \neg P(\lambda_2)$$

Prouver (1) revient alors à prouver :

$$(2) \quad \forall \lambda_2 \in S,\ \neg(\forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1)$$

Revenons à notre question (2/2)

Nous sommes ramenés à prouver (2) :

$$(2) \quad \forall \lambda_2 \in S,\ \neg(\forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1)$$

Or, nous savons aussi que :

$$\neg(\forall \lambda_1,\ P(\lambda_1)) \text{ est équivalent à } \exists \lambda_1,\ \neg P(\lambda_1)$$

Prouver (2) revient alors à prouver :

$$(3) \quad \forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ \neg(g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1)$$

Ou encore :

$$\forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$$

Conclusion

Pour prouver que l'énoncé suivant est faux :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

il faut montrer l'énoncé suivant :

$$\forall \lambda_2 \in S,\ \exists \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$$

Prouvez cet énoncé

L'ordre des quantificateurs

Reprenons, en langage mathématique, les deux dernières questions avec leur valeur de vérité pour le jeu Pierre-Papier-Ciseaux.

$$(1) \quad \forall \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1 \quad \text{Vrai}$$

$$(2) \quad \exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1 \quad \text{Faux}$$

Quelle est la différence entre ces deux questions ?

Pensez-vous que pour un jeu donné, les réponses peuvent inversées ?

Un résultat indépendant du jeu

On peut remarquer que si un jeu vérifie la propriété (2) alors, il vérifie la propriété (1).

En mathématiques, on dit que la propriété (2) implique la propriété (1).

On écrit alors : pour un jeu à deux joueurs,

La propriété (2) **implique** la propriété (1).

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

L'implication

Le fait qu'une propriété puisse découler d'une autre s'appelle une **implication**.

Le symbole de l'implication est « $\Rightarrow$ ».

De plus, ce qui se trouve à gauche de ce symbole est appelé l'« **hypothèse** » ou la « prémisse ». Ce qui se trouve à droite du symbole est appelé la « **thèse** » ou la « conclusion » .

Prouver une implication...

Pour prouver qu'une implication est vraie, on peut :

1. Supposer que l'hypothèse est vraie.
2. Sous la supposition précédente, montrer que la thèse est vraie.

... mais attention ! (1/2)

Les noms donnés aux variables dans une proposition sont strictement liés à leur quantificateur. Si ce même nom est utilisé à nouveau, il constitue une nouvelle instance pour cette variable.

Exemple :

$$\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 3 \wedge \exists x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 1$$

Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

Une solution pour mieux s'y retrouver est de changer le nom du « x » dans sa deuxième occurrence :

$$\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 3 \wedge \exists y \in \mathbb{N},\ y \leqslant 1$$

... mais attention ! (2/2)

Les noms donnés aux variables dans une proposition sont strictement liés à leur quantificateur. Si ce même nom est utilisé à nouveau, il constitue une nouvelle instance pour cette variable.

Exemple :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \lambda_1 \in S,\ \exists \lambda_2 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Une solution est de changer le nom des variables. Ainsi, dans la thèse, on peut remplacer λ_1 et λ_2 par μ_1 et μ_2.

Preuve (1/3)

Nous sommes donc amené à devoir prouver, pour un jeu à deux joueurs :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \mu_1 \in S,\ \exists \mu_2 \in S,\ g_2(\mu_1, \mu_2) = 1$$

Commençons par supposer l'hypothèse. Supposons :

$$\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

Montrons alors :

$$\forall \mu_1 \in S,\ \exists \mu_2 \in S,\ g_2(\mu_1, \mu_2) = 1$$

Preuve (2/3)

Hypothèse : $\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$

Thèse : $\forall \mu_1 \in S,\ \exists \mu_2 \in S,\ g_2(\mu_1, \mu_2) = 1$

Ici, il est impossible de lister les éléments de S : on ne sait pas ce qu'il y a dedans ! On peut tout de même faire la preuve en prenant un élément quelconque de S : on l'appelle un « représentant ». Pour dire que nous prenons un **représentant**, les mathématiciens utilisent le mot « **Soit** ».

Soit $\mu_1 \in S$. Nous devons montrer :

$$\exists \mu_2 \in S,\ g_2(\mu_1, \mu_2) = 1$$

Preuve (3/3)

Hypothèse : $\exists \lambda_2 \in S,\ \forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$

Thèse : $\forall \mu_1 \in S,\ \exists \mu_2 \in S,\ g_2(\mu_1, \mu_2) = 1$

Soit $\mu_1 \in S$. Nous devons montrer :

$$\exists \mu_2 \in S,\ g_2(\mu_1, \mu_2) = 1$$

Qu'allons nous prendre pour μ_2 ? Notre hypothèse nous dit qu'**il existe** λ_2 tel que $\forall \lambda_1 \in S,\ g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$. Puisque $\mu_1 \in S$, c'est en particulier vrai pour $\lambda_1 = \mu_1$.

Prenons alors $\mu_2 = \lambda_2$.

Dès lors, $g_2(\mu_1, \mu_2) = g(\mu_1, \lambda_2)$ et, par hypothèse :

$$g(\mu_1, \lambda_2) = 1$$

$\square$

Partie 1

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux, réalisez une preuve de ce que vous affirmez.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$
2. $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$
5. $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 1$

Partie 2

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux, réalisez une preuve de ce que vous affirmez.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x < y$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y$
3. $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x > y$
4. $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x < y$
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x < y$

Partie 3

Prouvez les énoncés suivants.

1. Soit A, un sous-ensemble des nombres naturels.

$$\forall x \in A,\ x \leqslant 4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ x < y$$

2. Soit A, un sous-ensemble des nombres réels

$$\exists x \in \mathbb{R}^{<0}, \forall y \in A,\ y < x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in A,\ y < x$$

Partie 3

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux, réalisez une preuve de ce que vous affirmez.

1. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ y \leqslant x \leqslant z$
2. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ y < x < z$

Annexe B

Copies élèves récoltées durant la séquence

Prouvez l'énoncé suivant :

$$\forall \lambda_2 \in S, \exists \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$$

Quelque soit la stratégie pour le joueur 2, il existe une stratégie pour le joueur 1 telle que le gain du joueur 2 ne soit pas 1.

Très bien !

Il y a donc 3 cas possibles :

λ_2 = Pierre

λ_2 = Papier

λ_2 = Ciseaux

Pour chacun de ces λ_2, prouvons donc :

$\exists \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$ ✓

Si λ_2 = Pierre, prenons λ_1 = Papier et nous avons alors

g_2 (Papier, pierre) $= -1$ ✓

Si λ_2 = Papier, prenons λ_1 = Ciseaux et nous avons alors

g_2 (Ciseaux, papier) $= -1$ ✓

Si λ_2 = ciseaux, prenons λ_1 = Pierre et nous avons alors

g_2 (Pierre, ciseaux) $= -1$ ✓

$\square$

Excellent.

mathématique

Prouver un énoncé.

Pour prouver que l'énoncé suivant est faux :

$$\exists \lambda_2 \in S, \forall \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$$

il faut montrer l'énoncé suivant :

$$\forall \lambda_2 \in S, \exists \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1 \quad \leftarrow \text{celui-ci.}$$

si λ_2 = Pierre, prenons λ_1 = Papier

$g_2(\lambda_1, \lambda_2) = -1 \neq 1$ ✓

~~mais λ_1 = Pierre, prenons λ_2 = ciseaux~~

~~$g_1(\lambda_1, \lambda_2) = 1$~~

si λ_2 = ciseaux, prenons λ_1 = Pierre

$g_2(\lambda_1, \lambda_2) = -1 \neq 1$ ✓

si λ_2 = papier, prenons λ_1 = ciseaux

$g_2(\lambda_1, \lambda_2) = -1 \neq 1$ ✓

□

MATH

Les quantificateurs

$\forall \lambda_2 \in S, \exists \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$

① • Si on prend λ_1 = Pierre.

g_2(Pierre, pierre) $\neq 1$

② • Si on prend λ_2 = ciseaux

et λ_1 = Pierre

alors g_2(Pierre, ciseaux) $\neq 1$ car g_2 (pierre, ciseaux) $= -1$

③ • Si on prend λ_2 = Papier et qu'on prend λ_1 = papier

g_2(Papier, papier) $= -1$

$\square$

Si λ_2 = Pierre, prenons λ_1 = Pierre et nous avons alors

g_2(Pierre, Pierre) = 0

Si λ_2 = Pierre, prenons λ_1 = ~~Ciseaux~~ et nous avons alors

g_2 (~~Pierre~~, Ciseaux) $= -1$

Si λ_2 = Papier, prenons λ_1 = Papier et nous avons alors

g_2 (Papier, Papier) = 0

$\square$

Je prouve que

$\exists \lambda_2 \in S, \forall \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 1$ est fausse

Donc je montre que

$$\forall \lambda_2 \in S, \exists \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$$

Si λ_2 = pierre.

Prenons λ_1 = papier ~~a~~ alors, $g_2(\text{papier}, \text{pierre}) = -1$

Si λ_2 = papier

Prenons λ_1 = ciseaux alors, $g_2(\text{ciseaux}, \text{papier}) = -1$

Si λ_2 = ciseaux,

Prenons λ_1 = pierre alors $g_2(\text{pierre}, \text{ciseaux}) = -1$

$\square$

Math : les quantificateurs 21/02/..

Démonstration de

$$\forall \lambda_2 \in S, \exists \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$$

1) Si on ~~prend~~ a $\lambda_2 =$ pierre
et qu'on prend $\lambda_1 =$ pierre
alors g_2 (pierre, pierre) $\neq 1$ car g_2 (pierre, pierre) $= 0$

2) Si on ~~prend~~ a $\lambda_2 =$ ciseaux
et qu'on prend $\lambda_1 =$ pierre
alors g_2 (pierre ; ciseaux) $\neq 1$ car g_2 (pierre ; ciseaux) $= -1$

3) Si on ~~prend~~ a $\lambda_2 =$ papier
et qu'on prend $\lambda_1 =$ papier
alors g_2 (papier, papier) $\neq 1$ car g_2 (papier; papier) $= 0$

Très bien. Fais attention que le verbe « prendre » est réservé à « ∃ ».

Math :

21/02/17

Prouver : $\forall \lambda_2 \in S, \exists \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$

On a 3 cas possibles :

$\lambda_2 =$ Pierre
$\lambda_2 =$ Papier
$\lambda_2 =$ Ciseaux

On va prouver pour les 3 cas :

① Si $\lambda_2 =$ Pierre, prenons $\lambda_1 =$ Papier
nous avons $g_2(\lambda_1, \lambda_2) = -1 \neq 1$ ✓

② Si $\lambda_2 =$ Papier, prenons $\lambda_1 =$ Papier
nous avons $g_2(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \neq 1$ ✓

③ Si $\lambda_2 =$ Ciseaux, prenons $\lambda_1 =$ Pierre
nous avons $g_2(\lambda_1, \lambda_2) = -1 \neq 1$ ✓

$\square$

Très bien !

Conclusion

$\forall \lambda_2 \in S, \exists \lambda_1 \in S, g_2(\lambda_1, \lambda_2) \neq 1$

Prouvez cet énoncé

Très bien

~~???~~ quelle que soit la stratégie pour la joueur 2, il existe une certain stratégie pour la joueur 1 tel que le gaen du joueur 2 ~~est~~ n'est pas 1. ✓

Si λ_2 = pierre, prenons λ_1 = pierre, et nous avons alors

$\Rightarrow g_2(\text{pierre}, \text{pierre}) = 0 \; (\neq 1)$ ✓

Ce n'est pas obligatoire

, prenons λ_1 = ciseaux, et nous avons alors

$\Rightarrow g_2(\text{pierre}, \text{ciseaux}) = -1 \; (\neq 1)$

Si λ_2 = Papier, prenons λ_1 = papier, et nous avons alors

$\Rightarrow g_2(\text{papier}, \text{papier}) = 0 \; (\neq 1)$ ✓

, prenons λ_1 = pierre, et nous avons alors

idem

$\Rightarrow g_2(\text{papier}, \text{pierre}) = -1 \; (\neq 1)$

Si λ_2 = ciseaux, prenons λ_1 = ciseaux, et nous avons alors

$\Rightarrow g_2(\text{ciseaux}, \text{ciseaux}) = 0 \; (\neq 1)$ ✓

, prenons λ_1 = papier, et nous avons alors

idem

$\Rightarrow g_2(\text{ciseaux}, \text{papier}) = -1 \; (\neq 1)$ $\square$