Faculté des Sciences
Mathématique

UMONS
Université de Mons

Un état des lieux des connaissances sur la notion d'implication à deux niveaux : l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire

Mémoire réalisé par Mathieu LEFÈVRE
pour l'obtention du diplôme de Master en sciences mathématiques

Année académique 2010–2011

Directeur : Stéphanie Bridoux
Service : Logique mathématique

Faculté des Sciences • Université de Mons • Place du Parc 20 • B-7000 Mons

Remerciements

La première personne que je tiens tout particulièrement à remercier est Stéphanie Bridoux pour ses conseils, remarques constructives et lectures attentives de ce document. Je lui suis reconnaissant de m'avoir pris en charge, écouté et dirigé dans le bon déroulement de ce travail. Merci également à elle de m'avoir ouvert les portes du domaine de la didactique des mathématiques.

J'exprime également mes remerciements envers les auteurs des travaux didactiques sur l'implication qui ont éveillé ma curiosité et m'ont conduit à m'interroger sur de possibles difficultés que des élèves du secondaire et des étudiants universitaires pourraient rencontrer avec la notion d'implication. En ce sens, je remercie tout particulièrement Viviane Durand-Guerrier et Virginie Deloustal-Jorrand.

Je remercie également tous les enseignants, élèves de l'enseignement secondaire et étudiants universitaires qui ont participé à mon expérimentation sur l'implication. Sans eux, je n'aurais pas pu réaliser ce travail.

Enfin, merci à mes proches et amis pour leur soutien inconditionnel durant les différentes épreuves traversées pour la confection de ce document.

Table des matières

Introduction

Dans le cadre de ce mémoire en didactique des mathématiques, nous nous intéressons à la notion d'implication mathématique et plus précisément à son enseignement ainsi qu'à son utilisation à deux niveaux d'enseignement : celui du secondaire et celui universitaire.

Les premières questions qui viennent naturellement à l'esprit à propos de cette notion sont les suivantes : "*pourquoi s'intéresser à l'implication ?*" et "*qu'est-ce que cela peut apporter ?*".

Nos premiers éléments de réponse reposent sur notre propre expérience face à cette notion, à la fois en tant qu'élève de l'enseignement secondaire, même si cela remonte maintenant à quelques années et à la fois en tant qu'étudiant universitaire. Nous nous souvenons notamment avoir déjà rencontré l'expression "*si... alors...*" dans nos cours de mathématiques en secondaire par exemple dans l'énoncé du théorème de Pythagore ou celui du théorème de Thalès. La présence de cette expression dans l'énoncé de ces résultats nous apparaissait à l'époque naturelle et pleinement liée aux expressions "*si... alors...*" très largement répandues dans le langage courant et utilisées pour s'exprimer avec le monde qui nous entoure.

Nous vivons donc nos années dans l'enseignement secondaire, tout à fait insouciant face à la portée de cette notion d'implication. Puis, arrivé à l'université, nous sommes très surpris d'être alors confronté à un enseignement explicite et précis sur cette notion. C'est d'ailleurs la toute première fois que nous suivons un cours axé uniquement sur l'expression "*si... alors...*". Nous découvrons alors qu'il est apparemment possible d'étudier cette expression en mathématiques même si à l'époque, il nous paraissait paradoxal d'étudier une notion plus associée au français et surtout au langage et donc a fortiori bien éloignée des mathématiques. Ce changement de point de vue lors de notre passage de l'enseignement secondaire à celui universitaire, nous a incité à tenter de le préciser et de le caractériser d'un point de vue didactique.

Notre motivation pour ce travail est que s'intéresser d'un point de vue didactique à cette notion d'implication, c'est prendre connaissance au sens large du terme, des savoirs et des conceptions que des élèves du secondaire peuvent avoir sur cette notion. Cette démarche nous semble pertinente dans le sens où nous nous destinons à l'enseignement des mathématiques dans le degré supérieur [1] de l'institution secondaire belge. Ce travail est donc pleinement relié à notre futur professionnel et nous donne l'occasion de découvrir des difficultés que les élèves pourraient avoir avec des énoncés conditionnels ou encore par exemple avec une équivalence qui s'exprime comme la conjonction de deux implications. De plus, cette étude sur la notion d'implication est également un moyen d'aller sur le terrain pour avoir des contacts d'une part avec des élèves de l'enseignement secondaire pour les interroger sur leurs connaissances liées à cette expression "*si... alors...*" et d'autre part, avec de futurs collègues qui peuvent ainsi partager avec nous leur propre expérience et leur enseignement sur cette notion. Ce travail est donc pour nous aussi, l'occasion d'un partage précieux avec les enseignants et les élèves.

Notre seconde question "*qu'est-ce que s'intéresser à la notion d'implication peut-il bien apporter ?*" s'inscrit donc pleinement dans cette seconde motivation puisque nous espérons avec ce travail pouvoir tirer profit de quelques difficultés que les élèves peuvent notamment rencontrer avec cette expression "*si... alors...*".

Le travail mené est découpé de la manière suivante. Puisque nous avons dans notre propre parcours scolaire rencontré l'implication dans l'enseignement secondaire et universitaire, nous commençons dans notre chapitre 1 par examiner l'enseignement et l'utilisation qui sont faits de cette notion dans ces deux institutions. Nous poursuivons ensuite en présentant, dans le chapitre 2, les apports théoriques de nos lectures de travaux didactiques sur l'implication. Fort de ces deux premières parties, notre chapitre 3 sera pour nous l'occasion de définir un questionnement sur l'implication. Nous pourrons ensuite nous lancer dans la partie expérimentale du travail qui a pour but d'obtenir des éléments de réponses aux diverses questions lancées dans notre problématique. Notre expérimentation sur le terrain se divisent en trois parties, chacune étant consacrée à un public particulier que nous interrogeons. La première partie s'adresse aux enseignants du secondaire et vise à obtenir des renseignements sur l'enseignement et l'utilisation qu'ils font en classe de l'expression "*si... alors...*". Les constatations du "point de vue enseignant"

1. Le degré supérieur regroupe les étudiants de $4^{\text{ième}}$, $5^{\text{ième}}$ et $6^{\text{ième}}$ année de l'enseignement secondaire belge. Ces élèves sont principalement dans la tranche d'âge 15 à 18 ans.

sont dressées dans notre chapitre 4. Les seconde et troisième parties de notre expérimentation sur le terrain touchent respectivement les élèves du secondaire et les étudiants universitaires. Nous voulons dresser pour chacun de ces publics un bilan des connaissances de ceux-ci. Pour ce faire, nous réalisons deux questionnaires en lien avec notre problématique. Ceux-ci s'adressent aussi bien aux élèves du secondaire qu'aux étudiants universitaires. Nous présentons une analyse des réponses possibles de ces deux publics à nos questionnaires au chapitre 5. Après dépouillement des réponses apportées par ces deux publics, nous dressons pour chaque institution un état des lieux des connaissances dans lequel nous relevons les différentes réponses apportées par chaque public à nos questions. Un état des lieux des connaissances des élèves est présenté au chapitre 6 et respectivement celui des étudiants au chapitre 8. Chacun de ces chapitres est suivi d'un bilan des connaissances de chaque institution sur la notion d'implication. Plus précisément, un bilan des connaissances des élèves est réalisé au chapitre 7 et respectivement celui des connaissances des étudiants au chapitre 9. Enfin, pour conclure ce document, nous réalisons dans le chapitre 10 un bilan général de notre travail. Dans celui-ci, nous revenons notamment sur les aspects frappants révélés par nos questionnaires diffusés auprès des élèves de l'enseignement secondaire et des étudiants universitaires.

Chapitre 1

L'enseignement de l'implication

L'objet de ce chapitre est d'identifier quel est l'enseignement mathématique que les étudiants belges francophones reçoivent sur la notion d'implication. Pour ce faire, nous examinons cette notion à deux niveaux d'études : l'enseignement secondaire et la première année de bachelier en sciences mathématiques, physiques et informatiques à l'Université de Mons.

1.1 La place de l'implication dans l'enseignement secondaire

Afin d'identifier quel enseignement ou quelle utilisation de l'implication un élève reçoit sur cette notion, nous nous proposons d'examiner les programmes des différents réseaux d'enseignement. Nous pensons que ces programmes auxquels les enseignants doivent se tenir, reflètent globalement l'instruction dispensée en classe. Bien que les programmes soient très libres quant à l'ordre dans lequel enseigner les différents concepts mathématiques ou quant au choix des exercices à réaliser avec les élèves, nous pensons que l'analyse de ces documents, nous fournira une première idée sur l'enseignement et l'utilisation qui y sont faits de l'implication.

1.1.1 Un regard sur les programmes

Nous avons examiné les programmes en y recherchant des traces de la notion d'implication. Nous avons particulièrement cherché la présence des mots-clés suivants pour lesquels les notions d'implication ou d'équivalence peuvent être associées : ≪ *si... alors..., implication, implique, équivalence, condition nécessaire, condition suffisante, nécessaire, suffisant, réciproque* ≫. Nous avons également vérifié si les notions de contraposée ou preuve par contraposition apparaissaient dans les programmes.

Nous avons parcouru les programmes de deux réseaux. Le premier réseau est celui de la Communauté française qui représente l'enseignement officiel [1]. Quant au second, il s'agit du réseau de la Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique, qui est associé à l'enseignement libre [2]. Les programmes de cours sont respectivement disponibles sur les sites internet de chacun de ces réseaux, RESTODE [13] pour l'enseignement de la Communauté française et SeGEC [18] pour celui de la fédération de l'enseignement secondaire catholique.

Détaillons brièvement l'organisation des programmes. Ceux-ci sont présentés sous forme de tableaux relatifs à différents domaines mathématiques comme la géométrie, la trigonométrie, l'analyse, l'algèbre, ... Chaque tableau est divisé en 3 parties : compétences à atteindre, matières et conseils méthodologiques. Nous identifions que les compétences à atteindre expriment les activités essentielles qu'un élève doit maîtriser. Ces compétences sont formulées avec des verbes conjugués à l'infinitif présent tels que "*calculer*", "*interpréter*", "*énoncer*", "*démontrer*", "*résoudre*", ... Sous l'onglet « matières » apparaissent des intitulés généraux comme par exemple « *trigonométrie : formules d'addition et de duplication* », « *découverte, énoncé et démonstration du théorème de Pythagore* », « *suite arithmétique et suite géométrique* », « *positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans* », ... Les conseils méthodologiques renvoient quant à eux à des précisions sur l'une ou l'autre approche pour aborder les points de matière.

En plus des compétences à atteindre mentionnées dans ces tableaux, nous relevons que des compétences plus générales sont présentes au début des programmes. Celles-ci sont développées à partir des matières spécifiées à chaque degré ou niveau d'enseignement. Nous constatons également que des objectifs généraux sont mentionnés au début des programmes.

Face à ces programmes, l'enseignant doit donc composer en prenant en compte les onglets « matières », les conseils donnés, les objectifs mentionnés et l'ensemble des compétences listées.

Pour ce regard sur les programmes, nous avons pris soin de mettre à chaque fois en italique, ce que nous avons repris textuellement de ceux-ci.

1. L'enseignement de la Communauté française est non confessionnel, organisé et financé par la Communauté française.
2. L'enseignement dispensé par cette fédération est confessionnel, organisé par un pouvoir organisateur (diocèses, congrégations religieuses, ...) et subventionné par la Communauté française.

Nous avons également précisé quand certains points des programmes apparaissent comme compétence ou comme objectif. Sauf mention contraire, la plupart de ces points sont présents sous l'onglet « matières ».

1.1.2 Les programmes de la Communauté française

Pour le premier degré (1ère et 2ième années de l'enseignement secondaire belge)

La notion de condition suffisante apparaît en classe de 2ième année dans la partie géométrie.

Triangles : les élèves doivent être capables de *déterminer les différentes manières de justifier qu'un triangle est :*

- *un triangle isocèle ;*
- *un triangle équilatéral.*

On montrera que :

- *l'existence d'un axe de symétrie dans un triangle est une condition suffisante pour qu'il soit isocèle ;*
- *l'existence de trois axes de symétrie dans un triangle est une condition suffisante pour qu'il soit équilatéral.*

Quadrilatères : les élèves doivent être capables de *déterminer les différentes manières de justifier qu'un quadrilatère convexe est :*

- *un parallélogramme,*
- *un losange,*
- *un rectangle,*
- *un carré.*

On montrera que :

- *l'existence d'un centre de symétrie dans un quadrilatère convexe est une condition suffisante pour qu'il soit un parallélogramme ;*
- *l'existence d'une rotation +/- 90° qui applique un quadrilatère convexe sur lui-même est une condition suffisante pour qu'il soit un carré.*

Toujours dans la partie géométrie, nous avons trouvé,

- sous l'onglet « Figures planes, périmètres et aires » (en 1ère année) : *On remarquera que deux figures qui ont même aire n'ont pas toujours même périmètre et réciproquement* ;
- l'objectif : *On apprendra :*
  - *à choisir les propriétés et définitions qui permettent de justifier les étapes d'un raisonnement ;*

- *à utiliser à bon escient les locutions « donc, en effet, or, car, si... alors..., par ailleurs, ... ».*

Enfin, dans les objectifs généraux, nous retrouvons un point traitant de l'apprentissage de la démonstration qui *se fera avec prudence. Apprendre à lire un texte mathématique, en dégager les données (hypothèse), trouver ce qu'il faut chercher (thèse), faire une figure, s'exprimer en terme de « je sais que..., je déduis que... » demande du temps et de la patience.*

Pour le second degré (3ième et 4ième années de l'enseignement secondaire belge)

En troisième année, dans la partie traitant du théorème de Pythagore (découverte, énoncé et démonstration), nous avons trouvé le mot-clé "réciproque". La compétence que les élèves doivent atteindre est la suivante : *reconnaître une situation dans laquelle il est opportun d'utiliser le théorème de Pythagore ou sa réciproque.* On donne comme conseil de *montrer au moins sur des exemples numériques que la réciproque du théorème de Pythagore permet de caractériser un triangle rectangle. La démonstration pourra être traitée comme application des cas d'isométrie des triangles.*

En quatrième année, les notions de conditions nécessaire et suffisante et la notion de condition nécessaire apparaissent dans le chapitre de géométrie. Plus précisément, dans le point de matière relatif aux *problèmes de construction et de recherche de quelques lieux géométriques, les élèves doivent atteindre la compétence suivante : utiliser les lieux de base et les propriétés connues pour effectuer une construction ou rechercher un lieu.* Le conseil méthodologique suivant est donné : *Beaucoup de constructions se ramènent à déterminer l'intersection de deux lieux de base, chaque lieu ne faisant intervenir qu'une contrainte du problème.*
Par lieux de base, on entend :

- *ensembles de points situés à une distance donnée d'un point, d'une droite ;*
- *ensembles de points équidistants de deux points, de deux droites.*

[...] La caractérisation d'un ensemble de points exige des conditions nécessaire et suffisante. Dans certains cas, on pourra se limiter à déterminer des conditions nécessaires pour la découverte d'un ensemble qui contient le lieu. Cela sera mentionné dans les conclusions.

Dans les objectifs généraux de l'enseignement du second degré, nous avons recensé, *on exercera les élèves à :*

- *Utiliser correctement les locutions « et », « ou », « donc », « non », « d'où », « car », « il existe », « pour tout », « si et seulement si », etc*
- *Formuler correctement les raisonnements ;*
- *Enoncer et rédiger clairement la réponse à la question posée ou la conclusion du raisonnement élaboré ;*
- ...

Nous avons également retrouvé ces idées dans des compétences générales et plus précisément dans la section « compétences à développer » :

- « Traiter, argumenter, raisonner » : *observer, comparer, formuler une hypothèse par induction, argumenter, construire une chaîne déductive et la justifier ;*
- « Communiquer » :
    - *maîtriser le vocabulaire, les tournures et le symbolisme nécessaires pour expliquer et rédiger une démonstration ;*
    - *rédiger et présenter clairement des arguments et des conclusions ;*
- « Généraliser, structurer, synthétiser » : *émettre des généralisations et en contrôler la validité.*

Pour le troisième degré ($5^{\text{ième}}$ et $6^{\text{ième}}$ années de l'enseignement secondaire belge)

Sous l'onglet « *objectifs généraux* » des programmes du troisième degré, nous avons relevé que : *Quelle que soit l'option choisie (2, 4 ou 6 périodes par semaine), un des objectifs majeurs du cours de mathématiques est de rendre l'élève capable de découvrir, rédiger, illustrer une argumentation dans un langage précis et concis. Le recours aux règles logiques s'appuie dans un premier temps sur le langage courant. Les principes qui sous-tendent le raisonnement mathématique sont ensuite exprimés dans un langage approprié.* Remarquons que l'utilisation de la logique s'effectue d'abord dans le langage naturel. Ce n'est qu'après ce premier temps passé que son utilisation ou ses règles seront liées ou établies en mathématiques, et plus particulièrement, comme explicité ici, avec le raisonnement mathématique.

Formation 6 périodes par semaine

C'est principalement dans cette formation que nous avons trouvé les références les plus nombreuses à la notion d'implication. En effet, dans les objectifs généraux, nous avons recensé la présence des mots-clés "implication", "équivalence", "réciproque d'un énoncé", "si", "si et seulement si", "si... alors...", "contraposition" ainsi que "conditions nécessaires et suffisantes". Il y est dit : *La pratique de la démonstration doit arriver à maturation dans le cours à six périodes. [...] Les démonstrations sont l'occasion de développer les compétences liées à l'argumentation et à la communication. Une attention particulière sera portée à :*

- *organiser les étapes d'une construction et à les justifier ;*
- *distinguer l'implication simple de l'équivalence, l'hypothèse de la thèse ;*
- *maîtriser quelques démarches logiques qui régissent les démonstrations (négation ou réciproque d'un énoncé, raisonnement par l'absurde, raisonnement par disjonction des cas, ...) ;*
- *rédiger une démonstration en faisant apparaître les étapes, les liens logiques, les théorèmes utilisés au moyen de phrases complètement formulées ; [...]*
- *insister sur l'importance des expressions logiques telles que « et », « ou », « car », « or », « donc », « d'où », « si », « si et seulement si », « si... alors... », ...*
- *étudier quelques notions et règles de logique (contraposition d'implications ou d'équivalences, démonstration par l'absurde, critères faisant intervenir des conditions nécessaires et suffisantes, récurrence, négation, ...).*

Nous avons aussi retrouvé ces mots-clés dans des compétences générales et plus précisément dans la section « compétences à développer ». Ce sont d'ailleurs les mêmes compétences à developper que celles listées en page 9.

Remarquons que les différents points cités ci-dessus font surtout référence à la géométrie et principalement à l'activité mathématique de démontrer des théorèmes, propositions ou plus simplement un résultat. Il est d'ailleurs clairement explicité que c'est lors des démonstrations qu'il faut pousser les élèves à argumenter, à donner leur opinion ou leur première impression sur la véracité d'une affirmation, à s'approprier le vocabulaire relatif à la démonstration et à communiquer que cela soit avec l'enseignant ou avec d'autres étudiants avec ce nouveau vocabulaire, qui peut paraître très hermétique lors d'une première confrontation, mais pas seulement lors de cette toute première fois. Après le secondaire, nous pensons qu'un certain nombre d'élèves éprouvent certainement des difficultés à distinguer, dans l'écriture $A \Rightarrow B$ où A et B sont deux propositions, qui de A ou B est la condition suffisante et qui est la condition nécessaire. Les élèves évolueront bien malgré eux dans ce vocabulaire. Mais parmi tous ceux-ci, combien peuvent dire avec leurs propres mots, ce qu'on entend mathématiquement parlant par *démonstration par l'absurde*, par *contraposition* et même par *si*, *seulement si*, *si et seulement si.* Nous faisons l'hypothèse que pour bon nombre d'élèves de dernière année du secondaire, beaucoup de subtilités, voire de généralités à propos de ce vocabulaire, restent cachées, tapies dans l'ombre.

Toujours concernant notre analyse de traces de la notion d'implication dans le programme du troisième degré de la Communauté française, nous remarquons que les notions de condition nécessaire et de condition suffisante apparaissent dans le domaine de la géométrie. En effet, sous l'onglet « *matières* » traitant des critères de parallélisme d'une droite et d'un plan, de deux plans, ainsi que des propriétés usuelles du parallélisme de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan, nous trouvons le conseil suivant : *Le contexte permettra de revenir sur la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante et fournira l'occasion de pratiquer la démonstration par l'absurde.*

Formation 4 périodes par semaine

En cinquième année, nous avons trouvé dans la partie géométrie et trigonométrie, quelques références à la logique : *[. . .] les propriétés qui seront démontrées. Une attention particulière sera portée aux règles de la logique : contraposition d'implications, [. . .], réciproque, démonstration par l'absurde, critères faisant intervenir des conditions nécessaires et suffisantes.*
Toujours dans la partie géométrie, nous avons recensé les notions de condition nécessaire, de condition suffisante et de réciproque associées aux propriétés usuelles du parallélisme de deux droites, de deux plans ou d'une droite et d'un plan.

Ici aussi, la notion d'implication est donc associée et utilisée dans une activité de démonstration de propriétés, de théorèmes,. . . qui a lieu dans les chapitres traitant de la géométrie et de la trigonométrie.

Formation 2 périodes par semaine

À l'exception de la mention présente sous l'onglet « *objectifs généraux* » et listée en page 9, nous n'avons trouvé dans ces programmes aucune référence explicite à la notion d'implication ou aux mots-clés choisis au début de cette analyse des programmes. Nous sommes surpris de cette absence car nous estimons qu'une formation de base devrait prendre en compte le vocabulaire mathématique de base. Nous pensons notamment que les élèves de cette formation ont déjà rencontré plus d'une fois l'expression "*si. . . alors. . .*" dans leur cours.

Premières conclusions

De l'examen des programmes du réseau de la Communauté française, nous remarquons qu'il n'y a pas de section relative à l'enseignement en lui-même de la notion d'implication. À aucun moment, il n'est dit d'étudier spécifiquement le "*si... alors...*" de manière décontextualisée. Un autre constat est le suivant : l'apprentissage de la logique des propositions ne fait pas partie des programmes. Rien d'étonnant en soi car elle a disparu des programmes en 1993. Cette matière n'est donc enseignée que lors d'études supérieures de type universitaire ou non. Il se peut aussi que des enseignants du cours de renfort mathématique, visant à approfondir le cours de mathématiques générales et augmentant ainsi le nombre d'heures de mathématiques par semaine à 8, enseignent la logique des propositions et plus particulièrement donnent un cours à proprement parler sur la notion d'implication. Une voie à explorer consisterait donc à interroger les enseignants sur leur discours en classe vis-à-vis de cette notion. Nous y reviendrons par la suite.

1.1.3 Les programmes de la Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique

Les programmes de la Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique et du réseau de la Communauté française sont très similaires. Néanmoins, nous avons jugé bon de lister ci-dessous quelques petites différences et quelques ajouts à propos de l'enseignement et de l'utilisation de la notion d'implication dans l'enseignement secondaire catholique.

Pour le premier degré ($1^{\text{ère}}$ et $2^{\text{ième}}$ années de l'enseignement secondaire belge)

Nous avons relevé en première année deux références au mot-clé "suffisant" (et donc par extension, à l'expression de condition suffisante) :

- *Une compétence réelle en géométrie doit passer par les mains : les contraintes liées aux instruments requièrent une analyse de la figure à construire et mettent en évidence ses propriétés. C'est pourquoi des problèmes de construction s'articulent à toutes les notions que l'on travaille au* ***premier degré du secondaire***[3]*. Ainsi par exemple : [...] la construction d'un rectangle en repérant les données minimales nécessaires, amène la notion de propriété suffisante et devient un outil de démonstration. [...] Les constructions de figures et la structuration*

3. En gras dans le texte.

des propriétés servent à la mise en place d'un raisonnement logique qui sera utilisé ***plus tard***[4] *dans les démonstrations.*
- Sous l'onglet « *Triangle isocèle, équilatéral, rectangle. Quadrilatère, trapèze, rectangle, parallélogramme, losange, carré. Définitions et propriétés de figures liées à leurs symétries* », nous avons trouvé : *On se basera sur les connaissances des élèves à propos des propriétés des triangles et des quadrilatères particuliers. On établira des définitions en examinant quelles propriétés suffisent pour construire ces figures. On montrera qu'une condition supplémentaire sur une famille de figures peut en définir une nouvelle.*

Toujours en première année, sous le titre « *ensemble des multiples d'un nombre, nombres premiers entre eux* », nous trouvons des traces de la notion de démonstration, d'exemples et de contre-exemples : *la démonstration sera motivée aux yeux des élèves par l'analyse d'exemples, par l'absence apparente de contre-exemple, par la conjecture d'une loi, par la vérification d'un énoncé.* Divers exemples sont donnés :
- *la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4*,
- *la somme des a premiers nombres impairs vaut* a^2,
- ...

Toujours en première année, sous l'onglet « *diviseurs et multiples d'un nombre naturel, divisibilité, nombres premiers* », nous avons listé un exemple utilisant l'expression "*si... alors...*" : *si un nombre divise un autre, alors il divise ses multiples.*

Nous avons jugé important de signaler que nous avons trouvé un onglet relatif à l'enseignement fondamental (i.e. primaire) où l'on parle de liens logiques : *Développer la capacité d'établir des liens logiques. Les élèves apprennent progressivement (dans des situations, à l'intérieur de défis, ...) à utiliser de manière adéquate les mots comme : tous, quelques-uns, un seul, ... et recourent aux mots-liens comme : et, ou, si... alors..., donc, parce que. Cet apprentissage se poursuit au secondaire.* Nous pensons que ces liens logiques sont présentés dans le langage et non d'un point de vue mathématique, c'est donc la logique naturelle qui est ici mise en évidence plutôt que la logique mathématique.

Nous avons également relevé que : *les constructions de figures et la structuration des propriétés servent à la mise en place d'un raisonnement logique qui sera utilisé plus tard dans les démonstrations.* Il semble important d'ha-

4. En gras dans le texte. Nous pensons que ce "plus tard" fait référence aux deuxième et troisième degrés d'enseignement.

bituer, dès le premier degré, les élèves à raisonner et à les confronter au vocabulaire de la logique.

Pour le second degré ($3^{\text{ième}}$ et $4^{\text{ième}}$ années de l'enseignement secondaire belge)

En quatrième année, dans la partie « *propriétés usuelles du parallélisme de deux droites et d'un plan, de deux plans* », nous trouvons : *On établira au moins les critères de parallélisme d'une droite et d'un plan, de deux plans. Le contexte permettra de revenir sur la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante et fournira l'occasion de pratiquer la démonstration par l'absurde.*

Pour le troisième degré ($5^{\text{ième}}$ et $6^{\text{ième}}$ années de l'enseignement secondaire belge)

Formation 6 périodes par semaine

Dans des compétences générales, nous avons trouvé des références à presque tous nos mots-clés, à savoir, implication et équivalence et à la distinction qui doit être faite entre celles-ci, condition suffisante, condition nécessaire, réciproque, contraposition :
Dans un énoncé (propriété, définition, théorème, ...), distinguer :
- *l'implication simple et l'équivalence,*
- *l'hypothèse et la thèse,*

et connaître les formulations de conditions suffisante (antécédent) et de condition nécessaire (conséquent).
Maîtriser quelques démarches logiques qui régissent les démonstrations :
- *donner la négation, une réciproque d'un énoncé,*
- *établir un raisonnement par contraposition, par disjonction des cas,*
- *distinguer méthodes inductives et raisonnement déductif.*

Rédiger une démonstration en faisant apparaître les étapes, les liens logiques, les théorèmes utilisés au moyen de phrases complètement formulées.

Notons que nous retrouvons cet onglet et ces mots-clés aussi dans la formation à 4 périodes par semaine.

Sous l'axe de compétences, « *expliciter les savoirs et les procédures* », nous retrouvons comme dans les programmes de la Communauté française, l'objectif suivant : *Pour évaluer la façon dont l'élève explicite les savoirs et les procédures dans une matière précise, l'enseignant repère, par exemple, si l'élève sait : [...]*

- *maîtriser le vocabulaire, les connecteurs logiques (si... alors..., en effet, donc, et, ou, ...) et le symbolisme nécessaires pour expliquer une propriété, rédiger une démonstration,*
- *[...]*
- *construire une chaîne déductive et la justifier,*
- *étendre une règle, un énoncé ou une propriété à un domaine plus large,*
- *[...]*

[...] explicitation n'est pas synonyme de restitution ! La compétence « expliciter les savoirs et les procédures » ne doit pas servir de prétexte pour faire étudier des définitions et des énoncés qui ne servent pas directement à la compréhension.

Formation 4 périodes par semaine

Nous n'avons rien à ajouter par rapport à ce qui a été dit dans l'analyse des programmes de la Communauté française.

Formation 2 périodes par semaine

Sous l'onglet « compétences terminales - démontrer », nous avons trouvé des références à l'implication et à l'équivalence et à la distinction qui doit être faite entre celles-ci :

Dans un énoncé (propriété, définition, théorème, ...), distinguer :

- *l'implication simple et l'équivalence,*
- *l'hypothèse et la thèse.*

Quelques conclusions de cette analyse des programmes de la Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique

Comme pour le réseau de la Communauté française, notre analyse des programmes de la Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique montre qu'il n'y a pas de références à une étude explicite de l'implication. Nous constatons notamment ici aussi que la logique des propositions ne fait plus partie des programmes.

1.1.4 Conclusions tirées de l'analyse des programmes

Nous avons examiné les programmes de deux réseaux de l'enseignement belge, celui de la Communauté française et celui de la Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique. Nous nous sommes limité à ces deux réseaux. Nous aurions pu par exemple examiner également les programmes du réseau de l'enseignement provincial conforme à la Communauté française, mais nous n'avons pas trouvé de programmes spécifiques en mathématiques pour ce réseau. Les enseignants sont semble-t-il renvoyés à ceux de la Communauté française. Nous pensons que notre analyse des programmes reflète la situation sur l'enseignement et l'utilisation de l'implication dans une grande majorité des établissements secondaires belges.

Que pouvons-nous retenir de cette analyse ? Tout d'abord, parler d'un enseignement de l'implication en secondaire est semble-t-il complètement erroné. Il est préférable d'employer le mot "utilisation". En effet, il n'est apparemment jamais question de donner un cours sur le "*si... alors...*". Cette expression n'est pas enseignée à proprement parler mais est bien plus utilisée. Ce dernier mot est particulièrement bien choisi. On utilise le "*si... alors...*" pour exprimer des résultats aussi bien en analyse qu'en géométrie par exemple. On l'utilise, on ne l'enseigne pas ! C'est pourquoi, dans les programmes, elle n'apparaît jamais seule, elle est toujours attachée à un contexte ou à une matière bien précise. Néanmoins, elle est tout de même bien présente dans les programmes, sous notamment l'objectif suivant : ≪ *insister sur l'importance des expressions logiques telles que "si", "si et seulement si", "si ... alors ...", "donc", "d'où", ... et repérer si l'élève sait maîtriser ce vocabulaire, ces connecteurs logiques et le symbolisme nécessaires pour expliquer une propriété, rédiger une démonstration.* ≫

Pour préciser cette utilisation, nous revenons à nouveau sur l'idée de questionner les enseignants pour savoir comment ils prennent en compte cet objectif mentionnant l'implication. Font-ils une parenthèse plus orientée vers la logique pour répondre à d'éventuelles questions d'élèves sur ce "*si... alors...*" ? Font-ils d'eux-mêmes sans attendre d'éventuelles questions, la démarche d'expliquer cette notion ? Et si oui, quelles explications donnent-ils ? Ou encore, cette notion passe-t-elle disons systématiquement à la trappe parce que son enseignement n'est pas clairement explicité dans les programmes, mais bien plus dans un objectif et que la logique a quitté depuis quelques temps les salles de cours en secondaire ?

L'implication est donc utilisée dans les cours de mathématiques à la fois par les élèves et les enseignants. Suite à ce constat, nous nous interrogeons doublement :

1) comment les enseignants abordent-ils l'objectif mentionné ci-dessus ?
2) quelles sont à la fin de leur parcours dans le secondaire, les connaissances des élèves sur cette notion d'implication ? Et, comment réagiraient-ils face à des questions principalement axées sur cette notion ?

Ce premier questionnement fort général, sera repris et précisé, au chapitre 3, grâce à des outils théoriques.

1.2 L'enseignement de l'implication à l'université

À travers ce paragraphe, nous nous intéressons à l'enseignement de la notion d'implication dispensé dans le contexte universitaire. Étant étudiant à l'Université de Mons, nous nous sommes centré sur l'apprentissage de cette notion au sein du cours de Mathématiques élémentaires donné en première année de bachelier en sciences mathématiques, physiques et informatiques.

Tous les nouveaux étudiants débutant leur cursus universitaire à l'Université de Mons dans les sections précédemment citées suivent le cours de Mathématiques élémentaires dont un but est de proposer une remise à niveau générale de toutes les notions mathématiques essentielles et indispensables pour bien démarrer des études universitaires en sciences. Ce cours s'étale sur les six premières semaines du premier quadrimestre. Les étudiants sont évalués chaque semaine sur la matière cumulée depuis la première séance et un examen a lieu en début de septième semaine.

Le cours de Mathématiques élémentaires est également l'occasion pour les étudiants de suivre une introduction à la logique des propositions et à la logique du premier ordre. La notion d'implication y est notamment explicitement étudiée. Pour identifier l'enseignement et l'utilisation faits à l'université sur cette notion, nous nous sommes basé sur des notes de cours en ligne[20], mises à disposition par les enseignants. Nous examinons maintenant ces notes.

Dans les notes de cours, il est précisé que la logique des propositions « *s'intéresse à la manière dont on peut créer de nouvelles propositions à partir de propositions "élementaires" et comment de la vérité ou de la fausseté de ces propositions dites élémentaires, on peut déduire la vérité ou la fausseté de la proposition construite.* » (p. 3). Les propositions sont symbolisées dans ce cours par des lettres majuscules et les propositions élémentaires sont distinguées de celles composées. Les premières ne sont formées que d'une unique proposition (par exemple : P, Q, ...), tandis que les secondes sont construites à partir de propositions élémentaires et de connecteurs logiques (négation, conjonction, disjonction, implication et équivalence). Les symboles employés pour représenter ces connecteurs logiques sont respectivement $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. La valeur de vérité d'une proposition P est dite "vrai" si P est vraie et elle est déclarée "faux" si P est fausse. La convention choisie dans le cours est de noter 1 pour la valeur de vérité "vrai" et 0 pour la valeur de vérité "faux". La valeur de vérité des propositions $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$ est ainsi exprimée à partir de celle des propositions P et Q. Les tables de vérité de ces connecteurs logiques sont ensuite dressées. Nous relevons que le connecteur "*ou*" utilisé en mathématiques est notamment distingué de celui employé couramment. Signalons que les différentes significations de l'expression "*ou*" peuvent être sources de difficultés et de confusion pour les étudiants. Il n'est par exemple pas évident pour ces derniers de se rendre compte que le "*ou*" mathématique est le "*ou*" non-exclusif. Beaucoup d'entre eux pensent en effet qu'il s'agit plutôt du "*ou*" exclusif dont l'usage est plus courant. Comme le soulignent Davy et al.[1] : « *Les difficultés des élèves* [vis-à-vis du *ou*] *viennent de la confusion entre le langage mathématique et le langage courant. Il faut définir clairement le* [...] *"ou" en mathématiques par opposition au langage courant.* [...] *Le sens du "ou" en mathématiques ne peut donc pas être dégagé de l'expérience des élèves, il doit être enseigné.* » (p. 47).

Intéressons-nous aux explications apportées à l'implication entre deux propositions P et Q, notée $P \Rightarrow Q$. La question soulevée dans les notes est la suivante : quand cette implication est-elle vraie ? Pour y répondre, un exemple est donné. Nous reprenons celui-ci :

> Supposons que j'aie affirmé : « *si je gagne au loto, alors je vous offre un pot* ». Symboliquement, cela s'écrit $P \Rightarrow Q$ avec P la proposition "*je gagne au loto*" et Q le proposition "*je vous offre un pot*".

La question sur la vérité d'une implication est alors reformulée comme suit : « *Quand l'affirmation que j'ai faite est-elle vraie ? Ou, si vous préférez, quand peut-on dire que j'ai tenu ma promesse ?* » (p. 4). Il s'ensuit que si je gagne au loto (P est vrai) et que j'offre un pot (Q est vrai), la promesse faite est respectée ($P \Rightarrow Q$ est vrai). Par contre, si je gagne (P est vrai) mais que je n'offre pas à boire (Q est faux), il y a là une contradiction avec l'affirmation faite. La promesse n'est pas respectée ($P \Rightarrow Q$ est faux). Il reste à traiter les cas où la prémisse P est fausse, c'est-à-dire le cas où je ne gagne pas au loto. Comme précisé dans les notes (p. 5), si P est faux, « *je ne me suis engagé à rien* » : que j'offre un pot (Q est vrai) ou non (Q est faux), j'ai tenu ma promesse ($P \Rightarrow Q$ est vrai) et « *on ne peut pas dire que je suis un menteur* ».

En rassemblant ces quatre cas, une implication entre propositions $P \Rightarrow Q$ est fausse uniquement dans le cas où P est vrai et Q est faux. Elle est vraie dans les trois autres cas. La table de vérité de cette expression est alors dressée :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Nous constatons que la notion d'implication est à l'université explicitement étudiée et ce, indépendamment de toute contextualisation comme dans un exercice par exemple. C'est ici une différence majeure avec l'enseignement secondaire. En effet, notre analyse des programmes montre que l'implication y est toujours utilisée dans un contexte ou dans une partie du cours mais celle-ci n'est pas explicitement enseignée.

La notion de tautologie est ensuite définie dans ces notes de cours : ≪ *Supposons que nous ayons une proposition P qui dépend des propositions $Q_1, \ldots, Q_n$. Pour mettre en évidence cette dépendance, nous écrirons $P(Q_1, \ldots, Q_n)$. [...] On dit que $P(Q_1, \ldots, Q_n)$ est une tautologie si P est vrai quelles que soient les valeurs de vérité de $Q_1, \ldots, Q_n$. Autrement dit, P est une tautologie si et seulement si la ligne de P dans la table de vérité n'est composée que de 1.* ≫ (p. 7). Quelques exemples sont donnés, accompagnés de leur table de vérité, comme le suivant : $P(Q) = Q \vee \neg Q$

Q	$\neg Q$	P
0	1	1
1	0	1

La notion d'équivalence entre deux propositions est ensuite introduite : ≪ *Si deux propositions P_1 et P_2 dépendent des mêmes propositions $Q_1, \ldots, Q_n$, on dit qu'elles sont équivalentes si, pour toutes les valeurs de vérité de $Q_1, \ldots, Q_n$, $P_1(Q_1, \ldots, Q_n)$ et $P_2(Q_1, \ldots, Q_n)$ sont vrais et faux en même temps. Autrement dit, P_1 et P_2 sont des propositions équivalentes si leurs tables de vérité sont identiques* ≫. La notation choisie pour exprimer cette équivalence entre deux propositions est : $P_1 \simeq P_2$. On signale dans les notes qu'≪ *il n'y a pas de notion généralement acceptée pour l'équivalence de deux propositions. Le symbole "$\simeq$" doit donc être considéré comme spécifique aux présentes notes* ≫ (p. 8)

L'équivalence entre les propositions $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$ est alors établie en dressant la table de vérité de ces deux propositions et en vérifiant que ces deux tables sont deux-à-deux identiques. On montre de manière semblable que la négation de $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $P \wedge \neg Q$. Enfin, l'équivalence entre $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ est établie. Nous relevons que le connecteur logique équivalence symbolisé par $\Leftrightarrow$, est explicitement étudié puisqu'il est défini comme la conjonction de deux implications. L'étude de ce connecteur se fait indépendamment de tout contexte.

L'équivalence entre $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est également démontrée.

Les étudiants qui suivent un cours de logique des propositions basé sur ces notes en Mathématiques élémentaires peuvent ainsi définir explicitement une implication entre propositions en dressant sa table de vérité et peuvent reformuler cette implication en utilisant l'équivalence avec la disjonction $\neg P \vee Q$ ou avec sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Le lien est ensuite établi entre l'équivalence de deux propositions et la notion de tautologie

« *deux propositions P_1 et P_2 sont équivalentes* $\big(P_1 \simeq P_2\big)$
si et seulement si
$P_1 \Leftrightarrow P_2$ *est une tautologie* » (p. 8).

Nous remarquons qu'un lien est explicitement établi dans ces notes de cours (p. 16-19) entre les connecteurs de la logique et les opérateurs sur les ensembles. « *Les ensembles peuvent [...] être décrits en compréhension, c'est-à-dire par une propriété. L'ensemble des éléments a qui vérifient la propriété P se note :*

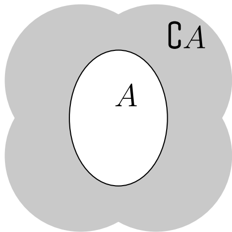
$$\{a : a \textit{ vérifie } P\}.$$

Autrement dit, la définition affirme que l'équivalence suivante est vraie :

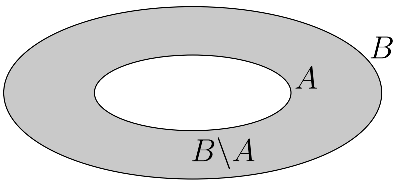
$$x \in \{a : a \textit{ vérifie } P\} \Leftrightarrow x \textit{ vérifie } P.$$

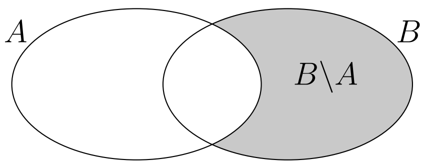
[...] Les définitions en compréhension permettent de faire le lien entre les connecteurs de la logique booléenne et les opérations élémentaires sur les ensembles. »
Pour l'opérateur *complémentaire*, l'enseignant définit $\complement A$, l'ensemble des éléments n'appartenant pas à A, comme tel : $\{x : x \notin A\}$. Cette définition de l'opérateur est associée au connecteur logique *négation*. En effet, la négation de l'appartenance à l'ensemble A, notée $\neg(x \in A)$ s'abrège en $x \notin A$.

Cet opérateur peut être représenté par le diagramme de Venn [5] suivant :



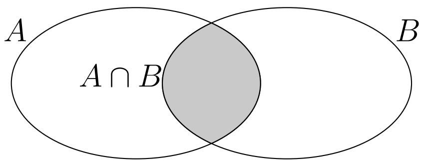
La partie grisée correspond aux éléments de $\complement A$. L'enseignant distingue les opérateurs *complémentaire* et *complémentaire relatif*. Il définit ce dernier comme tel : $\complement_B A = B \backslash A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$. Il ne lui associe pas de connecteur logique propre bien que nous retrouvons le connecteur *négation* dans l'écriture de l'expression $x \notin A$. Les diagrammes de Venn associés sont les suivants, selon que A soit respectivement inclus ou non dans B :





La partie grisée correspond aux éléments de $\complement_B A$, c'est-à-dire les éléments appartenant à l'ensemble B sans appartenir à A. Dit autrement, ce sont les éléments x qui vérifient l'énoncé $x \in B \wedge x \notin A$.

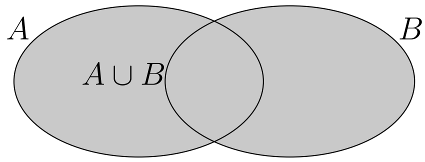
Pour l'opérateur ensembliste *intersection*, l'enseignant définit $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$, associé à l'opérateur logique conjonction. En effet, les éléments de $A \cap B$ sont les éléments appartenant à la fois à A et à la fois à B, c'est-à-dire appartenant aux deux ensembles en même temps. Dit autrement, ce sont les éléments x qui rendent vrais les énoncés $x \in A$ et $x \in B$, c'est-à-dire qui rendent vraie l'expression logique $x \in A \wedge x \in B$.



Pour l'opérateur *union*, l'enseignant définit $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$, associé à l'opérateur logique disjonction. En effet, les éléments de $A \cup B$ sont

5. Les diagrammes de Venn sont des figures géométriques représentant des ensembles. Les éléments à l'intérieur d'une figure appartiennent à l'ensemble associé à cette figure. Ces diagrammes sont utilisés pour représenter des relations ensemblistes pouvant exister entre des ensembles comme par exemple l'union ou l'intersection.

les éléments appartenant à A ou appartenant à B. Dit autrement, ce sont les éléments x qui vérifient l'énoncé $x \in A \vee x \in B$.



Dans le cours de Mathématiques élémentaires, un lien est explicitement établi entre les connecteurs de la logique et les opérateurs sur les ensembles. Il est d'ailleurs précisé : « *Ce lien entre logique booléenne et théorie des ensembles est très utile. Tout d'abord, [...] deux formules équivalentes définissent le même ensemble*

$$\textit{si } P_1 \equiv P_2 \textit{ alors } \{x : x \textit{ vérifie } P_1\} = \{x : x \textit{ vérifie } P_2\} \text{ » } \textit{(p. 18)} \tag{1.1}$$

L'exemple suivant est donné [20, p. 18] pour illustrer la relation (1.1) :
« *la proposition* $P_1 := (x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - x = 0)$ *est équivalente à* $P_2 := (x = 0 \vee x = 1)$ - *puisqu'elles sont vraies et fausses en même temps pour tous les* x - *et donc* $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x = 0\} = \{x : x \textit{ vérifie } P_1\} = \{x : x \textit{ vérifie } P_2\} = \{x : x = 0 \vee x = 1\} = \{0, 1\}$. »
Il est également signalé que de la relation (1.1), il est possible de déduire de multiples conséquences :

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ découle du fait que $(P \wedge Q) \wedge R \simeq P \wedge (Q \wedge R)$;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ découle du fait que $(P \vee Q) \vee R \simeq P \vee (Q \vee R)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ découlent respectivement des lois logiques de distributivité $P \vee (Q \wedge R) \simeq (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ et $P \wedge (Q \vee R) \simeq (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ et $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ découlent respectivement des lois de De Morgan $\neg(P \wedge Q) \simeq \neg P \vee \neg Q$ et $\neg(P \vee Q) \simeq \neg P \wedge \neg Q$

Dans les notes, l'expression "*x vérifie la propriété P*" est ensuite symbolisé par $P(x)$. L'ensemble $\{x : x \text{ vérifie } P\}$ se réécrit alors $\{x : P(x)\}$. La notation $P(x)$ a l'avantage de montrer explicitement que la propriété P dépend de la variable x. Avec cette nouvelle notation, les notes traitent ensuite d'énoncés quantifiés universellement ou existentiellement, et en particulier de $\forall x, P(x)$ et $\exists x, P(x)$.
Étant donné une propriété dépendant d'une variable x, l'enseignant précise [20, p. 36] que l'on écrit l'énoncé $\forall x, P(x)$ pour signifier que $P(x)$ est vrai quel que soit x. Tandis que l'on écrit $\exists x, P(x)$ pour indiquer qu'il existe au moins un x tel que $P(x)$ est vrai, ou encore, de manière équivalente, que $P(x)$ est vrai pour un certain élement x.

L'enseignant insiste notamment sur la preuve de la véracité de ces formules [20, pp. 37-39] :

- Pour une formule du type $\forall x, P(x)$:
  Il faut montrer que quel que soit la valeur de la variable x, $P(x)$ est vrai. « *Pour ce faire, nous prenons un x arbitraire, sans aucune restriction sur ses valeurs possibles, et nous cherchons à produire un argument général (qui dépend de x mais marche dans tous les cas de figure) qui montre $P(x)$. Dans la pratique, le fait de se donner un x arbitraire est souvent écrit sous la forme "Soit x" [...]* ». Le professeur met particulièrement l'accent sur le fait que donner quelques exemples de x qui vérifient $P(x)$ ne constitue pas une démonstration d'un énoncé universellement quantifié et ce, même si le nombre d'exemples est élevé.
- Pour une formule du type $\exists x, P(x)$:
  Montrer l'énoncé $\exists x, P(x)$, c'est montrer qu'il existe un élément x qui rend $P(x)$ vrai. « *Argumenter qu'un tel x existe ne suffit pas, il faut en exhiber explicitement un et prouver que celui-ci vérifie la propriété P. Souvent bien sûr, il y a plusieurs x possibles - la loi du moindre effort voulant qu'on recherche le plus simple possible !* ».

L'enseignant s'attèle ensuite à exprimer la négation des énoncés $\forall x, P(x)$ et $\exists x, P(x)$.

- Écrire $\forall x, P(x)$ signifie que $P(x)$ est vrai pour toutes les valeurs de x. Cet énoncé est déclaré faux s'il existe au moins un x tel que $P(x)$ soit faux, c'est-à-dire tel que $\neg P(x)$ soit vrai. Le professeur écrit alors que $\neg\Big(\forall x, P(x)\Big) \simeq \exists x, \neg P(x)$.
- Écrire $\exists x, P(x)$ traduit le fait qu'il existe un élément x qui vérifie $P(x)$. Cet énoncé est faux si $P(x)$ n'est rendu vrai par aucune valeur de x. Dit autrement, cet énoncé est faux si quelque soit les valeurs de x, on a que $P(x)$ est faux ou encore que $\neg P(x)$ est vrai. Le professeur écrit alors que $\neg\Big(\exists x, P(x)\Big) \simeq \forall x, \neg P(x)$.

1.2.1 Premières conclusions tirées de cette analyse de l'enseignement de l'implication à l'université

Nous retenons de cette analyse sur l'enseignement de l'implication à l'Université de Mons que cette notion est explicitement étudié de manière décontextualisée. Contrairement à l'institution secondaire, les étudiants universitaires reçoivent donc un enseignement précis sur cette notion. Alors que l'implication mathématique semble être utilisée en secondaire dans des contextes particuliers notamment en géométrie, il apparaît qu'à l'université, elle est aussi bien utilisée qu'enseignée. Cette idée d'utilisation et d'enseignement de cette notion peut être associée à la double dimension outil/objet d'un concept mathématique. Nous reviendrons sur ce vocabulaire outil/objet au chapitre suivant.

Nous relevons que les étudiants universitaires sont notamment familiarisés avec la table de vérité de *si* P *alors* Q où P et Q sont deux propositions. Les questions "*quand une implication entre propositions est-elle vraie ?*" et "*quand est-elle fausse ?*" sont notamment soulevées. L'équivalence entre $P \Rightarrow Q$ et la disjonction $\neg P \vee Q$ ou encore l'équivalence entre une implication et sa contraposée sont établies. Nous constatons également que la négation d'une implication est définie et que la distinction entre une implication et une équivalence est explicitement enseignée. Nous remarquons que l'enseignement universitaire est centré sur le symbolisme notamment en utilisant les symboles $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ pour exprimer respectivement les connecteurs logiques négation, conjonction, disjonction, implication et équivalence. Notons qu'un lien est explicitement établi entre les connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et les opérateurs ensemblistes complémentaire, intersection et union. Les étudiants sont aussi amenés à utiliser des quantificateurs universels et existentiels.

1.3 Bilan sur l'enseignement de l'implication

Nous avons examiné l'enseignement de l'implication à deux niveaux d'enseignements : celui du secondaire et celui universitaire. Dressons les aspects frappants que nous retenons de cette analyse.

La notion d'implication apparaît dans chaque institution mais,

- en secondaire, son enseignement est centré sur la langue naturelle ou le vocabulaire. Cette notion n'est pas explicitement étudiée et ses apparitions sont toujours contextualisées. Nous notons notamment qu'elle semble souvent attachée à la géométrie. Nous qualifions l'implication d'outil du langage pour cette institution.
- à l'université, l'enseignement de l'implication est centré sur le symbolisme et sur des questions nouvelles : quand une implication est-elle vraie ? quand est-elle fausse ? comment nier une implication ? quel lien existe-t-il entre une implication et une équivalence ? Les étudiants universitaires reçoivent un enseignement explicite et décontextualisé de l'implication. De par cette étude, l'implication est vue comme un objet dans cette institution.

L'enseignement de l'implication apparaît donc différent entre l'institution secondaire et celle universitaire. Ceci nous conduit à émettre l'hypothèse qu'il existe une rupture dans l'étude de cette notion entre ces deux institutions et laisse présager des difficultés à surmonter chez les élèves. Nous reviendrons par après sur cette hypothèse et sur les dimensions outil et objet qu'un concept mathématique peut posséder.

Chapitre 2

Travaux antérieurs sur la notion d'implication

Dans ce chapitre, nous présentons les apports de nos lectures de travaux didactiques en lien avec la notion d'implication. Ce chapitre s'inspire principalement des travaux de Deloustal-Jorrand [2], [3], [4] et de Durand-Guerrier [6], [7], [8] et [9].

L'expression "*si... alors...*" est utilisée dans le langage de tous les jours pour s'exprimer. Nous commençons d'abord par expliquer ce côté langagier, dit aussi naturel de l'implication avant de poursuivre avec son aspect mathématique.

2.1 L'implication naturelle

Chaque jour, nous utilisons l'implication pour pouvoir nous exprimer au sein de la société. Deloustal-Jorrand[4] affirme que « *la notion d'implication existe dans la logique naturelle. [...] Nous appelons logique naturelle toutes les règles et conceptions ayant trait au raisonnement, le plus souvent en dehors d'un cadre mathématique, utilisées dans des situations de la vie courante* » (p. 13). Exemples :

– le ciel est bleu donc il ne pleuvra pas ;
– tu pourras aller jouer avec ton camarade si tu finis tes devoirs ;
– si Muse vient à Rock Werchter alors j'irai les écouter.

Deloustal-Jorrand[ibid.] précise que : « *La logique naturelle nous est nécessaire pour communiquer à l'aide du langage, [...] cependant certaines expressions sont ambiguës. De nombreux abus de langage contribuent à rendre floue l'implication naturelle qui n'est pas toujours interprétée de la même façon se-*

lon le contexte. Nous appelons implication naturelle le concept d'implication de la logique naturelle ≫ (p. 13).

2.1.1 Confusion de l'implication avec *seulement si* ou avec *si et seulement si*

On peut retrouver des énoncés conditionnels tels que : Q *si* P, Q *seulement si* P, Q *si et seulement si* P. En mathématiques, ces expressions ont des significations différentes :

- Q *si* P : P implique Q
- Q *seulement* si P : Q implique P
- Q *si et seulement* si P : P est équivalent à Q

Dans la vie de tous les jours, à l'inverse des mathématiques, il se peut que ces expressions soient confondues. Dans ce cas, comme le précise Deloustal-Jorrand[ibid.], ≪ *seul le contexte permet d'interpréter la signification de l'expression* ≫ (p. 14).

Confusion entre implication et implication réciproque

Nous reprenons ici l'exemple de Deloustal-Jorrand [4, p. 14] :

Demain, je t'emmènerai à la piscine s'il fait beau.

Identifions la proposition Q à "*je t'emmènerai à la piscine*" et P à "*il fait beau*". L'exemple peut se ré-écrire : *si P alors Q*, ou encore *P implique Q*. Pourtant, avec cette phrase, nous sous-entendons que : "*S'il fait mauvais demain, je ne t'emmènerai pas à la piscine*", c'est-à-dire *Si non P alors non Q*. Comme le précise Deloustal-Jorrand, on considère la négation dans son sens naturel. Ici, *non P* peut se traduire par "*il ne fait pas beau*" ou encore par "*il fait mauvais*" (bien qu'il puisse exister beaucoup de nuances entre ces deux phrases). Quant à *non Q*, il se traduit par "*je ne t'emmènerai pas à la piscine*".

En utilisant l'équivalence de la contraposée [1] avec l'implication directe, on obtient de la phrase "*si non P alors non Q*" que *Q implique P*, ou encore, *Q seulement si P*. Cette dernière expression qui s'interprète comme tel :

Demain, je t'emmènerai à la piscine seulement s'il fait beau,

1. L'équivalence entre une implication et sa contraposée paraît, selon Deloustal-Jorrand[4, p. 15] conforme à l'utilisation de l'implication dans la logique naturelle. Nous y revenons dans l'annexe A page 295.

représente en fait la véritable signification donnée à la phrase de départ. En effet, selon Deloustal-Jorrand[4], ≪ *l'enfant à qui cette phrase s'adresse ne s'y trompe pas. Il comprend bien le "si" comme un "seulement si", lui qui sait que, même en cas de beau temps, une bêtise ou une panne de voiture pourront lui interdire la piscine* ≫ (p. 15).

Confusion entre implication et équivalence

Pour illustrer cette confusion possible entre une implication et une équivalence, nous reprenons le texte suivant proposé par Rogalski[15] :

> *Question de contrat social (les bonbons de la maîtresse) :*
> *Dans une école primaire, la maîtresse donne un jour un problème aux élèves et leur dit : ≪ Cherchez ce problème chez vous ; demain si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons ≫. Le lendemain, aucun élève n'a su faire le problème. La maîtresse sort un paquet de bonbons et les distribue aux enfants. Ceux-ci protestent : ≪ Ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas droit aux bonbons ! ≫. Goguenarde, la maîtresse leur répond qu'elle a parfaitement respecté le contrat ...*
> *Quels commentaires vous inspire ce récit ?*

L'implication énoncée par la maîtresse est :

Demain, si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons.

Identifions P à "*quelqu'un a su le résoudre*" et Q à "*je vous donnerai des bonbons*". Nous traduisons alors la phrase de la maîtresse par "*Si* P *alors* Q". Cette implication est en fait interprétée par les enfants comme une équivalence. Non seulement ils comprennent que "*si quelqu'un trouve la solution, il y aura des bonbons*" (c'est-à-dire "*si* P *est vraie alors* Q *est vraie*") mais ils relèvent comme sous-entendu le fait que "*si personne ne trouve alors il n'y aura pas de bonbons*" (ce qui s'écrit "*Si* P *est fausse alors* Q *est fausse*", c'est-à-dire "*Si non* P *alors non* Q", ou encore en utilisant l'équivalence avec la contraposée : "*Si* Q *alors* P").

L'implication présente dans la phrase de la maîtresse est donc interprétée comme une équivalence par ses élèves puisque ceux-ci protestent lorsqu'ils n'ont pas su faire le problème et que, par conséquent, ils n'ont pas droit aux bonbons. D'après les auteurs et aussi d'après Deloustal-Jorrand[4, p. 16] qui reprend cet exemple, cette interprétation peut avoir plusieurs causes :

- La maîtresse a relié la distribution des bonbons et le résultat à l'exercice par une implication. L'implication est alors considérée comme un lien de cause à effet et la distribution de bonbons dépend du résultat à l'exercice.

– Recevoir un bonbon apparaît comme une récompense pour les élèves. Si quelqu'un trouve la solution de l'exercice, il est récompensé avec une friandise. Recevoir un bonbon sans avoir su résoudre le problème est donc injuste par rapport à ceux qui l'ont résolu. Les bonbons sont réservés à ceux qui ont trouvé, les autres n'y ont pas droit. C'est ce contrat social sous-jacent à l'implication énoncée par la maîtresse qui apparaît dans la protestation des élèves.

Deloustal-Jorrand[4] conclut en précisant que ≪ *Dans de nombreux cas, une implication énoncée en langue naturelle signifie autre chose ou tout au moins plus que ce qui est réellement dit. Que cela découle d'une interprétation personnelle, d'un contrat social sous-jacent [...] il n'en reste pas moins que l'implication naturelle est floue et reste tributaire du contexte* ≫ (p. 18).

2.1.2 Prémisse fausse

Nous nommerons *prémisse* la proposition placée devant le symbole implication et *conclusion* celui placé après ce symbole. Dans $A \Rightarrow B$, A est donc la prémisse et B est la conclusion.

Dans la logique naturelle, la prémisse de certaines implications est fausse. Deloustal-Jorrand[4, p. 20] relève que certaines de ces implications peuvent être déclarées vraies tandis que d'autres peuvent être statuées fausses ou encore ne rien vouloir dire. Elle estime que le statut de ces implications ≪ *dépend des contenus sémantiques et des nuances de la langue* ≫ (p. 20). Elle émet l'hypothèse que : ≪ *c'est la présence, ou respectivement l'absence, d'un lien sémantique entre la prémisse et la conclusion* [de ces implications] *qui permet de déclarer une phrase vraie, ou respectivement fausse* ≫. Par exemple, sachant que je suis un homme, la prémisse "*je suis une femme*" des phrases suivantes est fausse.

> Si je suis une femme alors lors de la naissance de mon enfant je peux l'allaiter.
> Si je suis une femme alors les chromosomes de mon ADN sont du type XY.

La première phrase est déclarée vraie car il existe un lien explicatif : "*un femme peut allaiter son nouveau-né*". Par contre la seconde est statuée fausse car le lien "*une femme ne possède que des chromosomes XX*" n'est pas vérifié. Cette phrase peut aussi être évaluée comme ne voulant rien dire : ≪ *cela ne veut rien dire, une femme ne peut pas avoir des chromosomes XY mais uniquement des chromosomes XX* ≫.

Le traitement des implications à prémisse fausse dépend selon Deloustal-Jorrand de l'existence d'un lien entre la prémisse et la conclusion. Elle ajoute qu' ≪ *en logique naturelle, contrairement à la logique mathématique, pour examiner la validité d'une phrase* "si… alors…"*, on suppose que la prémisse est vérifiée. C'est-à-dire on considère le cas où la prémisse est vraie, ceci même si l'on sait pertinemment qu'elle est fausse. On utilise ensuite l'existence d'un lien explicatif entre la prémisse et la conclusion pour se prononcer sur la vérité* ≫ (p. 21). Elle fait également l'hypothèse que cette pratique peut être utilisée en mathématiques pour statuer sur la vérité d'une implication entre propositions. Examinons par exemple, les phrases suivantes :

1) Si 3 est pair alors 4 est impair ;
2) Si 3 est pair alors 4 est pair.

Deloustal-Jorrand fait l'hypothèse que pour donner la valeur de vérité de ces phrases, on peut procéder de manière similaire à la logique naturelle. On considère alors la prémisse "*3 est pair*" comme vraie même si on sait pertinemment qu'elle est fausse et c'est la présence (respectivement l'absence) d'un lien entre la prémisse et la conclusion qui établit la vérité (respectivement la fausseté) de l'implication.
Analysons ces deux phrases. Suite à l'hypothèse de Deloustal-Jorrand,

1) la phrase "*si 3 est pair alors 4 est impair*" est interprétée par "*supposons que 3 pair soit vraiment vrai, est-ce que 4 est impair ?*". Cette phrase est déclarée vraie, puisque si l'on suppose que la prémisse est vraie, le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" y est vérifié.
2) la phrase "*si 3 est pair alors 4 est pair*" est interprétée par "*supposons que 3 pair soit vraiment vrai, est-ce que 4 est pair ?*". Ici, le lien explicatif *un nombre pair est suivi d'un nombre impair* n'est pas respecté puisqu'il est impossible que deux nombres consécutifs aient même parité. La phrase est donc déclarée fausse.

Lors d'une expérimentation auprès de 4 étudiants futurs enseignants, Deloustal-Jorrand a constaté que son hypothèse pour statuer sur ces implications entre propositions ne s'est pas vérifiée. Parmi les 4 personnes interrogées, deux ont recours au fait que "*$A \Rightarrow B$ est vraie lorsque A est fausse*" et deux autres à celui "*$A \Rightarrow B$ est fausse lorsque A est fausse*" pour s'exprimer sur la valeur de vérité de ces deux implications. Remarquons que deux étudiants se posent tout de même la question suivante : ≪ *on sait que "3 pair" est faux, doit-on l'oublier et supposer que 3 est bien pair ?* ≫. Néanmoins, ces deux personnes estiment plus important l'utilisation de la conception erronée "*$A \Rightarrow B$ est fausse lorsque A est fausse*" que cette remise en question sur la parité de 3 et sur la présence d'un lien explicatif pour statuer sur la vérité.

2.1.3 Causalité et temporalité

Considérons la phrase "*Si le ciel est bleu alors* $6 \times 7 = 42$ *dans l'ensemble des naturels*". La prémisse et la conclusion de celle-ci n'ont aucun lien entre elles et l'implication n'a donc a priori pas de sens. Deloustal-Jorrand[4, p. 22] affirme qu'une telle phrase peut alors être déclarée en logique naturelle comme n'ayant aucun sens ou même fausse avec l'explication suivante :

> Ce n'est pas parce que le ciel est bleu que $6 \times 7 = 42$ dans l'ensemble des naturels, ce n'est pas la cause !

Deloustal-Jorrand[ibid.] conclut qu'en logique naturelle, ≪ *la décision de la vérité d'une implication dépend des contenus sémantiques et du lien qui les unit, l'absence de lien la faisant juger fausse ou sans signification* ≫ (p. 22). Elle ajoute qu'≪ *en réalité, bon nombre des implications de la langue française énoncent un rapport de cause à effet. La prémisse est la cause de la conclusion et la conclusion est la conséquence ou l'effet de la prémisse. De plus, la conséquence survient après la cause, même si cela doit être presque immédiat. [...] Une implication connote donc, en logique naturelle, une notion de causalité, la prémisse est la cause de la conclusion, et une notion de temporalité, la prémisse a toujours lieu avant la conclusion* ≫.

2.1.4 L'implication comme outil de déduction de la logique naturelle

Selon Deloustal-Jorrand [4, p. 23], l'implication peut aussi être utilisée comme outil de déduction de la logique naturelle. Dans les romans ou feuilletons policiers, on trouve souvent des raisonnements où on utilise la contraposée d'une implication.

Considérons, par exemple, les faits suivants :

- Mathieu a été tué avec un poignard au salon bleu ;
- Rémy est suspecté par l'inspecteur.

L'enquêteur peut se poser des questions, formuler des suppositions (sous forme d'implications) telles que : si Rémy a tué Mathieu alors il était présent au salon bleu au moment des faits. Or, un témoin affirme que Rémy était en cours d'analyse numérique au moment des faits. Il ne pouvait physiquement pas être présent au salon bleu à ce moment. L'enquêteur en conclut que Rémy n'a pas tué Mathieu et Rémy est donc innocenté.

Cette conclusion sur l'innocence de Rémy s'obtient à partir de la règle du Modus Tollens (ou raisonnement par contraposition) que l'on peut formuler comme tel :

$$A \Rightarrow B \text{ est vrai ; or, } B \text{ est faux ; donc, } A \text{ est faux.}$$

L'implication "*si Rémy a tué Mathieu alors il était présent au salon bleu au moment des faits*" exprime bien l'idée de cause sous-jacente à une implication naturelle. La prémisse "*Rémy a tué Mathieu*" est vue comme la cause et la conséquence est la présence de Rémy au salon bleu. La temporalité intervient également. En effet, comme Rémy n'était pas présent au salon bleu au moment des faits, la conséquence n'est pas vérifiée. Il s'ensuit alors que l'évènement "*assassinat de Mathieu*" précédant cette conséquence, selon la conception temporelle de l'implication, ne peut pas être lui-même vérifié. Rémy est donc innocenté. Par contre, si Rémy avait été présent au salon bleu au moment des faits, l'enquêteur n'aurait pu affirmer avec certitude si Rémy avait tué Mathieu ou pas.

La règle du Modus Tollens peut donc être présente dans la logique naturelle.

Comme le précise Deloustal-Jorrand[ibid.] : « *Ces ambiguïtés de la langue française, qu'elles soient dues à des abus de langages, à des interprétations dépendant du contexte, à des interprétations en terme de causalité et temporalité rendent confus le concept naturel d'implication* » (p. 23).

2.2 Les différents types d'implication

Les travaux de Durand-Guerrier [6], [7] et [9] témoignent de l'existence de plusieurs types d'implication. Au cours de cette section, nous décrivons ces différents types d'implication et précisons ceux utilisés dans le domaine des mathématiques.

Avant les précisions de Durand-Guerrier dans ses travaux, Quine [11] avait déjà distingué en 1950, différentes façons d'exprimer un « si... alors... » :

- l'implication naturelle ;
- l'implication matérielle ;
- l'implication formelle.

Nous les reprenons une à une dans ce qui suit.

2.2.1 L'implication naturelle

La première est l'implication naturelle dont nous avons déjà parlé ci-avant. Cette implication est issue de la logique naturelle pour laquelle on ne considère généralement que les cas qui vérifient la prémisse. En effet, nous avons vu que même si la prémisse est fausse, on se ramène à une situation telle que : "Supposons que la prémisse soit réellement vraie (bien que l'on sache que celle-ci soit pertinemment fausse), que peut-on dire sur la vérité de la conclusion ?". Nous avons vu qu'un énoncé conditionnel à prémisse fausse peut être vrai (resp. faux ou encore n'ayant aucun sens) s'il existe (resp. n'existe pas) un lien de cause à effet entre prémisse et conclusion. L'implication naturelle est associée à la logique naturelle utilisée dans la vie courante. Cette implication ne se trouve pas en mathématiques. Par contre, les deux autres types d'implication sont attachés aux mathématiques.

2.2.2 L'implication matérielle

L'implication matérielle est le connecteur propositionnel qui relie deux variables propositionnelles A et B dans le calcul des propositions : $A \Rightarrow B$. Nous utilisons le mot *proposition* tel qu'il est définit par Durand-Guerrier[6] :

> ≪ *En logique classique, une proposition est une entité linguistique qui porte le vrai ou le faux* ≫ (p. 65).

Dans le calcul des propositions, comme le rappelle Deloustal-Jorrand[4, p. 27], on distingue trois conventions :
- La bivalence des propositions : une proposition a exactement deux valeurs de vérités : vrai ou faux.
- La propriété du tiers exclu : une proposition est soit vraie soit fausse, mais jamais les deux en même temps.
- La vérifonctionnalité : la valeur de vérité d'une phrase ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition des connecteurs qui les relient.

Remarquons que, suite à la vérifonctionnalité, la valeur de vérité d'une phrase ne dépend ni du contexte, ni des contenus sémantiques des propriétés en jeu. Il y a ici une différence majeure avec ce que Deloustal-Jorrand a constaté pour la logique naturelle, à savoir que l'implication naturelle est floue et reste tributaire du contexte.

Comme le précise V. Durand-Guerrier[9, p. 47], ≪ *Quine assume le choix conventionnel contraire à l'usage courant, mais non arbitraire, d'attribuer la valeur de vérité vraie* ≫ à l'implication matérielle $A \Rightarrow B$, lorsque la prémisse A est fausse. Cette implication matérielle $A \Rightarrow B$ est donc fausse uniquement dans le cas où A est vrai et que B est faux.

La valeur de vérité attribuée à une implication matérielle dont la prémisse est fausse n'est pas arbitraire. Ce choix découle des conventions de la logique des propositions susmentionnées et du désir de tenir compte de certains aspects de la logique naturelle en dressant la table de vérité d'une implication matérielle. Deloustal-Jorrand[4, p. 24] propose une construction cette implication mathématique à partir de l'implication naturelle. Nous présentons celle-ci dans l'annexe A.

2.2.3 L'implication formelle

Travailler uniquement avec la logique des propositions n'est pas suffisant. On rencontre par exemple des énoncés qui concernent des objets variant dans des ensembles, comme par exemple

$$\forall x, \big(x \text{ pair} \Rightarrow x \text{ impair}\big) \tag{2.1}$$

Il s'agit d'une implication universellement quantifiée qui relie deux propriétés dépendant d'une même variable. C'est la troisième forme d'implication que recense Quine, bien qu'elle soit déjà introduite en 1903 par Russell[17]. On l'appelle implication formelle. Elle s'énonce sous la forme $\forall x, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des prédicats et x appartient à une certaine classe d'objets. Comme le précise Durand-Guerrier [6, p. 65], l'implication formelle est un connecteur du calcul des prédicats. Dans notre exemple (2.1), P est la propriété "*être pair*" et Q la propriété "*être impair*". $P(x)$ est donc le prédicat "*x est pair*" et $Q(x)$, le prédicat "*x est impair*".

2.2.4 Vers un quatrième type d'implication

Durand-Guerrier[9, p. 49] soutient l'absence d'une quatrième forme d'implication par rapport aux trois types identifiés par Quine. Elle affirme que cette quatrième forme est indispensable pour articuler l'implication matérielle et l'implication formelle. Elle la nomme implication ouverte.

Considérons l'implication formelle $\forall x, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$. Nous lui associons la phrase ouverte $P(x) \Rightarrow Q(x)$ en supprimant le quantificateur universel attaché. La variable x est donc libre puisqu'elle n'est pas dans le champ d'un quantificateur. Durand-Guerrier [6] définit : « *Une phrase ouverte n'a pas de valeur de vérité ; ce n'est pas une proposition* » (p. 65). La phrase $P(x) \Rightarrow Q(x)$ n'admet donc pas de valeur de vérité. En effet, dans l'exemple *x pair* $\Rightarrow$ *$x+1$ pair*, nous ne pouvons dire s'il est vrai ou faux sans la présence d'un quantificateur et donc par extension sans donner de valeur à la variable x.

Nous interprétons la phrase $P(x) \Rightarrow Q(x)$ en assignant des valeurs à cette variable x. À chaque assignation d'un objet du domaine à la variable x, nous obtenons une instance de la phrase ouverte correspondante. Par exemple,

$P(a) \Rightarrow Q(a)$ est une instance de la phrase ouverte $P(x) \Rightarrow Q(x)$ lorsque nous assignons la valeur a à la variable x. Cette instance est une implication matérielle, elle admet une valeur de vérité. Elle sera fausse dans le seul cas où $P(a)$ est vrai et $Q(a)$ est faux et elle sera vraie dans tous les autres cas.

Exemples :

- 2 *pair* $\Rightarrow$ 3 *impair* est une instance vraie de la phrase ouverte x *pair* $\Rightarrow x+1$ *impair*, puisque sa prémisse et sa conclusion sont vraies ;
- 3 *pair* $\Rightarrow$ 4 *impair* est une instance vraie de la phrase ouverte x *pair* $\Rightarrow x+1$ *impair*, puisqu'une implication matérielle est déclarée vraie lorsque sa prémisse et sa conclusion sont fausses ;
- 2 *pair* $\Rightarrow$ 3 *pair* est une instance fausse de la phrase ouverte x *pair* $\Rightarrow x+1$ *pair*, puisque la prémisse "2 *pair*" est vraie mais la conclusion "3 *pair*" est fausse ;
- 3 *pair* $\Rightarrow$ 4 *pair* est une instance vraie de la phrase ouverte x *pair* $\Rightarrow x+1$ *pair*, puisqu'une implication matérielle est déclarée vraie lorsque sa prémisse est fausse et que sa conclusion est vraie.

Signalons que la clôture universelle de x *pair* $\Rightarrow x+1$ *impair* sera toujours vraie puisqu'il n'existe pas de naturels pairs dont le successeur ne soit pas impair. Tandis que la clôture universelle de x *pair* $\Rightarrow x+1$ *pair* est fausse puisqu'il existe des naturels pairs dont le successeur n'est pas pair.

Avec la phrase $P(x) \Rightarrow Q(x)$, nous définissons ainsi *un connecteur du calcul des prédicats* qui est une extension de l'implication matérielle définie grâce à sa table de vérité. Ce quatrième type d'implication est appelé implication ouverte. Selon Durand-Guerrier[9, p. 49], cette extension de l'implication matérielle est le chaînon manquant entre implication formelle et implication matérielle.

2.3 Le phénomène de quantification universelle implicite

Le phénomène de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels a été mis en évidence par Durand-Guerrier[6]. Il consiste à interpréter tout énoncé conditionnel non quantifié, comme étant universellement quantifié. Durand-Guerrier[ibid.] montre que cette pratique peut être amenée par l'enseignant en classe de secondaire et ne pas être partagée par une grande majorité des élèves. Durand-Guerrier[9] précise que « *c'est une pratique mathématique inconsciente et courante, au point que pour certains auteurs, il s'agit même d'une règle que l'on peut institutionnaliser* » (p. 81) : si un énoncé conditionnel $P(x) \Rightarrow Q(x)$ n'est pas quantifié, il est sous-entendu qu'il l'ai universellement. Ce sous-entendu peut être une source de difficultés pour les élèves.

Pour illustrer cette pratique, nous reprenons partiellement, la question suivante soulevée par Deloustal-Jorrand[3, p. 58 - 60]. Dans la suite du travail, nous reviendrons sur cette question en la traitant dans sa globalité puisque nous verrons comment nous l'avons utilisée pour tenter d'obtenir des réponses à notre questionnement sur l'implication. L'énoncé est le suivant :

> *Soit k un naturel quelconque. Pensez-vous que les énoncés suivants soient "vrai", "faux" ou "on ne peut pas savoir" ?*
> a) *k pair* $\Rightarrow$ *k + 1 pair*
> b) *k pair* $\Rightarrow$ *k + 1 impair*

La première fois que nous avons nous-mêmes rencontré ces énoncés, nous y avons répondu comme tel :

a) "k *pair* $\Rightarrow k+1$ *pair*" est une implication fausse car elle admet un contre-exemple : prenons $k = 2$, 2 est pair et 3 n'est pas pair. Ce contre-exemple vérifie l'énoncé $\exists k, \big(k \textit{ pair} \wedge k+1 \textit{ impair}\big)$ qui est la négation de l'énoncé donné, $\forall k, \big(k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ pair}\big)$.

b) "k *pair* $\Rightarrow k+1$ *impair*" est une implication vraie. Montrons-le : Soit $k \in \mathbb{N}$.
Dans le cas où k est impair, l'énoncé donné est vrai car une implication dont la prémisse est fausse est déclarée vraie par définition d'une implication.
Dans le cas où k est pair, nous supposons alors qu'il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2z$ et nous cherchons à montrer que son successeur, $k+1$, est impair (i.e. $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $k+1 = 2n+1$). Il suffit de prendre $n = z \in \mathbb{N}$. Dès lors, $2n+1 = 2z+1 = k+1$.

Nos réponses sous-entendent une quantification universelle implicite des énoncés proposés. Nous avons en réalité donné les valeurs de vérité des énoncés suivants :

a) $\forall k \in \mathbb{N}, \big(k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ pair}\big)$

b) $\forall k \in \mathbb{N}, \big(k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ impair}\big)$

Deloustal-Jorrand [3, p. 59] soutient qu'une seconde réponse est possible. Celle-ci met en avant un autre point de vue : on considère k comme un élément générique fixé que l'on ne connaît pas et on statue sur la vérité ou la fausseté de la phrase en fonction de cet élément générique.

Considèrons $k \in \mathbb{N}$, un élément générique fixé que l'on ne connaît pas.

a) k étant fixé (sans être connu), la phrase "*k pair* $\Rightarrow$ *$k+1$ pair*" n'est plus une phrase ouverte dans laquelle k est une variable libre. Il s'agit par exemple d'une instance de l'implication ouverte *x pair* $\Rightarrow$ *$x+1$ pair*, où on a assigné la valeur k à la variable x. Cette instance admet une valeur de vérité : selon la parité de k, elle peut être vraie ou fausse. En effet,
   - si k est pair, l'instance "*k pair* $\Rightarrow$ *$k+1$ pair*" est fausse puisque sa conclusion ne peut être vérifiée quand sa prémisse l'est.
     Exemple : si $k = 2$, l'instance 2 *pair* $\Rightarrow$ 3 *pair* associée est fausse.
   - k est impair, l'instance "*k pair* $\Rightarrow$ *$k+1$ pair*" est vraie. En effet, par définition d'implication matérielle, cette instance est déclarée vraie puisque sa prémisse est fausse et que sa conclusion est vraie.
     Exemple : si $k = 3$, l'instance (3 pair $\Rightarrow$ 4 pair) est vraie.

Dès lors, on ne peut donner de valeur de vérité à l'énoncé *k pair* $\Rightarrow$ *$k+1$ pair*, sans connaître la parité de k. Selon la parité de k, il existe des instances vraies et d'autres fausses. Ceci conduit à dire "*on ne peut pas savoir*" à propos de la vérité de cet énoncé. Celui-ci est dit contingent pour l'élève. Deloustal-Jorrand qualifie "*k pair* $\Rightarrow$ *$k+1$ pair*", d'implication entre énoncés contingents [2]. Durand-Guerrier[6] définit la contingence d'un énoncé de la manière suivante : « *Un énoncé est contingent pour un sujet donné à un instant donné t si le sujet n'a pas, à l'instant t, les moyens de savoir si cet énoncé est vrai ou faux* » (p. 70).

Regardons maintenant l'énoncé b), à savoir "*k pair* $\Rightarrow$ *$k+1$ impair*". La variable k est toujours considérée comme un naturel générique fixé non connu.

b) k étant fixé (sans être connu), examinons l'instance *k pair* $\Rightarrow$ *$k+1$ impair*. Celle-ci est toujours vraie quelque soit la parité de k. De là, toute instance de la phrase ouverte *x pair* $\Rightarrow$ *$x+1$ impair* est vraie.
   Donc, la clôture universelle de cette phrase, $\forall k, \big(k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ impair}\big)$, est vraie.

Selon Deloustal-Jorrand, ces deux réponses peuvent être considérées comme correctes, suivant le point de vue que l'on adopte, c'est à dire suivant que l'on considère que ce sont des phrases implicitement universellement quantifiées ou que ce sont des instances avec des éléments génériques. Le problème est qu'un enseignant ne peut pas déclarer faux une implication entre énoncés contingents, imposer cette réponse à ces élèves et sanctionner

---

2. Une *implication entre énoncés contingents* est une autre appellation pour exprimer une implication ouverte $P(x) \Rightarrow Q(x)$. Cette expression est utilisée pour bien faire ressortir la notion de contingence.

une réponse du type "*on ne peut pas savoir*" sous prétexte qu'il interprète l'énoncé comme implicitement universellement quantifié. Les élèves ne partagent pas nécessairement cette pratique et dès lors, ils ne comprennent pas pourquoi leur réponse "*on ne peut pas savoir*" est déclarée mauvaise.

Durand-Guerrier[6] met en avant la nécessité de redonner une place aux énoncés contingents dans la classe : ≪ *La position [...] qui consiste à considérer qu'il n'existe qu'une seule catégorie d'énoncés conditionnels dans la classe de mathématiques, et que pour tout énoncé mathématique on peut trancher de manière radicale entre le vrai et le faux peut, et selon moi doit, être abandonnée au profit d'une position [...] consistant à laisser vivre dans la classe, sous certaines conditions, des énoncés contingents* ≫ (p. 78). Nous nous sommes notamment interrogé sur quelles pouvaient être de telles conditions ? Nous avons eu la chance de rencontrer V. Durand-Guerrier en janvier 2010, lors d'un séminaire organisé par le C.R.E.M. [3] à Nivelles. Celle-ci nous a donné son point de vue sur la question. De cette rencontre, nous retenons que sous ces conditions, le but n'est pas de consacrer un cours en particulier sur la notion d'énoncé contingent. Le but principal est de laisser vivre en classe des énoncés qui ne sont pas toujours vrais ou pas toujours faux. Des énoncés contingents admettent des instances vraies et d'autres fausses. On peut conclure que la clôture existentielle de la phrase ouverte (dont découle les instances) est vraie (puisqu'il existe des instances vraies), mais on ne peut pas conclure à la vérité de la clôture universelle de cette phrase (puisqu'il existe des instances fausses). La particularité des énoncés contingents est donc de laisser vivre en classe des énoncés qui ne sont pas toujours vrais.

Durand-Guerrier[6, p. 72] avance les idées suivantes à propos de cette pratique de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels : ≪ *Si l'on omet systématiquement la quantification universelle en formalisant tous les énoncés conditionnels sous la forme "si P alors Q" [...] on assiste [...] à un écrasement entre [...] deux types d'implication* ≫ : implication matérielle et implication formelle. ≪ *L'écriture "si P alors Q" renvoie à l'implication matérielle entre propositions, alors que la notion de contre-exemple renvoie à l'implication formelle* ≫. Dans cet écrasement entre ces deux types d'implications, ≪ *la disparition de la quantification universelle entraîne dans son sillage la disparition de la variable, et par voie de conséquence, de l'énoncé conditionnel ouvert associé à l'implication formelle* ≫. On confond alors l'implication ouverte $P(x) \Rightarrow Q(x)$ avec l'implication universellement quantifiée correspondante $\forall x, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$.

3. C.R.E.M. est l'abréviation de Centre de Recherche sur l'Enseignement (belge) des Mathématiques.

2.4 L'implication mathématique

Nous avons déjà parlé de l'implication mathématique en listant et détaillant précédemment trois types d'implication utilisés en mathématiques : l'implication matérielle, l'implication ouverte et l'implication formelle. Dans cette partie, nous allons étudier la notion mathématique d'implication de manière générale et présenter les différents cadres de travail associé à cette notion.

Dans sa thèse[4], Deloustal-Jorrand réalise une étude épistémologique et didactique de l'implication mathématique. Elle distingue trois cadres de travail pour l'implication. La notion de cadre a été introduite par Douady[5] : « *Nous dirons qu'un concept est un outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par objet, nous entendons l'objet culturel savant ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir à un moment donné, reconnu socialement* » (p. 9-10). Ajoutons que la dimension outil est associée à une disponibilité fonctionnelle de la notion qui amène une contextualisation, tandis que la dimension objet donne à la notion une place plus générale, indépendante de tout contexte. La dimension d'objet amène donc l'idée de décontextualisation d'un concept mathématique. La notion de dérivée d'une fonction peut par exemple être travaillée dans sa dimension objet lorsqu'on la définit en termes de limite d'un taux d'accroissement. Elle apparaît comme un outil de résolution dans des problèmes par exemple liés à la croissance d'une fonction.
Un cadre est « *un domaine de travail mathématique dans lequel fonctionne une notion donnée, ce domaine n'étant pas le seul domaine d'intervention de la notion, en général. Un cadre se caractérise par certains fondements (admis, implicites ou non), un certain nombre d'objets, des théorèmes et un corps de problèmes* » (Robert, [14, p. 55]). Douady[5, p. 10] précise « *qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations* ». Le cadre de l'analyse ou le cadre algébrique sont des exemples de cadres de travail mathématique.

La notion mathématique d'implication peut évoluer dans trois cadres, selon Deloustal-Jorrand :
– le cadre de la logique formelle ;
– le cadre ensembliste ;
– le cadre du raisonnement déductif.

Elle[4, p. 25] estime que le troisième cadre n'a pas le même statut que les deux premiers. Les deux premiers cadres font en effet référence à des théories mathématiques qui sont respectivement la logique formelle et la théorie des ensembles. L'objet implication y est défini. Par contre, dans le troisième cadre, elle précise qu'il ne s'agit pas d'y définir l'objet implication mais bien d'utiliser l'implication comme un outil dans un raisonnement mathématique. Ce point de vue est couramment utilisé dans la pratique mathématique et omniprésent dans l'enseignement des mathématiques. Deloustal-Jorrand estime d'ailleurs que ce point de vue fait souvent office d'unique définition dans l'enseignement secondaire [4] ou encore que le cadre du raisonnement déductif est le seul abordé dans cet enseignement.

2.4.1 Le cadre de la logique formelle

Le cadre de la logique formelle définit la notion d'implication à partir de sa table de vérité ou des connecteurs logiques. L'implication matérielle $A \Rightarrow B$ est fausse uniquement dans le cas où la proposition A est vraie et la proposition B est fausse. Elle est vraie dans tous les autres cas. La table de vérité de ce connecteur est la suivante :

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

On peut aussi définir l'implication à partir des connecteurs logiques $(\neg, \wedge, \vee)$: $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. Pour prouver l'équivalence de ces deux expressions logiques, il suffit de dresser les tables de vérité de celles-ci et vérifier qu'elles sont identiques.

La table de vérité de l'implication matérielle dressée ci-dessus permet de statuer sur la vérité d'énoncés conditionnels de la forme $A \Rightarrow B$ où A et B sont des propositions. Par contre, comme le souligne Deloustal-Jorrand[4, p. 34], elle ne permet pas de décider de la vérité d'une implication ouverte $P(x) \Rightarrow Q(x)$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des prédicats. Rappelons que cette implication est une phrase ouverte et qu'elle n'est pas une proposition. Elle n'admet par conséquent pas de valeur de vérité. On peut par exemple penser aux énoncés ouverts *si x est un nombre pair alors $x+1$ est un nombre premier* ou *si x est un carré alors x est un rectangle* qui n'admettent pas de valeur de vérité. Cependant, en instanciant l'implication ouverte $P(x) \Rightarrow Q(x)$ avec

4. En france.

un certain élément a, nous obtenons l'implication $P(a) \Rightarrow Q(a)$. Nous faisons ainsi de cette implication ouverte une implication matérielle qui elle, admet une valeur de vérité.

Nous pouvons aussi travailler dans ce cadre de travail avec des quantificateurs. Reprenons l'implication ouverte $P(x) \Rightarrow Q(x)$. Elle n'admet pas de valeur de vérité. Par contre, elle en admettra une si nous considérons sa clôture existentielle ou sa clôture universelle.

La clôture existentielle de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ notée $\exists x \in U, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ sera vraie s'il existe un élément a de l'univers U qui rend vraie l'implication matérielle obtenue en remplaçant x par a. Par exemple, l'énoncé $\exists x \in U$ tel que *si x est un nombre pair alors $x+1$ est un nombre premier* est vraie car en assignant par exemple 2 à x, nous rendons vrai l'implication matérielle associée. De même, puisqu'un carré est un rectangle, la clôture existentielle associée à l'implication ouverte *si x est un carré alors x est un rectangle* est vraie.

La clôture existentielle de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ sera fausse si tous les objets de l'univers U rendent faux les instances associées, c'est-à-dire si chaque objet de U vérifient la prémisse mais pas la conclusion de l'instance qui lui est associée.

La clôture universelle de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ notée $\forall x \in U, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ sera vraie si toutes les instances obtenues en remplaçant x par un élément de l'univers U sont vraies, c'est-à-dire si toutes les implications matérielles correspondantes sont vraies. Par exemple, l'énoncé $\forall x \in U$, *si x est un carré alors x est un rectangle* est vrai car d'une part toutes les instances vérifiant la prémisse vérifient aussi la conclusion (un carré peut être vu comme un rectangle particulier). Autrement dit, il n'existe pas de carré non rectangle. D'autre part, les instances dont la prémisse est fausse seront automatiquement déclarées vraies par définition de la table de vérité d'une implication matérielle. L'implication "*si x est un carré alors x est un rectangle*" est donc vraie pour tous les éléments de l'univers U. C'est le cas où l'implication formelle $\forall x \in U$, *si x est un carré alors x est un rectangle* est vraie.

Une implication universellement quantifiée sera fausse si elle admet un contre-exemple, c'est-à-dire s'il existe un élément a de l'univers U qui rend fausse l'instance associée, $P(a) \Rightarrow Q(a)$. Par exemple, l'énoncé $\forall x \in U$, *si x est un rectangle alors x est un carré* est faux puisque l'on peut dessiner un rectangle qui ne soit pas un carré.

La négation de l'implication dans ce cadre :

On peut établir la négation d'une implication matérielle en :

– dressant les tables de vérité de $\neg(A \Rightarrow B)$ et $A \wedge \neg B$ et en constatant

que celles-ci sont identiques ;
– niant l'expression $\neg A \vee B$ (puisque[5] $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$). En utilisant les lois de De Morgan, on obtient alors que :

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg(\neg A \vee B) \equiv \neg(\neg A) \wedge \neg B \equiv A \wedge \neg B$$

La négation d'une implication entre énoncés contingents :
Pour un élément x fixé, la négation de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $P(x) \wedge \neg Q(x)$

La négation d'une implication formelle, $\forall x \in U, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$:
Comme le précise Deloustal-Jorrand[4, pp. 35-36], la négation de cet énoncé ≪ *signifie que les implications entre énoncés contingents correspondantes ne sont pas toutes vraies. C'est-à-dire qu'il existe au moins un élément* ≫ x de l'univers de référence U tel que $P(x) \wedge \neg Q(x)$ soit vrai. Nier une implication formelle revient donc à trouver un élément x de U qui vérifie $P(x) \wedge \neg Q(x)$. De là, nous constatons bien qu'il suffit de trouver un seul contre-exemple pour qu'une implication formelle soit déclarée fausse. Selon Deloustal-Jorrand, ≪ *il y a donc une différence de statut entre l'affirmation d'une implication universellement quantifiée, qui signifie que toutes les implications entre énoncés contingents sont vraies, et la négation de cette même implication qui signifie seulement qu'au moins une des implications entre énoncés contingents est fausse.* ≫
Elle distingue notamment deux types de "faux" pour une implication formelle $\forall x \in U, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$. Celle-ci peut être :

– fausse parce qu'il existe un contre-exemple, c'est-à-dire $\exists x \in U, \big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$.
  L'énoncé $\forall x, \left(x > 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{x}\right)$ est faux puisqu'il admet le contre-exemple suivant : prenons $x = 2$, on a $2 > 0$ et $x = 2 > \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.
– fausse parce que l'implication entre énoncés contingents correspondante est fausse pour tous les éléments de l'ensemble de référence U, c'est-à-dire $\forall x \in U, \big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$.
  L'énoncé $\forall x \in U, \big(x \in U \Rightarrow x \notin U\big)$ est faux car puisque la variable x varie dans l'ensemble de référence U, toutes les instances de la phrase ouverte associée $(x \in U \Rightarrow x \notin U)$ sont fausses. En effet, pour chacune de ces instances, la prémisse est vérifiée mais la conclusion ne l'est jamais. Autrement dit, pour une valeur a appartenant à U, l'instance associée, $a \in U \Rightarrow a \notin U$, est fausse car la prémisse $a \in U$ est vrai et la conclusion $a \notin U$ est fausse.

5. Nous employons le symbole $\equiv$ pour représenter une équivalence logique entre deux propositions. $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ signifie donc que $A \Rightarrow B$ est équivalent à $\neg A \vee B$.

Selon Deloustal-Jorrand[4, p. 36], ≪ *le modèle mathématique ne permet pas de différencier ces deux types de faux, l'implication est déclarée fausse dans les deux cas.* ≫

Condition nécessaire, condition suffisante, équivalence :

Deloustal-Jorrand[4] définit les notions de condition suffisante et condition nécessaire comme telles :

> ≪ *Supposons que l'implication $A \Rightarrow B$ soit vraie.*
> *On dit alors que A est une condition suffisante pour B*
> *et que B est une condition nécessaire pour A* ≫ (p. 32 - 33).

Elle précise que ≪ *lorsque les deux implications $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont vraies. On dit que A (respectivement B) est une condition nécessaire et suffisante pour B (respectivement A). On peut dire aussi que A et B sont équivalentes et l'on note $A \Leftrightarrow B$* ≫ (p. 33).

Remarquons que Durand-Guerrier [1999] défend l'idée que cette définition de condition suffisante (respectivement nécessaire) ne prend du sens uniquement que dans le cas où l'implication est universellement quantifiée. Elle définit : ≪ *Définition : Étant donné deux propriétés P et Q s'appliquant aux mêmes objets d'un ensemble donné, on dira que P est une condition suffisante pour Q et que Q est une condition nécessaire pour P lorsque tout objet possédant la propriété P possède également la propriété Q, autrement dit, si la proposition*

$$\forall x, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \text{ est vraie}$$

Condition nécessaire : Si la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que la proposition Q est une condition nécessaire pour que la proposition P soit vraie.[...]
Condition suffisante : Si la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que la proposition P est une condition suffisante pour que la proposition Q soit vraie ≫ (p. 167).

Elle reprend les exemples donnés par le dictionnaire des mathématiques et justifie ainsi sa définition :

– Une condition nécessaire pour qu'un entier différent de 2 soit premier est qu'il soit impair. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{N}\backslash\{2\}, \big(x \text{ premier} \Rightarrow x \text{ impair}\big)$$

Mais ce n'est pas une condition suffisante. En effet, l'implication universellement quantifiée :

$$\forall x \in \mathbb{N}\backslash\{2\}, \big(x \text{ impair} \Rightarrow x \text{ premier}\big)$$

est fausse car il existe un contre-exemple. Prenons $x = 9$, 9 est impair et 9 n'est pas premier.

– Une condition suffisante pour qu'un nombre soit divisible par 5 est que l'écriture en base 10 de ce nombre se termine par un zéro. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \big(\text{écriture de } x \text{ en base 10 se finit par } 0 \Rightarrow x \text{ divisible par } 5\big)$$

Mais ce n'est pas une condition nécessaire. En effet, l'implication universellement quantifiée :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \big(x \text{ divisible par } 5 \Rightarrow \text{écriture de } x \text{ en base 10 se finit par } 0\big)$$

est fausse car il existe un contre-exemple. Prenons $x = 15$, 15 est divisible par 5 et l'écriture en base 10 de 15 ne se finit pas par 0.

2.4.2 Le cadre ensembliste

À une propriété, on peut associer l'ensemble des objets qui vérifient cette propriété. Par exemple, la propriété « *être un naturel pair* » est associée à l'ensemble $2\mathbb{N}$. Réciproquement, un ensemble A définit une propriété qui s'énonce sous la forme « *appartenir à l'ensemble A* ». Par exemple, l'ensemble $2\mathbb{N}$ définit la propriété « *appartenir à l'ensemble* $2\mathbb{N}$ », c'est-à-dire la propriété « *être un naturel pair* ».

Deloustal-Jorrand [4, p. 37] appelle travail dans le cadre ensembliste, le fait de concevoir les propriétés comme des ensembles d'objets associé à la faculté de contrôler les ensembles dans lesquels on est.

Pour les notations, nous reprenons la convention suivante de Deloustal-Jorrand : une lettre majuscule A représente une propriété et une lettre majuscule en italique A représente l'ensemble A des objets qui vérifient la propriété A.

Elle précise que, pour travailler dans le cadre ensembliste, il faut se placer dans un ensemble de référence que nous noterons U. « *L'ensemble A correspondant à la propriété* A *dépend, le plus souvent, de cet ensemble de référence.* » Elle donne notamment l'exemple suivant : « *Considérons l'ensemble de référence des quadrilatères. La propriété "avoir 4 côtés de même longueur" correspond à l'ensemble des losanges. Tandis que si on considère l'ensemble de référence des rectangles, cette même propriété est assimilée à l'ensemble des carrés* » (p. 37).

Elle ajoute également qu'à un seul et même ensemble peut être associé plusieurs propriétés a priori différentes. Elle illustre cette constatation avec l'exemple suivant [4, p. 37] : « *Dans l'ensemble* [de référence] *des parallélogrammes, les propriétés "avoir 4 côtés de même longueur" et "avoir les diagonales perpendiculaires" sont équivalentes et représentent toutes les deux l'ensemble des losanges. De même dans les quadrilatères, les trois propriétés "avoir des côtés parallèles deux à deux"; "avoir deux côtés opposés parallèles et de même longueur" ou encore "avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu" correspondent à l'ensemble des parallélogrammes* » (p. 37).

Dans ce cadre de travail, Deloustal-Jorrand[4, p. 40] associe et met en relation des connecteurs logiques avec des outils de la théorie des ensembles :

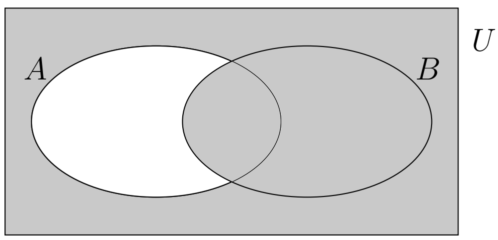
- le connecteur logique *négation* ($\neg$) est associé à l'outil ensembliste *complémentaire*;
- le connecteur *conjonction* ($\wedge$) est associé à *intersection*;
- et le connecteur *disjonction* ($\vee$) est associé à *union*.

Cette association établit un lien entre le cadre de la logique formelle et le cadre ensembliste.

Définition de l'implication dans le cadre ensembliste

Nous reprenons la définition proposée par Deloustal-Jorrand[4, p. 42] :

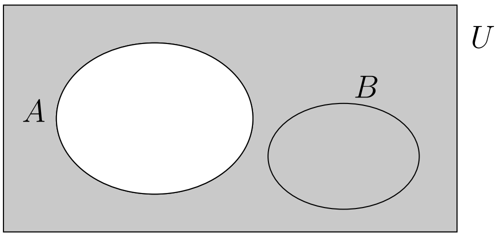
> Plaçons-nous dans un ensemble de référence U.
> Soit A le sous-ensemble de U dont les éléments vérifient la propriété A.
> Soit B le sous-ensemble de U dont les éléments vérifient la propriété B.
> ($\complement A \cup B$) est l'ensemble des éléments de U qui ne vérifient pas la propriété A à moins qu'ils ne vérifient la propriété B. C'est donc l'ensemble correspondant à la propriété (non A ou B).



La zone hachurée représente tous les objets x de U pour lesquels l'implication est vraie. Ce schéma est associé à l'implication entre énoncés contingents $\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$. L'implication est vérifiée pour tous les éléments qui ne sont pas dans A $\big($cas où la prémisse $\mathrm{A}(x)$ est fausse$\big)$, et aussi par ceux qui appartiennent à B $\big($cas où la conclusion $\mathrm{B}(x)$ est vraie$\big)$. L'implication est fausse uniquement pour les éléments qui sont dans A sans être dans B $\big($cas où la prémisse A(x) est vraie et la conclusion B(x) est fausse$\big)$.

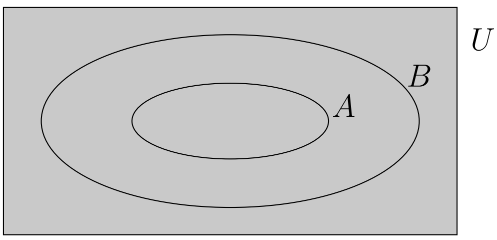
Nous avons regardé le cas où $A \cap B \neq \emptyset$. Nous pourrions traiter le cas où l'intersection est vide, i.e. $A \cap B = \emptyset$. Les éléments qui rendent l'implication A$(x) \Rightarrow$ B(x) vraie ou fausse sont les mêmes que ceux du cas $A \cap B \neq \emptyset$, à savoir :

– l'implication est vérifiée pour tous les éléments qui ne sont pas dans A sauf s'ils appartiennent en même temps à B. Comme $A \cap B = \emptyset$, l'implication est vérifiée pour tous les éléments qui ne sont pas dans A.
– l'implication est fausse pour tous les éléments qui sont dans A sans être dans B. Ce sont donc tous les éléments de A puisque $A \cap B = \emptyset$.



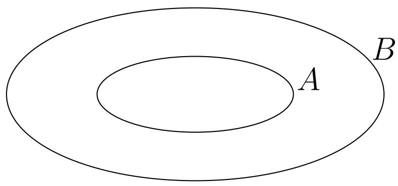
L'intérêt du cas où $A \cap B = \emptyset$ est donc limité par rapport au cas précédent. Il s'avère bien plus intéressant de s'attarder sur le cas où A est inclus à B comme nous le montrons ci-après.

<u>Cas particulier où l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B :</u>



Dans ce cas, l'implication entre énoncés contingents A$(x) \Rightarrow$ B(x) est vraie dans toute la partie hachurée. Elle est vérifiée par tous les éléments de U puisqu'il n'existe pas d'éléments de U appartenant à A sans appartenir à B. C'est le cas où l'implication entre énoncés contingents A$(x) \Rightarrow$ B(x) est vraie pour tous les éléments x de U, c'est-à-dire le cas où l'implication est universellement quantifiée. Le schéma représente donc l'implication vraie : $\forall x \in U$, $\big($A$(x) \Rightarrow$ B$(x)\big)$. L'inclusion d'un ensemble dans un autre peut donc être exprimée par une implication universellement quantifiée concernant les propriétés correspondantes.

Deloustal-Jorrand remarque que « *bien souvent, l'implication n'est représentée que par ce dernier schéma d'inclusion* ». Le quantificateur universel est souvent caché, on n'écrit que : $A \subset B$. Elle estime que « *la pratique scolaire cache encore davantage la quantification universelle de l'implication car le schéma proposé aux élèves ne représente pas toujours l'ensemble de référence* », comme le montre le schéma ci-dessous.



Or, comme elle le précise, « *une implication universellement quantifiée dépend bien de l'ensemble de référence. L'implication "avoir 1 angle droit implique avoir 4 angles droits" est vraie dans l'ensemble des parallélogrammes*[6]*, et est évidemment fausse dans l'ensemble des quadrilatères. Rendre implicite cet ensemble de référence contribue à cacher la quantification universelle en jeu* ».

Lorsqu'on veut faire le lien entre le concept d'implication et le concept d'inclusion de la théorie des ensembles, Deloustal-Jorrand soutient qu'il faut faire un choix épistémologique qui consiste à choisir entre :

- définir l'implication à partir du concept d'inclusion ;
- définir l'inclusion à partir du concept d'implication.

Nous reprenons ses définitions.

Définition de l'implication à partir du concept d'inclusion :

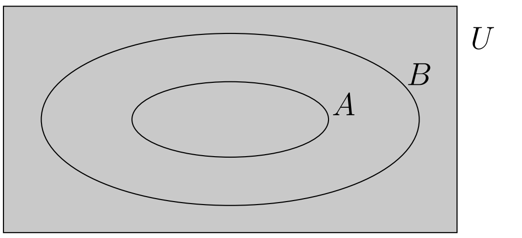
> Soit U un ensemble de référence.
> Soient A et B des sous-ensembles de U.
> Soient A et B les propriétés définies respectivement par les ensembles A et B.
> On dit que tous les éléments de l'ensemble de référence U vérifient l'implication A $\Rightarrow$ B si l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B.

6. À l'ensemble des parallélogrammes, on associe les propriétés suivantes :
- avoir des côtés opposés parallèles 2 à 2 ;
- avoir des côtés opposés parallèles et de même longueur ;
- avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu.

Définition de l'inclusion à partir du concept d'implication :

> Soit U un ensemble de référence.
> Soient A et B des propriétés sur l'ensemble de référence U.
> Soient A et B les ensembles définis respectivement par les propriétés A et B.
> On dit que A est inclus dans B si l'implication
>
> $$\forall x \in U, \big(x \in A \Rightarrow x \in B\big) \text{ est vraie}$$

Selon Deloustal-Jorrand, l'implication issue de la logique naturelle n'a pas besoin de la théorie des ensembles pour être définie. Réciproquement, l'inclusion est un concept qui peut être défini intuitivement, comme la notion d'ensemble ou d'appartenance et qui n'a pas besoin du concept d'implication pour être défini. Un choix épistémologique doit donc être fait. Elle émet l'hypoythèse que ce choix épistémologique n'est pas sans conséquences et définir l'implication à partir des ensembles favorise l'utilisation du cadre ensembliste, à condition de ne pas limiter la définition au schéma d'inclusion suivant :



Condition nécessaire, condition suffisante, équivalence : Deloustal-Jorrand[4, p. 44] redéfinit pour le cadre ensembliste les notions de condition suffisante et condition nécessaire. Nous reprenons ces définitions :

> Soit A (resp. B) l'ensemble dont les éléments vérifient la propriété A (resp. B).
> On dit que A est une *condition suffisante* pour B et B une *condition nécessaire* pour A lorsque A est inclus dans B.
> On dit que A (resp. B) est une *condition nécessaire et suffisante* pour B (resp. pour A), ou encore que A et B sont *équivalentes*, lorsque l'on a : $A \subset B$ et $B \subset A$, c'est-à-dire lorsque A et B sont associées au même ensemble ($A = B$).

Les définitions données pour condition nécessaire et pour condition suffisante dans ce cadre sont très proches de celles proposées par Durand-Guerrier et reproduites à la page 44 de ce document. En effet, ces définitions de Deloustal-Jorrand sont basées sur une inclusion d'ensembles, c'est-à-dire sur l'implication universellement quantifiée $\forall x, \big(\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)\big)$.

2.4.3 Le cadre du raisonnement déductif

Deloustal-Jorrand[4] définit le cadre du raisonnement déductif comme « *constitué par les objets liés au raisonnement déductif, les relations entre ces objets, leurs formulations et les images mentales associées à ces objets et ces relations* » (p. 47).

Comme nous l'avons déjà dit, ce cadre n'a pas le même statut que les deux autres. Dans celui-ci, la notion d'implication n'y est pas définie à partir d'une théorie mathématique, elle y est utilisée comme outil dans les raisonnements mathématiques. Cependant, Deloustal-Jorrand estime que ce cadre semble être le seul présent dans l'enseignement secondaire [7] et elle ajoute qu'il fait souvent office de seule définition pour l'implication ; alors que l'implication y est juste utilisée et non définie.

Deloustal-Jorrand distingue deux raisonnements déductifs pour ce cadre de travail de l'implication : un premier basé sur la règle du *Modus Ponens* et un second basé sur celle du *Modus Tollens*.

Examinons le raisonnement basé sur la règle du *Modus Ponens*. Celui-ci peut aussi être appelé raisonnement direct :

(1)	A est vrai	$A(a)$ est vrai
(2)	$A \Rightarrow B$ est vrai	$\forall x \in U, A(x) \Rightarrow B(x)$ est vrai
(3)	Donc B est vrai	Donc $B(a)$ est vrai
	où A et B sont des propositions	où A et B sont des prédicats

Nous avons listé ci-dessus le cas avec une implication matérielle $(A \Rightarrow B)$ vraie et le cas avec une implication formelle $\big(\forall x \in U, A(x) \Rightarrow B(x)\big)$ vraie. La structure du raisonnement basé sur cette règle correspond à un pas de déduction et comprend 3 parties :

(1) une prémisse : A est vrai ;

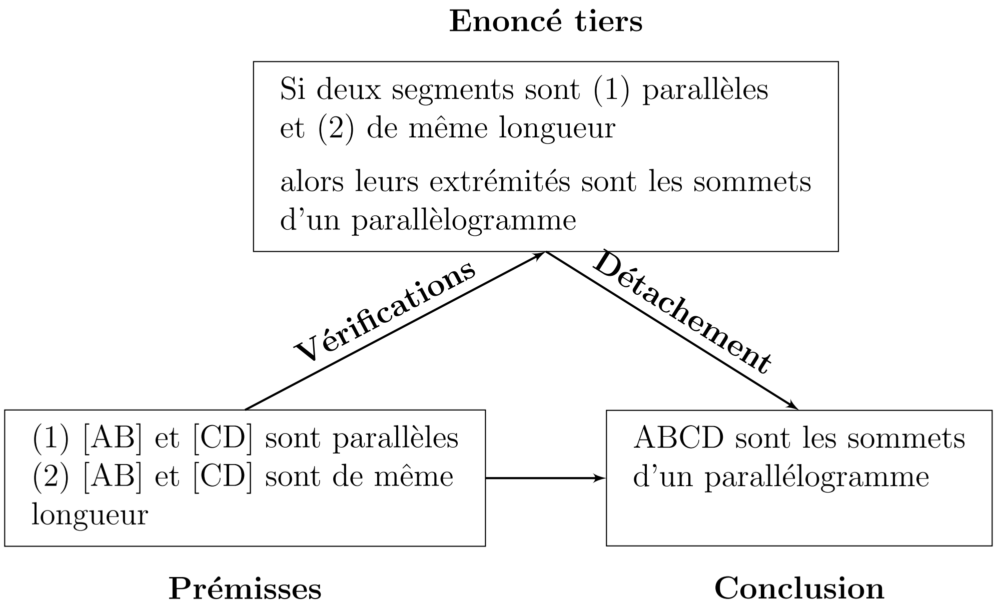
(2) un énoncé tiers : $A \Rightarrow B$ est vrai ;

(3) une conclusion : B est vrai.

On aboutit à la conclusion par la règle du détachement de Duval[10, p. 44]. À ce sujet, il précise que « *Un pas de déduction s'organise en fonction du* ***statut opératoire*** *des propositions qu'il comporte nécessairement : prémisses et énoncé tiers. Ce statut ne dépend pas du* ***contenu*** *des propositions, de ce qu'elles énoncent et signifient, mais du* ***statut théorique*** *qui leur est préalablement fixé : hypothèse, théorème, définition, etc. Les prémisses ne peuvent être que des hypothèses données au départ ou des conclusions obtenues dans un pas antérieur. Les énoncés tiers ne peuvent être pris que dans*

7. En France.

un corpus déterminé de définitions et de théorèmes déjà construit théoriquement ». Comme le signale Duval, un énoncé tiers doit être une proposition vraie comme une définition, un théorème, une proposition, … Pour illustrer cette règle du détachement, nous nous reprenons le schéma [10, p. 44] de Duval. Ce schéma illustre l'organisation ternaire d'un pas de déduction.



Il est accompagné de la légende suivante :
« *Les deux flèches allant des prémisses à l'énoncé tiers montrent qu'il faut autant de prémisses que de conditions requises par l'énoncé tiers. Chacune des deux flèches représente donc le résultat d'une vérification indépendante : il doit y avoir recouvrement entre les propositions données comme prémisses et les propositions mentionnées dans la CONDITION*[8] *de l'énoncé tiers. La flèche qui va de l'énoncé tiers à la conclusion montre que la conclusion résulte de la seule opération de détachement de la partie CONSEQUENCE*[9] *de l'énoncé tiers. La flèche directe des prémisses à la conclusion n'est qu'un raccourci dont souvent on se contente dans le discours. Parfois on concède à l'interlocuteur le rappel du nom de l'énoncé tiers !* »

8. En lettres majuscules dans la légende.
9. En lettres majuscules dans la légende.

Examinons maintenant le raisonnement basé la règle du *Modus Tollens*. Celui-ci peut aussi être appelé raisonnement par contraposition :

(1)	$A \Rightarrow B$ est vrai	$\forall x \in U, A(x) \Rightarrow B(x)$ est vrai
(2)	Or, non B est vrai	Or non $B(a)$ est vrai
(3)	Donc non A est vrai	Donc non $A(a)$ est vrai
	où A et B sont des propositions	où A et B sont des prédicats

Nous remarquons qu'ici aussi, la structure du raisonnement est ternaire et qu'on aboutit à la conclusion par la règle du détachement de Duval.

Prédominance du cas où la prémisse est vraie

Pour l'utilisation de l'implication dans le cadre déductif, le mathématicien s'intéresse essentiellement au cas où la prémisse est vraie. Le cas où la prémisse est fausse est peu voire pas traité du tout. Deloustal-Jorrand[4, pp. 50-51] relève à cela plusieurs raisons :

- Utiliser la règle du *Modus Ponens*, c'est partir du fait que la prémisse est vraie. Suite à cela, il n'y pas d'intérêt à regarder une prémisse fausse. On utilise ensuite l'implication réduite à « *si A est vrai alors B est vrai* ».Si la prémisse avait été fausse, on n'aurait rien pu déduire sur la vérité de la conclusion. En effet, $\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg A\Big) \not\Rightarrow B$ et $\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg A\Big) \not\Rightarrow \neg B$. Dès lors, connaître la vérité de l'implication dans ce cas-là est donc inutile.
- Pour montrer qu'une implication universellement quantifiée $\forall x \in U, \big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$ est vraie, on considère x un élément quelconque de U et on suppose que la prémisse $A(x)$ est vraie pour essayer d'établir que la conclusion $B(x)$ est vraie. En effet, dans le cas où la prémisse est fausse, on a directement que l'implication est vraie.
- Lorsqu'une implication $A \Rightarrow B$ est vraie, il est naturel de se demander si c'est une équivalence. Deux méthodes peuvent se présenter :

  1) soit montrer que la conclusion est fausse lorsque la prémisse est fausse, c'est-à-dire montrer que $\neg A \Rightarrow \neg B$, la contraposée de $B \Rightarrow A$;

  2) soit montrer que la réciproque de cette implication est vraie, c'est-à-dire $B \Rightarrow A$ est-elle vraie ?

  Selon Deloustal-Jorrand, la pratique mathématique privilégie la seconde méthode et évite ainsi le cas de la prémisse fausse.

Des propriétés-en-acte

Suite à cette prédominance du cas où la prémisse est vraie dans le cadre du raisonnement déductif et à l'utilisation quasi-exclusive de l'implication dans ce cadre, Deloustal-Jorrand émet l'hypothèse que ces conditions peuvent amener des propriétés-en-acte chez les élèves. Précisons ce qu'elle entend par *propriété-en-acte* chez les élèves : « *Une règle d'action (ou propriété-en-acte) est une règle (ou propriété) attribuée, par des élèves, à un concept mathématique* »[3, p. 38]. « *Elle peut être implicite ou explicite, l'élève ne pouvant pas forcément ni l'expliquer ni la justifier* »[4, p. 50]. Notons que celle-ci peut être vraie tout comme elle peut être fausse.

L'utilisation de l'implication sous les deux conditions ci-dessus peut amener chez les étudiants la propriété-en-acte suivante :

« *A implique B n'a pas d'intérêt lorsque A est fausse* ».

De là, peut découler la propriété-en-acte :

« *A implique B est fausse lorsque A est fausse* »,

qui est totalement fausse. Elle ajoute[4, p. 51] que ces deux « *propriétés-en-acte sont très proches de la logique naturelle et ne nuisent la plupart du temps pas à l'activité mathématique scolaire habituelle [...] elle sont donc très difficiles à déstabiliser.* »

Nous avons déjà précisé la présence d'un lien causal entre prémisse et conclusion dans la logique dite naturelle. Cependant, cette idée de lien causal associé à une implication peut aussi apparaître dans l'activité mathématique. Deloustal-Jorrand [3, p. 38] précise que dans cette activité, « *les implications sont utilisées pour démontrer un résultat. On enchaîne donc des propriétés vraies, grâce à des implications, pour aller des hypothèses vers la conclusion. Ces propriétés ont donc des relations entre elles visibles facilement, au moins lorsqu'elles ne sont pas trop "éloignées" dans le cours du raisonnement, c'est-à-dire lorsque le nombre de pas de démonstration les séparant est restreint.* » Elle fait l'hypothèse que cette utilisation de l'implication peut induire chez les élèves la propriété-en-acte suivante, qu'elle nomme « *propriété-en-acte de causalité*[4, p. 51] » :

« *A implique B n'a de raison d'être, et a fortiori ne peut être vraie, que lorsque A et B ont un lien de cause à effet entre elles.* ».

Cette propriété est elle aussi fausse en mathématiques, suite à la vérifonctionnalité. Deloustal-Jorrand[3, p. 38] ajoute qu'il ne faut pas considérer les liens de cause à effet au sens strict. Elle entend par cette propriété-en-acte que la prémisse et la conclusion doivent être reliées entre elles en ce sens qu'il doit exister un cheminement explicatif pour passer de l'une à l'autre. ≪ *La prémisse et la conclusion ne doivent pas être étrangères l'une à l'autre.* ≫ Cette propriété-en-acte de causalité peut amener des élèves à répondre que [4, p. 52] :

- ≪ *On ne peut pas parler d'implication entre deux propositions dès lors qu'il n'y a pas de lien de cause à effet visible entre elles (resp. dès lors qu'il n'y a pas de cheminement explicatif possible pour aller de l'une à l'autre).* ≫
- ≪ *L'implication, A implique B, est fausse puisque A n'est pas la cause de B (resp. puisqu'il n'y a pas de cheminement explicatif menant de A à B).* ≫

Malheureusement, cette propriété-en-acte est proche de la logique naturelle et est renforcée[3, p. 39] par des expressions langagières portant sur l'implication comme : ≪ *A implique B* ≫, ≪ *A entraîne B* ≫, ≪ *A donne B* ≫, ≪ *A donc B* ≫, ≪ *B résulte de A* ≫, ... qui sous-entendent l'existence d'un lien de cause à effet entre prémisse et conclusion.

Comme nous l'avons déjà signalé précédemment, cette idée de causalité dans une implication peut induire un ordre temporel dans cette même implication, entre la prémisse et la conclusion. En effet, comme le précise Deloustal-Jorrand[3, p. 39], dans la langage naturel comme ≪ *dans le monde physique, la cause précède la conséquence* ≫ ou l'effet. Elle formule[4, p. 52] alors la propriété suivante qu'elle nomme ≪ *propriété-en-acte de temporalité* ≫ :

≪ *Lorsque A implique B, A doit être vérifiée avant B (A se situe dans le temps avant B).* ≫

Avec cette conception temporelle, il n'est pas facile pour un élève d'admettre que :

A implique B (où A doit précéder B)
est équivalent à
(non B) implique (non A) (où non B doit précéder non A)

Un autre problème lié à cette propriété-en-acte de temporalité est que, lorsque A implique B est vraie, comment admettre que B est alors une condition nécessaire pour A, ce qui semble sous-entendre qu'elle doit être remplie avant A.

Ces travaux mettent en évidence des difficultés répertoriées chez les étudiants ainsi que la problématique des cadres de travail associés à la notion d'implication. Nous allons montrer au chapitre 3 comment ces travaux nous amènent à développer la problématique étudiée dans ce mémoire.

Chapitre 3

Élaboration de notre questionnement et méthodologie associée

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons notre questionnement sur l'implication. Nous montrons notamment comment, suite à nos chapitres 1 et 2, des questions ont émergé. La seconde partie est consacrée à la méthodologie que nous mettons en place pour aborder ces interrogations.

3.1 Notre questionnement sur l'implication

3.1.1 Émergence d'un questionnement

Notre point de départ dans le chapitre 1 a été de décrire l'enseignement de l'implication dans deux institutions : l'enseignement secondaire et l'université. Cette notion y apparaît à chaque fois mais pas de la même manière. Nous dressons du chapitre 1 le bilan suivant.

Au niveau du secondaire, nous avons analysé les programmes de différents réseaux de l'enseignement belge francophone. Cette analyse met en avant le fait que l'implication ne semble pas y être explicitement enseignée mais bien plus utilisée à la fois dans des démonstrations ou pour exprimer des résultats théoriques. Son apparition est toujours dépendante d'un contexte et elle vit dans diverses parties du cours de mathématiques comme l'algèbre et principalement la géométrie. Elle est d'ailleurs souvent contextualisée à ce dernier domaine mathématique. L'expression « *si... alors...* » apparaît dans cette analyse comme fortement liée au langage et à la logique dite naturelle, c'est-à-dire celle employée pour s'exprimer au quotidien. Dans cette institution, suite à cette analyse, nous identifions l'implication à un outil du langage. Dans la suite de ce chapitre, nous développerons cette identification en précisant ce que nous entendons par la dimension « *outil* » de cette notion. Nous nous servirons pour cela des apports théoriques de notre chapitre 2.

Pour l'enseignement de l'implication à l'université, nous nous sommes concentré sur l'étude qui est faite de ce connecteur dans le cours de Mathématiques élémentaires, dispensé à l'Université de Mons. Notre examen révèle que les étudiants de première bachelier suivant ce cours, reçoivent un enseignement explicite de cette notion, ils étudient spécifiquement cette expression « *si... alors...* ». Contrairement à l'enseignement secondaire, ce connecteur est étudié indépendamment de tout contexte. Le but de cette étude explicite est que celui-ci apparaisse comme une notion de base, comme faisant partie d'un bagage de pré-requis nécessaire pour la suite des études en mathématiques. Quand cette étape de décontextualisation est passée, ce connecteur est de nouveau contextualisé dans d'autres cours mais, cette fois, les étudiants ont la possibilité de donner davantage de sens à cette notion. Dans cette institution, de par cet enseignement explicite, l'implication apparaît comme un objet. Ici aussi, ce chapitre sera l'occasion pour nous de préciser ce que nous entendons par dimension « *objet* » de cette notion en nous servant des précisions théoriques de notre chapitre 2. Nous y reviendrons par la suite. Dans notre analyse du cours de Mathématiques élémentaires, nous relevons également que l'enseignement de cette notion est centré sur le symbolisme et sur l'apparition de questions nouvelles par rapport au secondaire : Quand une implication est-elle vraie ? Quand est-elle fausse ? Comment nie-t-on une implication ? Quelles sont les expressions logiques équivalentes à la formule « *si P alors Q* », où P et Q sont deux propositions ?

Ces questions ne semblent pas être abordées dans l'enseignement secondaire de par notre analyse des programmes. Dès lors, d'un point de vue général, nous nous interrogeons sur les conceptions que des élèves du secondaire pourraient avoir sur la notion d'implication pendant ou à la fin de leur parcours scolaire. Nous appliquons également ce questionnement général au niveau de l'enseignement à l'université : quelles sont les connaissances des étudiants universitaires face à cette notion ? Nous détaillerons dans la suite de ce chapitre ce premier questionnement et nous établirons les questions précises qui le constituent. Pour formuler celles-ci, nous utiliserons des éléments théoriques introduits dans notre chapitre 2.

La première description de l'enseignement de l'implication à deux niveaux d'études réalisée au chapitre 1 fait déjà apparaître une différence entre les connaissances des élèves de ces deux niveaux. Celle-ci est due au fait que l'implication n'y apparaît pas de la même manière : elle semble vivre respectivement comme un outil du langage dans l'enseignement secondaire et comme un objet à l'université. Cette différence, qui n'est probablement pas la seule, peut hypothétiquement conduire à une rupture entre les connaissances des étudiants de ces deux institutions. Cette rupture peut notamment laisser présager des difficultés à surmonter chez les élèves. Le but de notre travail est d'essayer de la caractériser.

En plus des conceptions des étudiants de deux institutions sur la notion d'implication, nous nous intéressons, au niveau de l'enseignement secondaire au rapport entre les professeurs et cette notion, et a fortiori sur la manière dont ils l'enseignent. Celle-ci est présente dans les programmes des différents réseaux de l'enseignement officiel via l'objectif suivant : ≪ *insister sur l'importance des expressions logiques telles que "si", "si et seulement si", "si... alors...", "donc", "d'où", ... et repérer si l'élève sait maîtriser ce vocabulaire, ces connecteurs logiques et le symbolisme nécessaires pour expliquer une propriété, rédiger une démonstration* ≫. Nous voulons savoir comment les enseignants prennent en compte cet objectif dans leur enseignement.

De ce chapitre 1, nous retenons donc deux grandes idées : d'une part celle d'interroger des enseignants du secondaire sur leur enseignement de la notion d'implication via l'objectif mentionné dans les programmes et d'autre part celle d'identifier les conceptions des élèves au niveau du secondaire et au niveau universitaire sur cette notion.

Des travaux antérieurs sur la notion d'implication présentés au chapitre 2, nous retenons trois apports majeurs à notre questionnement : le registre de la langue naturelle et son aspect associé à l'expression ≪ *si... alors ...* ≫, la dimension outil / objet d'un concept mathématique et les trois cadres de travail de l'implication. Reprécisons brièvement ces apports.

L'implication naturelle issue de la langue et de la logique naturelle est floue et reste tributaire du contexte. Elle peut être à l'origine d'une confusion possible entre une implication et sa réciproque ou entre une implication et une équivalence. Selon Deloustal-Jorrand, elle peut aussi être à l'origine de propriétés-en-acte pour les élèves comme celle de causalité ≪ *"A implique B" n'a de sens, et a fortiori ne peut être vraie que lorsque A et B ont un lien de cause à effet entre elles* ≫. Pour celle-ci, dans la formulation "*A implique B*", A est vue comme la cause de l'effet B. Il doit donc exister un lien pour passer de A à B. Si c'est le cas, l'expression est déclarée vraie. Une autre propriété-en-acte relevée est celle de temporalité ≪ *Dans l'expression "A implique B",* *A doit être vérifiée avant B, c'est-à-dire A se situe dans le temps avant B* ≫. Dans la logique naturelle, une implication "*si A alors B*" dont la prémisse A est fausse n'est pas nécessairement vraie. C'est la présence ou respectivement l'absence d'un lien de cause à effet entre A et B qui va faire que l'énoncé conditionnel est déclaré vrai ou respectivement faux. Cette implication où A est fausse peut aussi être déclarée comme n'ayant aucun sens parce que A n'est pas la cause de B. C'est de là que découle la propriété-en-acte de Deloustal-Jorrand disant que ≪ *"A implique B" n'a d'utilité (et/ou) de sens que lorsque A est vraie* ≫.

Les dimensions outil/objet d'une notion mathématique ont été introduites par Douady [5]. Nous retenons qu' ≪ *[...] un concept est un outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème* ≫, tandis que la dimension objet est relative à l'enseignement spécifique et à la définition de cette notion. Cette dimension objet confère ainsi à la notion une place dans le cours qui est générale et indépendante de tout contexte.

Deloustal-Jorrand a identifié l'existence de trois cadres de travail pour l'implication : le cadre de la logique formelle, le cadre ensembliste et celui du raisonnement déductif. Résumons brièvement ceux-ci. Dans le cadre logique, l'implication matérielle $P \Rightarrow Q$ est définie par sa table de vérité et aussi par la disjonction $\neg P \vee Q$. Le cadre ensembliste est défini par une des deux figures 3.1 ou 3.2.

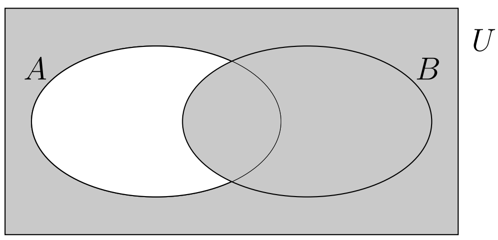


FIGURE 3.1 – Cas où l'implication entre énoncés contingents $\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ est fausse pour les éléments x qui sont dans A sans être dans B.

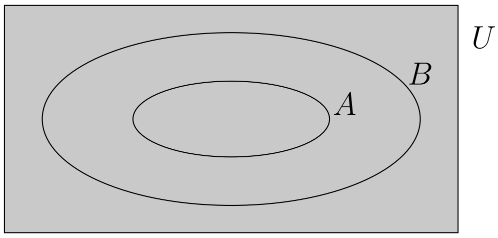


FIGURE 3.2 – Cas où l'implication entre énoncés contingents A(x) $\Rightarrow$ B(x) est vraie pour tous les éléments x de U.

Pour chaque diagramme, la zone hachurée représente tous les éléments x de U qui rendent vraie l'implication entre énoncés contingents A(x) $\Rightarrow$ B(x). Dans le cas particulier où l'ensemble A est inclus à l'ensemble B (figure 3.2), l'implication A(x) $\Rightarrow$ B(x) est vraie pour tous les éléments de U. C'est le cas où l'implication est universellement quantifiée, c'est-à-dire le cas où l'implication formelle $\forall x \in U, \big(\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)\big)$ est vraie. Les quantificateurs sont donc bien présents dans ce cadre. Le cadre du raisonnement déductif est quant à lui associé aux règles de raisonnement du *Modus Ponens* et du *Modus Tollens*.

Remarquons que les dimensions outil et objet du concept d'implication se retrouvent dans ces différents cadres. Rappelons pour cela que dans les deux premiers cadres, l'implication fait référence à des théories mathématiques qui sont respectivement la logique formelle et la théorie des ensembles. Dans ceux-ci, puisque l'implication y est définie explicitement, elle y apparaît dans sa dimension objet. Par contre, dans le troisième cadre, l'implication n'y est pas définie mais est bien plus utilisée comme outil dans un raisonnement mathématique. C'est par conséquent plus la dimension outil qui est mise en avant dans ce cadre que la dimension objet de cette notion. Paradoxalement, Deloustal-Jorrand [4, p. 25] estime que ce troisième cadre fait souvent office de seule définition de l'implication dans l'enseignement des mathématiques. L'implication apparaît alors comme un objet dans ce cadre alors qu'elle n'est en fait qu'outil dans celui-ci.

Ces apports théoriques issus de nos lectures s'inscrivent dans les deux grandes idées retenues du chapitre 1. Du point de vue des professeurs de l'enseignement secondaire, puisque nous voulons savoir comment l'objectif relatif à l'expression « *si... alors...* » est pris en compte par ceux-ci et a fortiori comment ils expliquent à leurs élèves cette expression, nous choisissons de nous centrer sur la double dimension outil/objet d'un concept mathématique et les cadres de travail associés à l'implication. Ces outils vont nous permettre d'identifier comment elle y est enseignée, utilisée et travaillée.

Nous utilisons également ces outils théoriques pour identifier les conceptions des élèves face à une implication. En effet, dans notre travail, nous désirons étudier les conceptions que des étudiants peuvent avoir sur cette notion à deux niveaux d'études : celui du secondaire et celui de l'université. Ces outils vont nous aider dans cette étude en nous permettant notamment d'identifier comment l'implication apparaît à ces deux niveaux, si c'est à la fois sous sa dimension outil et sa dimension objet et de constater les différents cadres de travail présents dans les connaissances des élèves. Nous pourrons également préciser quelles similitudes ou quelles différences pourraient exister entre les conceptions présentes dans ces deux institutions.

Au chapitre 1, le fait que l'implication semble vivre respectivement comme un outil du langage dans l'enseignement secondaire et comme un objet à l'université, laisse entendre l'existence de points de vues différents dans les connaissances associées à cette notion entre ces deux institutions. Une voie à explorer consiste à étudier l'évolution des connaissances sur cette notion dans la transition qui lie la fin du secondaire à la première année universitaire. Cette transition peut notamment s'accompagner de difficultés que les élèves vont devoir vaincre. Les travaux antérieurs sur l'implication présentés au chapitre 2 nous livrent quelques pistes sur ces possibles difficultés. Elles peuvent être liées au langage (ce qui fait donc référence au registre de la langue naturelle) ou à des pratiques enseignantes comme le phénomène de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels. Ce phénomène, mis en avant par Durand-Guerrier, consiste à interpréter tout énoncé conditionnel non quantifié comme étant universellement quantifié. Il en résulte que l'on confond alors l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ avec l'implication universellement quantifiée correspondante $\forall x, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$. Cette pratique peut être amenée dans la classe via le discours tenu par l'enseignant et ne pas être partagée et comprise des élèves.

Ces apports didactiques relatés au chapitre 2 combinés à notre toute première analyse sur l'implication dans deux institutions au chapitre 1, vont nous permettre de spécifier notre questionnement sur l'implication en l'inscrivant dans ces deux institutions. Pour annoncer le découpage de notre travail, nous choisissons de présenter les différentes questions de notre problématique en relation avec chaque type d'enseignement. Nous terminerons par une analyse globale des questions étudiées en montrant les interactions entre ces deux niveaux d'enseignement de manière à pouvoir étudier, au fil de ce document, les comparaisons possibles et les différences existantes entre ces deux niveaux. Nous commençons par exposer les questions que nous désirons étudier en secondaire.

3.1.2 Le point de vue de l'enseignement secondaire

Dans notre analyse des programmes réalisée au chapitre 1, nous avons relevé que cette expression « *si ... alors ...* » ne semble pas être explicitement enseignée, mais que celle-ci est bien plus utilisée, notamment pour faire des preuves ou pour exprimer des résultats théoriques. De plus, cette expression y apparaît très associée au langage naturel. Puisque dans les programmes tout l'intérêt semble se concentrer sur l'usage de l'implication, nous identifions cette expression à un outil du langage. Le mot « *outil* » fait référence à la dimension outil qu'un concept mathématique peut posséder selon Douady [5]. Suite au chapitre 2 et à la double dimension outil/objet qu'une notion mathématique peut posséder, nous nous intéressons précisément à la présence de cette double dimension pour la notion d'implication à ce niveau d'enseignement. Notre premier axe de questionnement porte donc sur cette double dimension. Nous formulons la question suivante :

1. L'implication est-elle travaillée dans cette institution à la fois dans sa dimension outil et dans sa dimension objet ?

L'apport théorique relatif aux différents cadres de travail de l'implication nous permet d'énoncer une question concernant un second axe. Ce dernier porte justement sur ces cadres de travail de l'implication. La seconde question de notre problématique sur l'implication est donc la suivante :

2. Quels sont les cadres de travail majoritairement mobilisés ?

Cette question apparaît comme générale mais, grâce à nos chapitres 1 et 2, nous pouvons spécifier davantage celle-ci à ce niveau d'enseignement. Puisque l'analyse des programmes nous apporte l'information que la logique des propositions n'est plus enseignée, nous pensons trouver peu de références au cadre de la logique. Nous détaillons alors une première fois notre question générale :

2.1 a) Qu'en est-il réellement de la présence du cadre logique de l'implication sur le terrain ?

b) Est-il sollicité dans le discours tenu en classe par des enseignants ?

c) Est-il présent dans les conceptions des élèves liées à cette notion ?

De nos lectures, nous avons noté le constat suivant de Deloustal-Jorrand [3] : « *les cadres ensemblistes et de la logique formelle sont absents de l'enseignement secondaire* » (p. 43) français. Nous voulons donc savoir si ce phénomène se vérifie en Belgique. Dès lors, nous complétons une deuxième fois notre question générale :

> 2.2 Comme pour son homologue français, le cadre ensembliste et celui de la logique formelle sont-ils tous les deux absents à ce niveau d'enseignement ?

Pour le cadre du raisonnement déductif, nous relevons le constat de Deloustal-Jorrand[3, p. 43] où le schéma déductif du *Modus Ponens* paraît être le plus utilisé dans l'enseignement du second degré en France, ce qui correspond aux trois dernières années de l'enseignement secondaire belge. Ici aussi, nous désirons savoir si cet aspect se retrouve dans notre pays. Nous détaillons une troisième et dernière fois notre question générale :

> 2.3 a) Le cadre du raisonnement déductif est-il limité à la seule utilisation de la règle du *Modus Ponens* ?
>
> b) Le raisonnement par contraposition est-il connu ?

Notre troisième axe de questionnement pour l'enseignement secondaire porte sur le registre de la langue naturelle. En effet, dans notre analyse des programmes, nous avons remarqué que l'implication est très associée au langage. Nous estimons que cette association est renforcée par le fait que l'expression « *si* ... *alors* ... » est employée dans le langage de tous les jours pour communiquer et qu'elle est donc fortement ancrée dans les esprits. Ce constat nous incite à nous interroger sur ce registre de la langue naturelle et sur son influence sur les conceptions des élèves sur l'implication :

> 3.1 Quelle signification les élèves donnent-ils à la notion d'implication à partir du langage naturel ? En particulier, quelles expressions équivalentes lui associent-ils ?
>
> 3.2 Dans quelles mesures des conceptions langagières à propos de l'expression « *si... alors...* » sont utilisées pour statuer sur la vérité d'un énoncé conditionnel ?

Une partie de notre questionnement est donc liée d'une part, à ce sens langagier si naturel de l'implication et d'autre part, à son sens mathématique. Suite à certaines habitudes langagières sur l'expression « *si... alors* ... », des élèves peuvent développer des conceptions liées au langage sur cette expression. Ces conceptions peuvent ensuite être éventuellement transposées aux mathématiques et être utilisées pour se prononcer sur la vérité d'un énoncé conditionnel. Notre question 3.2 va dans ce sens puisque nous voulons savoir si des conceptions langagières sont présentes chez des élèves du secondaire et auquel cas si elles sont utilisées pour répondre sur la vérité d'un énoncé conditionnel. Des travaux antérieurs sur l'implication présentés au chapitre 2 nous donnent des exemples de conceptions liées au langage qui peuvent être sources de difficultés pour les élèves. En particulier, Deloustal-Jorrand[4, pp. 108-109] a listé des propriétés-en-acte que des élèves pourraient posséder comme celle de causalité « *"A implique B" n'a de sens que si A et B ont un lien de cause à effet* », celle de temporalité « *Dans "A implique B", A doit être vérifiée avant B (A se situe dans le temps avant B)* » ou encore « *"A implique B" n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque A est vraie* ». La question qui nous vient naturellement à l'esprit est la suivante : ces exemples de conceptions se retrouvent-ils chez des élèves du secondaire ?

Dans ce registre de la langue naturelle, nous nous intéressons également au cas d'une implication dont la prémisse est fausse. Nous faisons l'hypothèse, basée sur celle de Deloustal-Jorrand[4, p. 21], que des élèves peuvent procéder au raisonnement suivant pour se prononcer sur la vérité d'un énoncé conditionnel dont la prémisse est fausse :

> Pour statuer sur la vérité d'une expression « *si ... alors ...* », on suppose que la prémisse est vraie même si on sait qu'elle est pertinemment fausse. On s'interroge ensuite sur la vérité de la conclusion en utilisant la propriété-en-acte de causalité : l'implication est vraie s'il existe un lien explicatif entre prémisse et conclusion, elle est fausse ou n'a pas de sens sinon.

Le quatrième et dernier axe de notre questionnement sur l'implication au niveau de l'enseignement secondaire peut être qualifié de "point de vue enseignant". Nous nous intéressons au rapport qu'entretiennent des enseignants de mathématiques avec ce connecteur et plus précisément sur l'étude et/ou l'usage qu'ils en font dans leurs cours. Nous nous posons les questions suivantes :

4. a) Quel enseignement ou quelle utilisation de l'implication donnent les professeurs du secondaire à leurs élèves ?
   b) En particulier comment prennent-ils en compte l'objectif[1] mentionnant l'expression « *si... alors...* » présent dans les programmes ?

Les outils didactiques que sont la double dimension outil/objet d'un concept mathématique et les trois cadres de travail de l'implication nous permettrons de caractériser ce point de vue des enseignants. À ces outils, nous associons les questions suivantes :

4.1 L'implication apparaît-elle dans le discours enseignant sous sa double dimension outil/objet ou bien est-elle réduite à la

1. Nous rappelons que l'objectif en question est : « *insister sur l'importance des expressions logiques telles que "si", "si et seulement si", "si... alors...", "donc", "d'où", ... et repérer si l'élève sait maîtriser ce vocabulaire, ces connecteurs logiques et le symbolisme nécessaires pour expliquer une propriété, rédiger une démonstration* ».

seule dimension outil comme le laisse penser notre analyse des programmes ?

4.2 Quels sont les cadres de travail majoritairement mobilisés par les enseignants ?

Ces deux dernières interrogations rejoignent respectivement les deux premières que nous avons formulées au début de la section 3.1.2, page 63.

3.1.3 Quelle transition pour la notion d'implication ?

Nous allons maintenant présenter notre questionnement sur l'implication en l'inscrivant dans le second niveau d'enseignement qui nous voulons étudier, à savoir, la première année d'études à l'université. Dans le chapitre 1, nous avons établi que l'implication apparaît à la fois dans les deux types d'enseignement analysés : en secondaire et à l'université. Mais cette apparition semble déjà se distinguer à la fin de ce premier chapitre. En effet, de notre analyse du cours de Mathématiques élémentaires suivi par les étudiants de première année de bachelier en sciences mathématiques, physiques et informatiques à l'Université de Mons, nous avons relevé que l'expression ≪ *si ... alors ...* ≫ y est explicitement étudiée et que cet enseignement est réalisé en dehors de tout contexte. La table de vérité de ≪ *si P alors Q* ≫, où P et Q sont deux propositions, y est notamment dressée. L'implication est donc enseignée à l'université et non plus simplement utilisée comme dans l'enseignement secondaire (ou du moins comme le laisse penser l'analyse des programmes du secondaire effectuée au chapitre 1). Si nous nous basons sur la double dimension outil/objet d'un concept mathématique introduite par Douady et présentée au chapitre 2, nous pouvons dire que de par son étude explicite, l'implication n'apparaît plus au niveau universitaire avec la seule dimension outil. Elle a ici acquis sa dimension d'objet. Ce nouvel acquis dans le statut de l'implication nous apparaît comme une différence dans l'enseignement et l'utilisation de cette notion qui en sont faits entre les deux institutions qui nous intéressent. Cette différence qui n'est probablement pas la seule, nous conduit à émettre l'hypothèse que :

> Il existe une rupture dans l'enseignement de l'implication entre ces deux institutions et celle-ci laisse présager des difficultés chez les étudiants à surmonter.

Face à cette hypothèse, nous nous interrogeons :

> Quelles sont les caractéristiques de cette rupture ? Provoque-t-elle des difficultés chez les étudiants ? Si oui, quelles sont-elles ?

À ce stade, nous avons soulevé nos interrogations pour le niveau de l'enseignement secondaire, nous allons maintenant en faire de même pour le niveau universitaire.

Notre premier axe de questionnement pour le point de vue universitaire porte sur la double dimension outil/objet de l'implication. Par notre analyse du cours de Mathématiques élémentaires, nous constatons que l'implication y est travaillée dans sa double dimension outil/objet. En effet, elle apparaît notamment comme un objet lorsque l'enseignant définit la table de vérité du connecteur propositionnel « *si* P *alors* Q », où P et Q sont deux propositions et elle est utilisée comme outil dans des figures de raisonnement comme le *Modus Ponens* ou le *Modus Tollens*. Nous exprimons alors la question suivante du point de vue des étudiants :

1. L'implication apparaît-elle dans les connaissances qu'en ont les étudiants sous sa double dimension outil/objet ?

Nous nous interrogeons également sur la présence des cadres de travail de l'implication à l'université. Ceci forme notre deuxième axe de questionnement pour cette institution. Mais avant de formuler notre question à ce sujet, nous nous intéressons à ceux qui sont mobilisés dans le cours de Mathématiques élémentaires. De notre analyse du cours réalisée au chapitre 1, nous constatons que l'implication y vit dans les trois cadres recensés par Deloustal-Jorrand : celui de la logique formelle, celui ensembliste et celui du raisonnement déductif. En effet, l'expression « *si* P *alors* Q » où P et Q sont deux propositions, y est définie, à partir de sa table de vérité. L'implication apparaît alors dans ce cadre de la logique, sous sa dimension objet. Dans le cours, l'enseignant établit d'une part l'équivalence entre cette expression et sa contraposée et d'autre part, entre cette expression et la formule $\neg P \vee Q$. Il utilise des quantificateurs et est amené à parler de la vérité d'énoncés conditionnels quantifiés universellement (renvoyant donc à la notion d'implication formelle) ou existentiellement. Pour le cadre ensembliste, nous avons relevé que l'enseignant établit explicitement un lien entre des objets de deux théories mathématiques : la logique des propositions et la théorie des ensembles. Il lie des connecteurs logiques à des opérateurs sur les ensembles. Pour le cadre du raisonnement déductif, l'analyse faite au chapitre 1, nous renseigne que les deux règles de raisonnement *Modus Ponens* et *Modus Tollens* sont présentes au niveau universitaire. Dans l'ensemble, les trois cadres de travail de l'implication sont donc mobilisés dans ce cours, même si le cadre de la logique formelle nous paraît plus sollicité que les deux autres.

Nous formulons maintenant notre question. Celle-ci ne porte pas comme au niveau de l'enseignement secondaire sur les cadres de travail présents dans ce cours mais bien plus sur les connaissances des étudiants et sur ce qu'ils ont retenu de cet enseignement :

2. Quels sont les cadres de travail majoritairement mobilisés dans les connaissances et les conceptions que des étudiants peuvent avoir sur l'implication ?

Suite à notre analyse du cours de Mathématiques élémentaires, nous précisons sur quelques points cette interrogation plus générale sur les cadres de travail. Par rapport au cadre de la logique formelle que nous estimons le plus sollicité dans ce cours, nous formulons la question suivante :

2.1 Quels sont les acquis des étudiants relatif à l'étude explicite de l'expression « *si P alors Q* », où P et Q sont deux propositions ?

Nous affinons également notre questionnement pour le cadre du raisonnement déductif. Puisque les deux règles de raisonnement *Modus Ponens* et *Modus Tollens* sont présentes au niveau universitaire, nous nous demandons :

2.2 Quels types de raisonnement à partir de l'implication sont disponibles chez les étudiants ?

Précisons ce que nous entendons par « *disponible* ». D'un point de vue didactique, face à un énoncé, on peut se questionner sur comment a priori un étudiant pourrait aborder celui-ci. Le didacticien peut réaliser une analyse a priori de cet énoncé en détectant dans un premier temps les connaissances anciennes et/ou nouvelles à mettre en fonctionnement pour le résoudre. Robert[14] identifie différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances à partir des adaptations que l'élève devra faire ou non de celles-ci. Elle recense notamment le niveau disponible qui nous intéresse ici. À ce sujet, elle précise : « *Le travail des élèves n'est en effet pas analogue selon qu'ils doivent rechercher les connaissances à utiliser (travail du pourquoi ou du quoi) ou mettre en fonctionnement (en l'adaptant) des connaissances indiquées (travail du comment). Si c'est à l'élève de reconnaître les connaissances à utiliser, on parle de niveau de mise en fonctionnement disponible.* [...] *D'autres tâches nécessitent des adaptations de connaissances qui sont en partie au moins indiquées : on parle de niveau de mise en fonctionnement mobilisable.* » (p. 49).

3.1.4 Analyse globale de notre questionnement

Dans cette section, nous allons réaliser une analyse globale des questions soulevées en montrant les interactions entre le point de vue enseignement secondaire et celui universitaire. De cette façon, nous pourrons ensuite étudier au fil de ce travail les comparaisons possibles et les différences existantes entre ces deux institutions.

L'hypothèse que nous avons formulée est qu'il existe une rupture dans l'enseignement de l'implication entre ces deux niveaux d'enseignement et que celle-ci laisse présager des difficultés que les élèves devront surmonter. Nous désirons vérifier si cette supposition est fondée et par la même caractériser cette rupture. Pour cela nous avons notamment des outils didactiques issus de travaux antérieurs et relatés au chapitre 2 : la double dimension outil/objet d'un concept mathématique et les trois cadres de travail de l'implication. Pour essayer de décrire les éléments de cette rupture, nous devons regarder comment ces apports didactiques s'inscrivent dans ces deux institutions. D'un point de vue global, notre premier questionnement pour ces deux niveaux d'enseignement porte sur la double dimension outil/objet de l'implication :

– L'implication est-elle travaillée à chacun de ces niveaux dans sa double dimension outil/objet ?
– L'implication apparaît-elle sous sa double dimension outil/objet dans les connaissances qu'en ont les étudiants ?

Des points différents peuvent déjà apparaître à ce niveau comme en témoigne le premier bilan tiré des chapitres 1 et 2 où l'implication est plus dans le secondaire un outil du langage pour faire des démonstrations et pour s'exprimer alors qu'elle est à l'université à la fois un objet du cadre de la logique formelle de par sa définition avec la table de vérité et un outil de par son utilisation dans des raisonnements déductifs comme la règle du *Modus Ponens* ou celle du *Modus Tollens*. Ce premier bilan n'est pas définitif, quand nous aurons obtenu des réponses aux questions que nous avons soulevées dans l'enseignement secondaire avec notre axe "point de vue enseignants", celles-ci remettront peut-être en question ce premier bilan.

Toujours d'un point de vue global, notre deuxième question porte sur les cadres de travail de l'implication et se résume à « *Quels sont dans chaque institution, les cadres de travail majoritairement mobilisés ?* ». Pour montrer les interactions entre les deux niveaux d'enseignement, nous devons donc étudier les connaissances que les élèves de chaque institution associent à chaque cadre. Et pour chacun de ces cadres, nous devons nous demander si les conceptions attachées sont les mêmes à ces deux niveaux et s'il existe des changements ou des invariants.

A priori, puisque la logique des propositions a quitté les programmes de l'enseignement secondaire, le cadre de cette logique devrait être absent dans cette institution. A contrario, il sera probablement très présent dans les conceptions sur l'implication d'étudiants universitaires. En effet, ce cadre nous paraît le plus mobilisé dans le cours de Mathématiques Élémentaires.

En ce qui concerne le cadre ensembliste, nous voulons savoir aux deux niveaux d'enseignement si les élèves établissent un lien entre une implication et une inclusion d'ensembles. En particulier, nous désirons nous concentrer sur les diagrammes de Venn représentés aux figures 3.3 et 3.4 et voir à quelle configuration les étudiants associent l'implication $\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ vraie pour tous les éléments de l'ensemble de référence U.

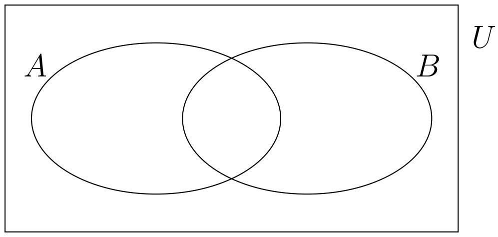


FIGURE 3.3 –

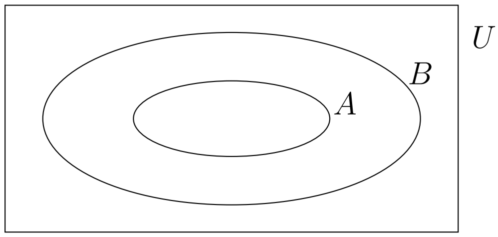


FIGURE 3.4 –

Quant au cadre du raisonnement déductif, nous nous interrogeons sur les types de raisonnement à partir de l'implication qui sont disponibles chez les étudiants. À l'université, le raisonnement direct et celui par contraposition sont tous les deux présents et nous pensons qu'ils sont tous les deux disponibles à ce niveau d'enseignement. Par contre, en secondaire, c'est la grande inconnue. A l'image d'un constat de Deloustal-Jorrand[3, p. 43] où le schéma déductif du *Modus Ponens* paraît être le plus utilisé dans l'enseignement du second degré en France, nous imaginons que la situation en Belgique pourrait être la suivante : c'est principalement le raisonnement direct qui est connu des élèves et celui par contraposition est peu présent et par conséquent pas disponible. Mais ceci n'est à ce stade que pure hypothèse !

Nous avons aussi des pistes pour expliquer des difficultés possibles que les élèves peuvent rencontrer avec une implication. Il s'agit peut-être de quelques difficultés que les étudiants doivent surmonter dans notre hypothèse sur l'existence d'une rupture dans l'enseignement de l'implication entre les institutions secondaire et universitaire. Ces difficultés nous sont apportées par des travaux antérieurs sur cette notion. Elles peuvent être notamment

liées au langage ou à des pratiques enseignantes comme la quantification universelle implicite des énoncés conditionnels. Nous commençons par celles provoquées par le langage.
Les difficultés liées au langage sont notamment associées à deux propriétés-en-acte que les élèves peuvent avoir ou non dans leurs connaissances d'une implication. Il s'agit de la propriété-en-acte de causalité et de celle de temporalité. Elles disent respectivement que « *"A implique B" n'a de sens que si A et B ont un lien de cause à effet* » et que « *Dans "A implique B", A doit être vérifiée avant B (A se situe dans le temps avant B)* ». Au niveau de l'enseignement secondaire, nous avons déjà soulevé les interrogations suivantes :

(1) Ces deux propriétés-en-acte sont-elles présentes chez des élèves ?

(2) Dans quelles mesures des conceptions langagières à propos de l'expression « *si... alors...* » sont utilisées pour statuer sur la vérité d'un énoncé conditionnel ?

Ces questions font écho à notre axe de questionnement au niveau de l'enseignement secondaire sur le registre de la langue naturelle. Nous n'avons pas jusqu'à présent développé cet axe au niveau de l'université. Or, comme nous voulons étudier la transition pour la notion d'implication entre la fin du secondaire et la première année à l'université, nous devons également prendre en compte dans ce second niveau le registre de la langue naturelle et les questions qu'ils soulèvent. À l'université, suite à l'enseignement explicite et décontextualisé de l'implication, nous pensons que celle-ci y apparaît contrairement à l'enseignement secondaire comme moins dépendante du langage naturel. Mais ceci n'est pour le moment qu'une pure hypothèse dans le sens où les étudiants universitaires peuvent eux aussi avoir des conceptions liées au langage même après cette étude explicite sur l'expression « *si... alors...* ». En particulier, les propriétés-en-acte de causalité et de temporalité peuvent éventuellement encore être présentes chez certains étudiants à l'université. Dès lors, nous décidons d'étudier également à l'université les questions (1) et (2) soulevées ci-dessus. Cela nous permettra de voir comment des conceptions langagières évoluent entre les deux niveaux d'enseignement considérés et si elles sont encore présentes à l'université. Dans ce dernier cas, nous aimerions identifier dans quelles mesures elles y sont présentes. Des résultats obtenus par Deloustal-Jorrand[3] sur une expérimentation réalisée auprès de quatre futurs enseignants peut laisser présager une tendance que nous constaterons peut-être à l'université : « *La conception causale* [i.e. la propriété-en-acte de causalité citée ci-dessus] *de l'implication est largement dominante dans les réponses des étudiants et la vérifonctionnalité de l'implication ne leur est pas connue : il n'y a pas d'implication entre deux faits qui*

n'ont "rien à voir" ≫ (p. 69).
Face à une implication dont la prémisse est fausse, nous pensons que pour donner une valeur de vérité à cette implication, les élèves du secondaire procèderont au raisonnement que nous avons relevé comme hypothèse à la page 65. A contrario, à l'université, nous estimons que ce raisonnement sera absent et que le cas d'une prémisse fausse rendant vraie une implication est connu des étudiants.

Des pratiques enseignantes peuvent elles-aussi être à l'origine de difficultés pour les élèves, notamment parce que celles-ci ne sont pas toujours comprises et partagées des étudiants. Le phénomène de quantification universelle implicite des énoncés en est un exemple. Jusqu'à présent, nous n'avons pas encore réellement parlé de celui-ci dans notre émergence d'un questionnement mais nous allons maintenant y remédier. Rappelons d'abord que cette pratique mise en avant par Durand-Guerrier consiste à interpréter tout énoncé conditionnel non quantifié comme étant universellement quantifié. On confond alors une implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ avec l'implication universellement quantifiée correspondante $\forall x, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$. Nous formulons pour ce phénomène une question générale que nous associons aux niveaux d'enseignement secondaire et universitaire :

> Les implications non quantifiées sont-elles interprétées majoritairement par les étudiants comme étant implicitement universellement quantifiée ?

En posant cette question à ces deux niveaux, nous espérons dégager si cette pratique est partagée ou non des étudiants de chacune de ces institutions.

Dans cette analyse globale des questions étudiées, nous avons montré des premières interactions entre les deux institutions. Notre expérimentation sur le terrain nous permettra dans la suite de notre travail de préciser des comparaisons possibles ou des différences à propos des conceptions des élèves de ces deux institutions. De plus, notre expérimentation fera peut-être apparaître de nouvelle conceptions, différences ou similitudes entre ces deux institutions sur l'implication.

Nous venons de présenter notre questionnement sur l'implication. Nous avons montré comment celui-ci a émergé de nos chapitres 1 et 2 et comment celui-ci s'inscrit à la fois dans les deux niveaux d'enseignement que nous étudions : la fin du secondaire et la première année à l'université. Notre questionnement établi, nous voulons maintenant tenter d'y apporter des réponses. La mise en place d'une méthodologie pour aborder ces questions fait l'objet de la seconde partie de ce chapitre.

3.2 Méthodologie mise en place pour répondre à notre questionnement

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons défini notre questionnement sur l'implication. L'hypothèse principale que nous avons formulée est qu'il existe une rupture dans l'enseignement de l'implication entre la fin des études en secondaire et la fin de la première année à l'université, et cette rupture laisse présager des difficultés que les élèves devront surmonter. Nous voulons savoir si cette hypothèse s'avère vérifiée et auquel cas nous désirons caractériser cette rupture. Nous avons déjà annoncé le découpage de notre travail en choisissant de présenter les différentes questions de notre problématique sur l'implication en relation avec chacun des deux niveaux d'enseignement. Ces niveaux sont respectivement celui du secondaire et celui de l'université. Pour chaque d'eux, nous avons notamment formulé un questionnement sur la double dimension outil/objet et sur les cadres de travail de l'implication. Notre démarche est donc maintenant de trouver des éléments de réponses à ces interrogations. Dans cette seconde partie du chapitre, nous allons expliquer d'un point de vue général la méthodologie que nous avons mise en place pour obtenir ces éléments de réponses.

Nous reprenons le découpage annoncé dans notre questionnement. Puisque ce dernier est précisé pour l'enseignement secondaire et pour l'université, nous voulons pouvoir formuler des réponses à nos interrogations dans chacune de ces institutions. Dès lors, nous menons des enquêtes "sur le terrain" à chacun de ces deux niveaux d'enseignement. Pour les mener, nous choisissons d'élaborer trois questionnaires en relation avec notre questionnement. Le premier est destiné aux enseignants du secondaire et vise à nous informer de l'enseignement et de l'utilisation qu'ils font en classe de l'implication. Les deux suivants sont adressés aux élèves et étudiants. Suivant notre découpage, nous interrogeons à la fois des élèves du secondaire et des étudiants de l'université. Le but de ces deux questionnaires "élèves" est de nous renseigner sur les connaissances et les conceptions que les étudiants associent à une implication. Nous avons ensuite diffusé ces formulaires auprès du public enseignants/élèves concerné. Nous présentons maintenant l'élaboration générale et la diffusion de ces divers documents.

Nous commençons par la présentation du questionnaire à destination des enseignants du secondaire.

3.2.1 Diffusion d'un questionnaire auprès des enseignants du secondaire

Dans notre questionnement, nous avons dédié au niveau de l'enseignement secondaire un axe sur l'implication d'un point de vue "enseignant" (cf. page 65). Via les questions soulevées dans cet axe, nous nous intéressons à l'enseignement et à l'utilisation que les enseignants donnent en classe sur cette notion. Plus particulièrement, nous voulons notamment savoir si l'implication apparaît sous sa double dimension outil/objet dans le discours tenu en classe par l'enseignant ou si elle est centrée uniquement sur la seule dimension outil comme le laisse penser notre analyse des programmes au chapitre 1. Nous décidons donc d'interroger des professeurs du secondaire à propos de leurs habitudes sur l'enseignement de cette notion. Pour cela, nous choisissons d'élaborer un questionnaire écrit à leur attention. Notre analyse des programmes au chapitre 1 montre qu'il n'y a pas a priori d'enseignement spécifique sur l'implication. Néanmoins, nous y remarquons que l'expression « *si... alors...* » fait partie des cours de mathématiques de par son utilisation pour exprimer des résultats ou pour faire des démonstrations. Nous trouvons sa trace dans les programmes sous des objectifs :

- Dans des objectifs généraux, il est stipulé que l'enseignant doit insister sur l'importance des expressions logiques telles que « *et* », « *ou* », « *car* », « *or* », « *donc* », « *d'où* », « *si* », « *si et seulement si* », « *si ... alors ...* », ...
- Sous l'axe de compétences « *expliciter les savoirs et les procédures* », on précise l'objectif où pour évaluer la façon dont l'élève explicite les savoirs et les procédures dans une matière précise, l'enseignant doit notamment repérer si l'élève sait maîtriser le vocabulaire, les connecteurs logiques (« *si ... alors...* », « *en effet* », « *donc* », « *et* », « *ou* », ...) et le symbolisme nécessaires pour expliquer une propriété, rédiger une démonstration.

Le point de départ pour la création de notre questionnaire "enseignant" vient justement de cette présence de l'expression « *si ... alors...* » dans des objectifs : nous désirons interroger les enseignants sur comment ils abordent ce point de programme dans leurs cours. Les réponses apportées nous permettront d'avoir une idée sur l'enseignement et l'utilisation de l'implication qui y sont faits en classe. Cette idée, contrairement aux programmes, sera selon nous, plus proche de la réalité du "terrain" et notamment du savoir transmis aux élèves puisqu'elle se base sur ce qui est dit et fait en classe. Les réponses des enseignants nous permettront peut-être d'identifier les cadres de travail de l'implication qu'ils mobilisent ou qu'ils mettent en avant dans leur discours face aux élèves. Nous pourrons peut-être aussi interpréter selon les réponses s'ils font vivre l'implication dans sa double dimension outil/objet.

Dans notre travail, nous nous intéressons pour le niveau secondaire, à l'enseignement de l'implication donné dans les dernières années d'études. Nous adressons donc notre questionnaire auprès des enseignants du degré supérieur [2] de cette institution. De par notre statut d'étudiant, nous ne disposons pas de beaucoup de contacts avec des professeurs de mathématiques en secondaire. Néanmoins, ce formulaire sera pour nous l'occasion de rencontrer de futurs collègues. Nous avons choisi dans un premier temps de diffuser notre questionnaire par voie électronique via quelques adresses e-mail dont nous disposons. Nous avons ensuite étendu notre diffusion via les contacts de tierces personnes ou encore auprès d'enseignants rencontrés sur le terrain ou lors de manifestations mathématiques.

Nous présentons notre formulaire, une analyse des différentes réponses obtenues et nos constats dans le chapitre suivant.

3.2.2 Diffusion de questionnaires auprès d'élèves du secondaire et d'étudiants universitaires

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons formulé notre questionnement sur l'implication en relation d'une part avec l'enseignement secondaire et d'autre part avec l'université. Afin d'obtenir pour chacune de ces institutions des éléments de réponse à notre questionnement, nous voulons interroger les étudiants de ces deux institutions. À cette fin, nous choisissons d'élaborer des questionnaires écrits. Pour obtenir ces éléments de réponse, nos questionnaires doivent s'inscrire dans les différents axes de notre questionnement. Dans ce dernier, nous avons d'ailleurs précisé ces axes pour chacun de ces niveaux d'enseignement. Cependant, nous décidons d'interroger les étudiants des deux institutions sur les mêmes questionnaires. La motivation de cette démarche est qu'elle permet de mieux étudier selon nous les connaissances des étudiants de ces deux institutions sur une implication. Face aux mêmes questions, nous pourrons mieux identifier les conceptions sur cette notion et les raisonnements que les élèves de chaque institution ont et mettent en oeuvre pour y répondre. En particulier, suite aux dépouillement des formulaires, nous mettrons en évidence des similitudes ou des différences

2. Le degré supérieur de l'enseignement secondaire est formé des $4^{\text{ième}}$, $5^{\text{ième}}$ et $6^{\text{ième}}$ années d'études.

frappantes apparaissant entre les réponses fournies par ces deux publics. Nous avons élaboré nos questionnaires à partir des différents axes de questionnement présentés à chacun des niveaux d'enseignement dans la première partie de ce chapitre. Ils sont donc basés sur la double dimension outil/objet de l'implication, les cadres de travail associés à cette notion et le registre de la langue naturelle. Présentons brièvement ces questionnaires. Nous en donnerons plus de détails au chapitre 5. Ils sont au nombre de deux et traitent aussi bien de l'implication en tant qu'objet mathématique (en référence à la dimension objet d'un concept mathématique) que de son utilisation en tant qu'outil (en référence maintenant à la dimension outil). Ils sont aussi basés sur les trois cadres de travail de l'implication recensés par Deloustal-Jorrand. Nous consacrons d'ailleurs l'entièreté d'un formulaire au cadre ensembliste de l'implication. Nous étudions également dans l'un de ceux-ci l'influence de la langue naturelle et donc du sens langagier dans les connaissances des élèves sur l'implication. En particulier, nous voulons voir si des conceptions issues d'habitudes langagières sont utilisées pour statuer sur la vérité d'un énoncé conditionnel. Nous avons également consacré une question au phénomène de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels.

Nous présentons en détails les questions de nos deux formulaires et nos réponses attendues des élèves et étudiants au chapitre 5.

Puisque notre travail se concentre sur l'enseignement de l'implication entre la fin des études en secondaire et la fin de la première année à l'université, nous avons diffusé nos deux questionnaires auprès des étudiants de ces deux niveaux. Pour l'enseignement secondaire, nous avons ciblé comme public pour notre expérimentation des élèves de 5$^{\text{ième}}$ ou 6$^{\text{ième}}$ année. Ce choix n'est pas anodin ! C'est précisément dans ces années que nous avons trouvé dans notre analyse des programmes, un grand nombre de traces liées à la notion d'implication. De plus, nous ciblons les élèves de ces années puisque ceux-ci ont a priori des connaissances et des conceptions sur l'implication qui se rapprochent le plus de celles de nouveaux étudiants entrant à l'université. Nous pensons notamment que ces élèves n'ont a priori pas encore reçu d'enseignement explicite et décontextualisé sur l'implication. Pour l'enseignement universitaire, nous avons interrogé les étudiants de l'Université de Mons inscrits en première année en bachelier en sciences mathématiques, physiques et informatiques. C'est d'ailleurs, ce public qui a reçu via le cours de Mathématiques Élémentaires un enseignement explicte et indépendant de tout contexte sur l'expression « *si... alors...* ».

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons donc établi notre questionnement sur l'implication en l'inscrivant dans deux institutions : l'enseignement secondaire et l'université. Nous avons notamment montré comment celui-ci a émergé de nos chapitres 1 et 2.

Dans la seconde partie, nous avons présenté la méthodologie que nous mettons en place pour répondre aux diverses questions soulevées. Celle-ci s'appuie sur l'élaboration et la diffusion de questionnaires : un premier adressé aux enseignants du secondaire pour obtenir une idée de l'enseignement et de l'utilisation qu'ils font en classe de l'implication et deux autres destinés aux étudiants des deux institutions pour avoir un aperçu des connaissances et des conceptions que ces derniers associent à une implication.

Chapitre 4

Le point de vue des enseignants du secondaire

Dans ce chapitre, nous présentons notre questionnaire à destination des enseignants du secondaire. Nous avons élaboré celui-ci pour obtenir des éléments de réponses à notre axe de questionnement sur l'implication développé au niveau de l'enseignement secondaire à la page 65 et qualifié de "point de vue enseignant". Nous choisissons de découper ce chapitre et notre expérimentation auprès des enseignants selon le schéma suivant. Nous décrivons d'abord les questions de notre formulaire, et expliquons brièvement la diffusion de celui-ci auprès du public concerné. Après dépouillement, nous analysons les diverses réponses reçues et nous les interprétons. Enfin, nous concluons par un petit bilan suite à la diffusion de ce questionnaire en vérifiant si celui-ci apporte des réponses à nos questions laissées en suspens dans notre axe de questionnement relatif aux enseignants de l'enseignement secondaire.

4.1 Présentation du questionnaire

Le questionnaire que nous avons élaboré et communiqué à des enseignants de l'enseignement secondaire est représenté dans l'encadré ci-dessous.

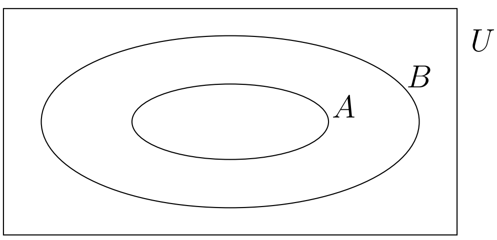
> Dans les programmes mathématiques des différents réseaux de l'enseignement officiel, on trouve l'objectif suivant : « *insister sur l'importance des expressions logiques telles que "si", "si et seulement si", "si... alors...", "donc", "d'où", ... et repérer si l'élève sait maîtriser ce vocabulaire, ces connecteurs logiques et le symbolisme nécessaires pour expliquer une propriété, rédiger une démonstration* ».
>
> 1) Comment abordez-vous ce point du programme dans vos cours ?
> 2) Plus particulièrement, comment enseignez-vous la notion d'implication en classe ?
> 3) Estimez-vous nécessaire de consacrer du temps à l'enseignement de cette notion ?
>   Oui / Non (Biffez la mention inutile) Veuillez expliquer votre choix.
>   Si oui,
>   a) Le faites-vous vraiment ?
>   b) Quels moments ou quelles parties de vos cours estimez-vous opportuns pour l'enseignement de cette notion ?
>
>   Si non, pourquoi ?

Comme nous l'avons précisé dans notre méthodologie (cf. page 74 du chapitre 3), ce questionnaire se base sur le fait que suite à notre analyse des programmes effectuée au chapitre 1, la notion d'implication n'est pas a priori enseignée à proprement parler dans l'enseignement secondaire, mais qu'elle est bien plus utilisée. Toutes ces apparitions sont contextualisées et elle ne vit qu'en étant manipulée pour s'exprimer notamment à travers des résultats et pour faire des démonstrations. Le but de cette enquête est de se renseigner auprès des enseignants sur l'enseignement et l'utilisation qui sont faits en classe d'une implication. Nous pensons notamment obtenir des renseignements sur les pratiques enseignantes face cette notion.

4.1.1 Analyse du questionnaire

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire dans notre présentation générale de ce questionnaire au chapitre 3, le point de départ pour l'élaboration de celui-ci vient de la présence de l'expression « *si... alors...* » dans des objectifs présents dans les programmes de l'enseignement secondaire. Notre première question vise justement à interroger les enseignants sur comment ils abordent ce point du programme dans leurs cours. Nous choisissons d'employer l'expression « *point du programme* » dans son sens général. De notre analyse des programmes, nous retenons que l'implication n'apparaît pas dans ceux-ci sous l'onglet « *matières* » à étudier. Cependant, nous la trouvons dans des objectifs sous l'expression langagière « *si... alors...* ». Puisque ces objectifs font parties des programmes, nous décidons de demander aux enseignants comment concrètement ils abordent ce « *point du programme* » en classe.

Des réponses apportées à notre seconde question, nous espérons pouvoir constater si l'implication apparaît ou non dans le discours enseignant avec la double dimension outil/objet. De notre analyse des programmes présentée au chapitre 1, nous retenons que cette notion vit a priori comme un outil et plus précisément comme un outil du langage pour s'exprimer dans des résultats ou des démonstrations. Nous nous demandons donc si cette tendance se reflète dans les classes et plus précisément dans le discours tenu par les enseignants. À l'image des programmes, nous nous attendons à voir apparaître dans les réponses, des références à une utilisation locale de l'implication. Nous entendons par là une utilisation de cette notion pour exprimer des énoncés théoriques ou pour faire des démonstrations et plus particulièrement une utilisation toujours contextualisée et localisée dans différentes parties du cours. De par l'absence de la logique des propositions dans les programmes, nous ne pensons pas a priori trouver de traces de l'enseignement ou de l'utilisation de cette logique via par exemple une définition de « *si P alors Q* » où P et Q sont deux propositions, avec sa table de vérité, ce qui par extension conduit à faire vivre l'implication en tant qu'objet dans l'enseignement qui en est donné. Quelques références à des règles de raisonnement comme celle du *Modus Ponens* ou celle du *Modus Tollens* peuvent également apparaître dans les réponses fournies par les enseignants. Quant à des allusions au cadre de travail ensembliste de l'implication, nous estimons que celles-ci seront très peu présentes dans les réponses des enseignants à l'exception peut-être d'un lien entre une implication et une inclusion d'ensembles, ce qui correspond au diagramme ensembliste suivant où l'implication entre énoncés contingents $\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ est vraie pour tous les éléments x de U.



La troisième question vise à étudier si les enseignants estiment nécessaire de consacrer du temps à l'enseignement de l'expression « *si... alors...* » ou s'ils jugent par exemple la compréhension de celle-ci comme un acquis des années antérieures. Nous nous sommes également interrogé sur les parties du cours qu'ils estiment opportuns pour tenir un discours sur l'implication.

4.2 Quelques mots sur la diffusion du questionnaire

Nous nous intéressons dans notre travail à l'enseignement qui est donné sur l'implication au niveau de l'enseignement secondaire et plus précisément auprès des dernières années d'études de cette institution. Nous adressons donc notre questionnaire à des enseignants du degré supérieur [1]. Nous avons choisi de diffuser dans un premier temps notre formulaire par voie électronique via quelques adresses e-mail dont nous disposions ou via celles de tierces personnes en contact avec des professeurs du secondaire. Nous avons ensuite étendu notre diffusion auprès de quelques enseignants rencontrés sur le terrain. Il ne nous a pas été facile d'obtenir des réponses positives des professeurs face à notre enquête sur l'implication. Peu d'entre eux ont répondu favorablement à notre demande formulée par e-mail. Néanmoins, grâce à quelques rencontres lors de visites dans des classes, nous avons pu recueillir 9 avis. Malgré ce petit nombre de réponses, nous pouvons mettre en avant quelques opinions et constats.

Signalons que parmi les 9 réponses reçues, 6 viennent d'enseignants du réseau de la Communauté française qui représente l'enseignement officiel [2] et 3 du réseau de la Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique qui est associé à l'enseignement libre [3]. Nous relevons que 3 professeurs interrogés ont plus de 25 ans d'expérience, 4 en ont plus de 20 et enfin 2 en ont plus de 15.

---

1. Le degré supérieur de l'enseignement secondaire est formé des 4$^{\text{ième}}$, 5$^{\text{ième}}$ et 6$^{\text{ième}}$ années d'études.
2. L'enseignement de la Communauté française est non confessionnel, organisé et financé par la Communauté française.
3. L'enseignement dispensé par cette fédération est confessionnel, organisé par un pouvoir organisateur (diocèses, congrégations religieuses, ...) et subventionné par la Communauté française.

4.3 Analyse des réponses des enseignants

Concentrons-nous tout d'abord sur la première question relative à la présence de l'expression « *si... alors...* » dans des objectifs des programmes de l'enseignement secondaire.

L'expression « *point du programme* » que nous employons pour formuler notre question, fait débat. Des professeurs (3 sur 9) précisent que justement ce n'en est pas un :

- « *Il ne s'agit pas d'un point du programme !*[4] *Ce n'est pas une matière à proprement parler !* », ce qui explique probablement pourquoi cette personne souligne le mot « *objectif* » employé dans l'introduction de notre question.
- « *Les notions évoquées ne figurent pas explicitement dans les programmes* ».
- « *Cette notion [d'implication] n'est plus spécifiquement au programme* ».

Ces remarques reflètent la disparition depuis quelques années dans les programmes de la logique des propositions et en particulier d'une étude explicite de l'expression logique « *si... alors...* » en dressant par exemple sa table de vérité.

À cette première question, trois enseignants répondent que le vocabulaire logique ("si", "si et seulement si", "si... alors...", "donc", "d'où", ...) est abordé de façon progressive en insistant sur un usage propice de celui-ci, notamment lors de la rédaction de la solution d'un exercice ou d'une démonstration. Néanmoins, l'un d'entre eux précise que ce n'est pas systématique, faute de temps. Voici quelques extraits de ces réponses :

- « *J'insiste sur le vocabulaire notamment dans la rédaction des réponses des élèves en les obligeant à rédiger avec des "mots de liaison"* ».
- « *En général, j'aborde ces notions de façon progressive et non systématique lors des démonstrations* ».

Plusieurs enseignants spécifient déjà, avec cette première question, différentes parties du cours où ils abordent les expressions logiques (dont l'implication) listées dans l'objectif repris dans l'introduction de notre question. L'un d'entre eux précise notamment qu' « *il s'agit de notions à inculquer aux élèves qui sont rencontrées à la fois dans les parties théoriques des différents points des programmes et aussi (surtout) lors de la résolution d'exercices* ». Nous reviendrons sur ces différents moments que les enseignants jugent opportuns pour parler de l'implication avec l'analyse des réponses apportées à notre question 3. De cette première question, nous pouvons déjà dire qu'une

4. Phrase soulignée par l'enseignant lui-même.

implication semble toujours contextualisée et qu'elle est utilisée comme outil à la fois dans des énoncés théoriques, des exercices ou des démonstrations. Nous retranscrirons par après quelques exemples donnés par les enseignants.

Intéressons-nous maintenant aux réponses apportées à notre seconde question via laquelle nous désirons savoir comment la notion d'implication est enseignée en classe. Nous distinguons deux types de réponses : certaines relatives à une utilisation de l'implication dans des exercices ou résultats et d'autres traitant de la définition d'une implication entre propositions.

Le premier type de réponses que nous avons identifié est basé sur divers exemples d'utilisation de l'implication que les enseignants font dans des exercices ou dans des résultats. Nous avons relevé ce premier type de réponses auprès de 5 professeurs sur 9. Nous listons ci-dessous quelques exemples :

– « *C'est au cas par cas que les notions ["si", "si et seulement si"] sont abordées. Par exemple, différencier "$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$" et "$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2$ ou $x = -2)$" se fait lors de la résolution d'exercices au cours de 4ième [année], lorsqu'on rencontre les équations du second degré en prenant la peine d'expliquer le contenu de ces phrases mathématiques et en faisant appel au sens logique des élèves.*[5] *Mais une telle notion [d'implication] se rencontre fréquemment et il faut y être très attentif : les erreurs qui y sont liées sont légions. Par exemple, lorsqu'on établit l'équation de l'ellipse : P est un point de l'ellipse ssi ... À un moment donné, il faut élever une expression algébrique au carré tout en conservant un "ssi"; on obtient quelque chose que je peux symboliser par "$x = 2$ ssi $x^2 = 4$" : l'implication dans un sens est évidente, mais dans l'autre sens nécessite de justifier qu'on travaille dans $\mathbb{R}^+$* ».
  L'implication est ici utilisée par l'enseignant comme outil pour s'exprimer principalement dans des équations algébriques.
– « *En 5ième année, 6 heures de mathématique par semaine, [...] en début d'année, je vois les propriétés des inégalités dans $\mathbb{R}$* ». L'enseignant

5. Le sens logique des élèves n'est pas nécessairement celui de la logique mathématique. Des études de Davy et al. [1] montrent que les élèves ont des difficultés pour distinguer quel "ou" est celui utilisé en mathématiques. Ces difficultés viennent de la confusion entre le langage courant et celui des mathématiques. Les auteurs précisent qu'il faut définir le "ou" mathématique par opposition au langage naturel. Le sens de ce "ou" ne peut pas venir de la logique des étudiants, il doit être enseigné. Dans un même ordre d'idée, nous pensons que l'implication est fortement basée en secondaire sur le langage naturel et que ce dernier a des influences sur la conception mathématique de cette notion ou du moins que des conceptions liées à l'implication issue du langage courant peuvent être utilisées pour répondre à une implication en mathématiques.

donne l'exemple suivant :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a \leqslant b \wedge c \leqslant d) \Rightarrow (a + c \leqslant b + d)$$

« *Les élèves doivent réfléchir si, dans les propriétés données, on a "⇒" ou "⇔", en justifiant. Ensuite, ils doivent utiliser correctement ces connecteurs logiques dès que l'occasion se présente. J'insiste moins [dans un cours] de 4 heures pas semaine, même si je l'explique [probablement aussi au moyen d'exemples]* ».
Remarquons ici que d'après la réponse de cet enseignant, les élèves sont sensibilisés à la différence entre une implication et une équivalence par l'intermédiaire des inégalités. Ces deux notions et leur différence de signification sont donc utilisées comme outil dans un contexte de travail précis. Elles ne sont pas enseignées indépendamment de tout contexte.

– Deux enseignants expliquent la notion d'implication via le lien existant entre la continuité et la dérivabilité d'une fonction. L'un d'eux précise que : « *Je leur parle aussi de réciproque d'une implication, surtout quand elle est fausse pour insister sur le fait qu'une implication n'est pas une équivalence* ». Il reprend ensuite l'exemple ci-dessus où « *une fonction dérivable est continue mais une fonction continue n'est pas forcément dérivable* ». Ici aussi, les notions d'implication, d'équivalence ou de réciproque d'une implication sont contextualisées et visiblement présentées aux élèves via leur présence dans des résultats théoriques.
– Quatre professeurs sur neuf interrogés insistent quand l'occasion se présente sur la différence existant entre les notions de condition nécessaire, de condition suffisante et de condition à la fois nécessaire et suffisante. L'un d'eux précisent qu'il donne notamment des exemples basés sur le langage pour distinguer la condition nécessaire de la condition suffisante, sans toutefois nous en donner explicitement un.

Ce premier type de réponses fait référence à une utilisation en classe de l'implication en tant qu'outil. Comme le laissait penser notre analyse des programmes effectuées au chapitre 1, l'implication est ici utilisée pour s'exprimer à la fois dans des exercices ou dans des résultats théoriques. C'est notamment cette dimension outil qui est mise en évidence lorsque les enseignants disent distinguer une implication d'une équivalence. Nous constatons qu'il n'y a pas d'étude explicite de ces deux connecteurs se faisant indépendamment de tout contexte.

Le second type de réponses que nous avons relevé fait référence à l'implication sous sa dimension objet. 4 enseignants sur 9 interrogés affirment par exemple que :

– « *En* $5^{ième}$ *année (niveau mathématiques fortes), dans le cours de complément mathématique, je réserve un chapitre "logique" dans lequel,*

je définis les signes logiques (avec tables de vérité, tautologies, contraposée, réciproque, etc ...) ».
- « *Je fais la théorie de la logique au cours de* $5^{ième}$ *[année en] renforcement mathématique (P.E.S.*[6]*)* ».
- « *J'ai la chance d'avoir une heure de mathématique en plus des 6 heures/semaine en* $6^{ième}$ *année et je consacre quand je le peux une partie des heures au cours de logique des propositions. Parfois après une visite au cours de Mathématiques élémentaires de* $1^{ière}$ *bachelier [donné à l'Université de Mons]* ».
- « *À l'occasion, [j'illustre] avec des propositions de la vie courante et [je] montre la table de vérité de l'implication* ».

Via ces réponses, nous remarquons que ces quatre enseignants donnent (quand le temps le permet pour deux personnes sur quatre) à leurs élèves un enseignement explicite et indépendant de tout contexte sur l'implication. À l'exception de notre dernier exemple où nous ne disposons pas de plus d'informations, cette étude explicite n'est faite qu'auprès des élèves de $5^{\text{ième}}$ ou $6^{\text{ième}}$ année inscrits dans une option offrant six heures de mathématiques par semaine. Cependant, cette étude ne semble pas être effectuée durant ces six heures de cours mais plutôt durant des heures de renforcement en mathématiques, c'est-à-dire durant une ou deux heures de cours qui s'ajoutent à ces six heures initiales. À travers ces quatre témoignages, l'implication y apparaît sous sa dimension objet. Celle-ci est en effet définie explicitement, notamment à partir de sa table de vérité. Contrairement à ce que laissait présager notre analyse des programmes au chapitre 1, la logique des propositions n'est pas totalement absente des salles de cours. Cependant, celle-ci ne semble apparaître que lors de séances supplémentaires souvent appelées "renforcement mathématique" visant à augmenter le nombre initial d'heures données par semaine. Signalons que lors de ces cours de renforcement, l'enseignant peut à sa guise privilégier l'enseignement d'une notion. En effet, ces heures de cours ne sont soumises à aucune contrainte du point de vue des programmes. Il n'y a d'ailleurs pas de programmes spécifiques pour ces heures. L'enseignant est donc libre de faire une étude explicite du « *si... alors...* » comme le font les quatre professeurs cités ci-dessus. Signalons qu'un cinquième professeur avait lui aussi l'habitude de dresser notamment la table de vérité de ce connecteur dans ses classes avec six heures de mathématiques par semaine mais que puisque son collègue (cité ci-dessus) le fait en renforcement mathématique, il préfère consacrer ce temps à d'autres concepts.

Ces quatre enseignants ne font pas vivre en classe l'implication uniquement sous sa dimension objet, la dimension outil apparaît également. Nous

6. P.E.S. sont les initiales d'un cours de préparation à l'enseignement supérieur.

relevons que deux enseignants réexpliquent la notion d'implication via le lien existant entre la continuité et la dérivabilité d'une fonction. L'un d'eux précise que : « *Je leur parle aussi de réciproque d'une implication, surtout quand elle est fausse pour insister sur le fait qu'une implication n'est pas une équivalence* ». Il reprend ensuite l'exemple ci-dessus où « *une fonction dérivable est continue mais une fonction continue n'est pas forcément dérivable* ». Les notions d'implication, d'équivalence ou de réciproque d'une implication sont ici contextualisées et visiblement de nouveau présentées aux élèves via leur présence dans des résultats théoriques.

Nous nous concentrons maintenant sur notre troisième question. Huit enseignants interrogés sur neuf estiment qu'il est nécessaire de consacrer du temps en classe à l'enseignement de l'implication. Nous listons ci-dessous quelques exemples de justifications apportées à cette nécessité (sauf mention contraire, chacune d'elles ont été citée une fois). Remarquons que plusieurs justifications différentes peuvent apparaître dans une même réponse. Nous relevons des justifications :

– relatives à l'activité de démonstration : « *pour habituer les élèves à la rigueur mathématique dans des preuves notamment* », pour différencier hypothèse(s) de thèse(s) (recensé deux fois) « *il faut savoir ce que l'on peut utiliser comme hypothèses et ce que l'on doit démontrer* », « *pour construire leur argumentation* ».
– « *pour différencier une implication d'une équivalence qui peuvent être source de difficultés pour les élèves* » (listé deux fois).
– « *pour expliquer la différence entre condition suffisante et condition nécessaire* » (cité quatre fois).

L'unique personne qui a répondu "non", a ajouté la mention "pas spécialement" et l'explication suivante : « *il y a tellement de notions à développer dans le programme, [que si je ne le fais pas], c'est surtout dû à un manque de temps* ».

Suite à la grande majorité de réponses affirmant qu'il est nécessaire de consacrer du temps à l'enseignement de cette notion, nous avons demandé aux enseignants si une fois en classe ils dédiaient vraiment un temps à l'apprentissage de cette notion. Parmi les huit enseignants relevés ci-dessus, trois d'entre eux répondent par la négation en reconnaissant que par faute de temps, ils font parfois l'impasse sur des explications liées à l'expression « *si... alors...* ». L'un d'eux lance d'ailleurs la question suivante : « *sans doute trop peu [à propos du temps à consacrer à cette notion] mais a-t-on vraiment le temps d'y consacrer plusieurs séances ?* ». Les cinq autres affirment consacrer du temps à l'enseignement de cette expression sans toutefois donner plus de précisions (relevé deux fois) ou en nous renvoyant à leurs réponses formulées pour les deux premières questions (également recensé deux fois), celles-ci faisant apparaître l'implication dans sa dimension outil. Nous avons néanmoins identifié une cinquième réponse intéressante. Dans celle-ci, l'enseignant rappelle dans un premier temps qu'il se concentre dans les cours de renfort mathématique à l'enseignement de la logique des propositions et notamment à dresser la table de vérité de l'implication. Il précise ensuite qu'il « *explique alors que les implications mathématiques (théorème ou propriété) sont toujours vraies et donc qu'il suffit de vérifier les hypothèses pour avoir la thèse* ». Cette précision fait référence à la situation où différents résultats théoriques mis sous une forme conditionnelle ont été prouvés via une démonstration ou bien sont admis. Il s'ensuit alors que ces résultats ont acquis de par la preuve, leur statut de vérité. Nous faisons là référence à la mention « *les implications mathématiques (théorème ou propriété) sont toujours vraies* ». Le reste de l'explication fournie « *il suffit [alors] de vérifier les hypothèses pour avoir la thèse* » fait écho à la règle du *Modus Ponens*. En effet, puisque l'énoncé conditionnel est statué vrai par la preuve effectuée, si les différents éléments qui constituent la prémisse de celui-ci sont vérifiés, ce qui correspond à la vérification des hypothèses, alors on peut déduire directement la vérité de la conclusion de cet énoncé et donc de la thèse. Via cette précision, cet enseignant fait référence au cadre de travail de l'implication relatif au raisonnement déductif : il met en avant le raisonnement direct aussi nommé règle du *Modus Ponens*. L'implication apparaît dans ce cadre comme un outil pour faire un raisonnement mathématique.

Suite à la phrase « *j'explique alors que les implications mathématiques (théorème ou propriété) sont toujours vraies* », nous nous interrogeons : des élèves peuvent-ils penser que n'importe quel énoncé mathématique mis sous forme conditionnelle est toujours vrai ? En particulier, que pensent-ils des énoncés « *si n est un nombre pair alors $n+1$ est un nombre premier* » et « *si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair* » ? Ces deux exemples admettent des instances vraies [7] et d'autres fausses [8], on ne peut donc pas dire qu'ils sont toujours vrais ou encore que leur clôture universelle respective est vraie.

Dans cette troisième question, nous voulons également savoir quels sont

7. "*si 2 est un nombre pair alors* $2+1$ *est un nombre premier*" est une instance vraie de l'énoncé "*si n est un nombre pair alors $n+1$ est un nombre premier*" et "*si 6 est un naturel multiple de 3 alors 6 est un nombre pair*" est une instance vraie de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*".

8. "*si 8 est un nombre pair alors* $8+1$ *est un nombre premier*" est une instance fausse de "*si n est un nombre pair alors $n+1$ est un nombre premier*" et "si 3 est un naturel multiple de 3 alors 3 est un nombre pair" est une instance fausse de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*".

les moments ou parties du cours que les enseignants estiment opportuns pour l'enseignement de l'expression « *si... alors...* ». Six enseignants sur huit ayant répondu à cette question précisent qu'ils peuvent être amenés à expliquer cette expression à tout moment dès que celle-ci est rencontrée :

- « *Chaque fois que l'occasion se présente avec des théorèmes* "si... alors..." » ;
- Cette expression est « *présente à tout moment du cours !!!* » ;
- « *Partout où cela [l'expression* "si... alors..."*] se présente ; surtout en analyse, géométrie, intégrale* ».

Comme convenu, les enseignants listent de manière générale, les différentes parties du cours qu'ils jugent propices pour parler de cette expression. Nous combinons ces réponses aux quelques idées qui avaient déjà été lancées par certains lors de notre toute première question relative à la présence de l'implication dans un objectif des programmes. Nous relevons que l'expression « *si... alors...* » apparaît dans les réponses données par 9 enseignants :

- dans des résultats, des théorèmes ou des parties théoriques du cours : cité 5 fois ;
- dans des exercices : recensé 3 fois ;
- dans des démonstrations : dénombré 3 fois.

Comme le laisse penser les chiffres ci-dessus, cette expression peut apparaître à la fois dans plusieurs endroits du cours. Remarquons que nous ne trouvons plus à cette question de référence à la logique des propositions ou à la table de vérité de l'implication. La présence de l'expression « *si ... alors ...* » dans ces différentes parties du cours montre qu'une implication est très souvent, voire presque toujours contextualisée, les rares cas où elle ne l'est pas fait écho aux quelques enseignants qui dressent sa table de vérité en cours de renfort mathématique. Cette expression peut vivre à la fois dans des énoncés théoriques et à la fois être utilisée dans des exercices (nous avons listé ci-dessus quelques exemples donnés par les enseignants). Dans les deux cas, elle est utilisée comme un outil du langage respectivement pour exprimer un énoncé conditionnel avec l'expression « *si ... alors ...* » et pour rédiger une solution ou un raisonnement. Remarquons notamment que cette notion est aussi associée pour 3 enseignants sur 9, à l'activité de démontrer. L'implication est donc un outil du langage pour faire des preuves.

4.4 Bilan sur notre expérimentation d'un point de vue enseignant

Comme le laissait penser notre analyse des programmes effectuée au chapitre 1, l'implication apparaît le plus souvent dans les salles de classe sous sa dimension outil. C'est d'ailleurs cette dimension qui est aussi mise en évidence dans la façon dont les enseignants abordent l'objectif des programmes où l'expression « *si... alors...* » est citée. À ce sujet, les enseignants tiennent un discours explicatif sur cette expression dès que celle-ci est rencontrée dans des exercices, des résultats théoriques ou des démonstrations. Ces explications dépendent toujours d'un contexte et l'implication apparaît comme un outil du langage pour s'exprimer dans des rédactions de solutions ou de preuves. Néanmoins, la dimension objet n'est pas totalement absente de l'enseignement secondaire auquel nous avons eu accès. En effet, certains enseignants introduisent leurs élèves à la logique des propositions. Ce phénomène est principalement localisé auprès des élèves de $5^{\text{ième}}$ ou $6^{\text{ième}}$ année suivant des cours de renforcement en mathématiques ou de préparation aux études supérieures. Là, les enseignants font vivre l'implication dans sa dimension objet puisque certains dressent la table de vérité de ce connecteur. Ces élèves suivent donc un enseignement sur l'implication suivant sa double dimension outil/objet. Ils doivent probablement développer des connaissances et conceptions à son sujet qui sont proches de celles d'étudiants universitaires.

En ce qui concerne les cadres de travail de l'implication qui sont majoritairement mobilisés par les enseignants, seul le cadre de la logique formelle émerge dans les réponses de 4 professeurs sur 9 ayant répondu au questionnaire. Ces quatre personnes consacrent du temps le plus souvent en renfort mathématique à l'enseignement de cette logique et en particulier à l'étude de l'expression « *si... alors...* ». Auprès des autres enseignants, nous ne constatons pas de référence à ce cadre. En effet, ils utilisent davantage l'implication comme un outil pour s'exprimer dans des exercices par exemple. Nous n'avons pas trouvé de traces du cadre ensembliste de l'implication dans les réponses des professeurs. Par contre, nous avons recensé chez un enseignant, une allusion au cadre du raisonnement déductif via la règle du *Modus Ponens*.

Nous dégageons des réponses des enseignants que certains d'entre eux font parfois en classe plus de choses que nous ne l'aurions initialement cru. En effet, 4 personnes sur 9 interrogées insistent sur la distinction existant entre une implication et une équivalence. Nous notons que les explications données sont toutes réalisées dans un contexte précis comme par exemple avec le cadre de l'analyse. Cependant deux enseignants font vivre l'implication dans sa dimension objet et peuvent donc être amenés à parler de cette distinction de manière décontextualisée en dressant par exemple les tables de vérité de ces deux connecteurs logiques. 45% des professeurs interrogés semblent accorder de l'importance à cette distinction.

Nous retenons de notre expérimentation auprès des enseignants le constat suivant : certes, l'implication apparaît comme étant majoritairement utilisée mais celle-ci est aussi enseignée contrairement à ce que laisse penser notre analyse des programmes. En effet, certains enseignants, précisément 4 sur 9 interrogés, consacrent du temps à une étude explicite et indépendante de tout contexte sur l'implication. Cet enseignement est effectué le plus souvent dans un cours de renforcement mathématique suivi par des élèves de $5^{\text{ième}}$ ou $6^{\text{ième}}$ année. L'implication est alors à la fois enseignée et utilisée pour ces élèves et elle apparaît sous sa double dimension outil/objet.

Chapitre 5

Présentation des questionnaires à destination des élèves et étudiants

Dans ce chapitre, nous présentons les différents questionnaires à destination des élèves et étudiants que nous avons élaborés pour obtenir des éléments de réponses à notre problématique sur l'implication. Ceux-ci s'inscrivent dans les différents axes de notre questionnement présentés au chapitre 3. Les formulaires sont au nombre de deux et ils s'adressent aux étudiants des deux niveaux d'enseignements que nous étudions dans notre travail, celui du secondaire et celui universitaire. Par souci de clarté dans la rédaction de notre travail, nous choisissons de procéder à un découpage de notre expérimentation. Nous présentons dans ce chapitre les questions de nos deux questionnaires en analysant les réponses éventuelles que les étudiants des deux institutions pourraient apporter à ces questions compte tenu des programmes pour le secondaire et du cours de Mathématiques élémentaires pour l'enseignement universitaire. Pour chaque institution, nous dressons ensuite dans les chapitres suivants un état des lieux suivi d'un bilan des connaissances disponibles suite à notre enquête sur l'implication.

Les deux formulaires traitent aussi bien de l'implication en tant qu'objet et en tant qu'outil, les mots « *objet* » et « *outil* » faisant référence à la double dimension outil/objet qu'un concept mathématique peut posséder au sens de Douady [5]. Dans ces questionnaires, nous nous intéressons également aux trois cadres de travail de l'implication (logique formelle, ensembliste et raisonnement déductif) et notamment à leur présence dans les connaissances et conceptions que des étudiants ont sur une implication. Nous essayons pour cela de baser nos questionnaires sur ces cadres. En particulier, nous nous sommes concentré sur le cadre ensembliste et nous lui avons dédié un questionnaire entier. Nous reviendrons par après sur ce questionnaire consacré à ce cadre. Dans notre élaboration des formulaires, nous prenons également en compte notre axe de questionnement lié au registre de la langue. Nous voulons notamment étudier l'influence de la langue et donc du sens langagier dans les connaissances des étudiants sur une implication. En particulier, nous désirons savoir si des conceptions issues du langage et d'habitudes associées à celui-ci peuvent être utilisées par les élèves pour s'exprimer sur la vérité d'un énoncé conditionnel en mathématiques. Nous pensons par exemple à la conception de causalité ≪ *"A implique B" n'a de sens que si A et B ont un lien de cause à effet* ≫ ou à celle de temporalité ≪ *Dans "A implique B", A doit être vérifiée avant B et A se situe dans le temps avant B* ≫. Nous nous concentrons dans un premier temps sur cette enquête qui est plus axée sur le sens naturel et sur celui mathématique de l'implication, tout en prenant en compte la double dimension outil/objet et les trois cadres de travail de l'implication. Nous présentons maintenant chaque questionnaire et l'analyse des questions de ceux-ci.

5.1 Présentation et analyse du premier questionnaire

Notre premier questionnaire construit notamment à partir du sens langagier et du sens mathématique de l'implication a pour but de nous aider à trouver des éléments de réponse face aux questions soulevées dans notre questionnement au chapitre 3. Nous analysons les différentes questions de cette première enquête en détaillant l'origine et la création de celles-ci et nous prévoyons les réponses possibles des élèves et étudiants.

Nous choisissons de présenter d'abord nos différentes questions les unes à la suite des autres afin de donner une vue d'ensemble de notre questionnaire. Nous revenons ensuite en détails sur chacune d'elles.

Question 1
En mathématiques, on utilise souvent une lettre majuscule pour désigner une proposition. Dans ce questionnaire, les lettres P et Q représentent deux propositions quelconques.

En mathématiques, vous avez déjà rencontré une expression de la forme ≪ *si* P *alors* Q ≫.
(a) Que signifie, selon vous, ce type d'expression ?
(b) Donnez des expressions qui signifient la même chose que ≪ *si* P *alors* Q ≫.
(c) Citez quelques propriétés que vous avez croisées dans votre cours de mathématique et qui s'énoncent sous la forme ≪ *si* P *alors* Q ≫.

Question 2
Etudiez les affirmations et conclusions suivantes. Dans chacun des cas, cochez une case et expliquez votre raisonnement.
(a)

<u>Affirmations :</u>
– S'il pleut alors je prends mon parapluie.
– Je prends mon parapluie.
<u>Conclusion :</u>
Donc, il pleut.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

(b)

<u>Affirmations :</u>
– Si la propriété X est vérifiée alors la propriété Y est vérifiée.
– La propriété Y n'est pas vérifiée.
<u>Conclusion :</u>
Donc, la propriété X n'est pas vérifiée.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

(c)

<u>Affirmations :</u>
– Si Doc voyage dans le temps alors sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure.
– Doc ne voyage pas dans le temps.
<u>Conclusion :</u>
Donc, sa DeLorean n'atteint pas la vitesse de 88 miles par heure.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

Question 3
Donnez tous les nombres naturels n entre 0 et 20 qui vérifient la propriété suivante :
« Si n est un nombre pair, alors $n+1$ est un nombre premier ».
Détaillez votre raisonnement.

Question 4
Que pensez-vous des implications suivantes ?
Dans chacun des cas, cochez la réponse de votre choix.

Soit k un naturel quelconque.

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair			
(b)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ impair			
(c)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ pair			
(d)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ impair			

Justifiez votre réponse donnée en (a).

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(e)	3 pair $\Rightarrow$ 4 pair			
(f)	3 pair $\Rightarrow$ 4 impair			
(g)	3 impair $\Rightarrow$ 4 pair			
(h)	3 impair $\Rightarrow$ 4 impair			

Justifiez votre réponse donnée en (e).
Justifiez votre réponse donnée en (f).

Question 1

> En mathématiques, on utilise souvent une lettre majuscule pour désigner une proposition. Dans ce questionnaire, les lettres P et Q représentent deux propositions quelconques.
>
> En mathématiques, vous avez déjà rencontré une expression de la forme « *si P alors Q* ».
> (a) Que signifie, selon vous, ce type d'expression ?
> (b) Donnez des expressions qui signifient la même chose que « *si P alors Q* ».
> (c) Citez quelques propriétés que vous avez croisées dans votre cours de mathématique et qui s'énoncent sous la forme « *si P alors Q* ».

Le but de cette question est d'avoir une idée des connaissances des élèves et des étudiants sur une implication mise sous la forme langagière « *si... alors...* ». Ils ont déjà tous rencontré dans leur cours de mathématique une expression de cette forme. Nous voulons savoir ce qu'exprime pour eux une telle expression et la signification qu'ils lui donnent. Nous désirons également connaître le vocabulaire ou les symboles mathématiques qu'ils utilisent pour exprimer de manière équivalente « *si P alors Q* ». Enfin, nous nous intéressons aux exemples d'énoncés conditionnels issus du cours de mathématique que peuvent spontanément donner des élèves.

Nous avons réalisé deux versions de cette question : une première destinée aux élèves de l'enseignement secondaire et une seconde aux étudiants de l'université. Celles-ci sont identiques dans le sens, seule la forme change quelque peu. En effet, la différence tient dans la première phrase de l'introduction. Plus précisément, pour les questionnaires adressés aux élèves du secondaire, nous avons ajouté dans le premier paragraphe une précision sur le mot « *proposition* » : "*On appelle proposition des affirmations telles que « le soleil est vert », « je suis en prison », « $1 > 0$ », ... En mathématiques, on utilise souvent une lettre majuscule pour désigner une proposition ...*". Initialement, notre question était dépourvue de cette précision. Un professeur de l'enseignement secondaire intéressé par notre enquête [1], nous a signalé que ce mot "*proposition*" risquait de ne pas être partagé par les élèves. Nous sommes nous-même habitué à utiliser fréquemment ce mot puisque celui-ci fait partie du langage mathématique acquis durant notre parcours à l'université. Son emploi initial, sans explications, dans le questionnaire adressé aux élèves du secondaire était donc maladroit. C'est à travers un tel exemple que nous pouvons tirer bénéfice d'une collaboration avec des enseignants du secondaire :

1. Nous remercions au passage cet enseignant.

leur expérience nous a permis de nous rendre compte de notre maladresse. Avec cet ajout, nous avons modifié notre question pour que celle-ci soit plus accessible au niveau du secondaire.

Pour chaque item de cette question, nous détaillons nos attentes et dégageons des réponses que les étudiants sont susceptibles de donner selon deux points de vue : celui du secondaire et celui universitaire.
Item (a) : Avec cette première question, nous désirons étudier les connaissances spontanées et la signification que les étudiants peuvent associer à une implication.

– Pour les élèves du secondaire, suite à la disparition dans les programmes de la logique des propositions, nous ne pensons pas a priori trouver de traces du cadre de travail de l'implication lié à cette logique. Par exemple, nous ne nous attendons pas à voir dans les réponses la table de vérité de l'expression « *si P alors Q* » dressée. Néanmoins, celle-ci peut éventuellement apparaître auprès de quelques élèves à qui cette logique mathématique a été introduite.
– Pour les étudiants universitaires, puisque ceux-ci ont reçu un enseignement explicite de l'implication, nous nous attendons à trouver essentiellement des références au cadre de la logique formelle comme par exemple la définition du connecteur propositionnel « *si... alors...* » au moyen de sa table de vérité. Un tel exemple contribue à faire vivre l'implication sous sa dimension objet. La table de vérité de ce connecteur met notamment en évidence le cas d'une prémisse fausse qui rend vraie une implication.

Item (b) : Cette deuxième question nous permet d'étudier le vocabulaire et les symboles que les étudiants emploient pour exprimer des expressions équivalentes à « *Si P alors Q* ». Ici aussi, nous nous attendons à des réponses différentes entre les deux niveaux d'enseignement qui nous intéressent. Puisque le niveau secondaire semble fortement axé sur l'utilisation du langage, nous imaginons trouver dans les réponses de ces élèves beaucoup d'expressions langagières équivalentes à « *si P alors Q* » et peu de notations symboliques. L'énoncé « *Si P alors Q* » sera probablement ré-écrit comme « *P implique Q* », alors que l'écriture symbolique « $P \Rightarrow Q$ » risque d'être absente. À l'inverse, à l'université, puisque l'enseignement donné est plus centré sur le symbolisme, les réponses reflèteront probablement cette pratique : une utilisation en grande majorité de symboles pour exprimer des expressions équivalentes et peu de références au langage. Outre la ré-écriture de « *si P alors Q* » en « $P \Rightarrow Q$ », nous pensons trouver les expressions suivantes équivalentes d'un point de vue logique à « $P \Rightarrow Q$ » : « $\neg Q \Rightarrow \neg P$ » et « $\neg P \vee Q$ ».

Item (c) : À travers cette question, nous désirons avoir quelques exemples de propriétés mathématiques de la forme « *si P alors Q* » que les étudiants connaissent. L'implication y apparaît alors comme un outil pour pouvoir formuler des énoncés et pour s'exprimer en mathématiques.

Question 2

Cette question porte sur des figures de raisonnement valides ou non que l'on peut faire à partir d'un énoncé conditionnel. Elle est divisée en trois sous-questions qui illustrent chacune un raisonnement que nous avons décidé de mettre en avant. Pour chaque sous-question, deux affirmations sont données et une conclusion est établie à partir de celles-ci. Nous demandons alors aux étudiants ce qu'ils pensent de la conclusion formulée à partir des deux affirmations. Nous leur proposons pour cela de cocher une case parmi les choix "vraie", "fausse" (respectivement s'ils estiment que la conclusion établie est correcte ou erronée) ou "on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre". Nous les invitons à justifier leur choix en expliquant notamment leur raisonnement. Dans le cas où ils estiment ne pas avoir assez d'informations pour y répondre, nous espérons obtenir des précisions sur un ou plusieurs éléments qu'ils jugent manquants.

Intéressons-nous à la première sous-question présentée dans l'encadrement suivant.

(a)

Affirmations :
- S'il pleut alors je prends mon parapluie.
- Je prends mon parapluie.

Conclusion :
Donc, il pleut.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :

☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.

Expliquez votre raisonnement.

Cette première question est basée sur la confusion possible dans le langage, entre une implication et une équivalence. En effet, dans le chapitre 2, nous avons vu que contrairement aux mathématiques où ces deux notions sont distinctes, celles-ci peuvent selon le contexte, être confondues dans la logique naturelle, utilisée pour s'exprimer au quotidien. Nous désirons donc savoir si cette confusion est présente chez les étudiants. Nous estimons que celle-ci sera davantage présente en secondaire qu'à l'université. En effet, dans cette première institution, l'enseignement semble très lié au langage et nous pensons que la logique naturelle est très ancrée chez les élèves. Par contre, à l'université, cette confusion devrait être beaucoup moins fréquente suite à l'étude explicite de la notion d'implication. En effet, la différence de signification entre une implication et une équivalence apparaît dans les tables de vérité respectives de ces deux connecteurs mais aussi dans la définition d'une équivalence puisqu'il s'agit de la conjonction de deux implications. Choisir la réponse « *vraie* » à cette question reflète alors une confusion entre ces deux connecteurs. Le bon choix est que la conclusion établie à partir des deux affirmations est fausse. Il faut donc cocher la case « *fausse* » correspondante.

La logique des propositions est ici un bon outil pour exprimer la solution. Pour cela, nommons P la proposition « *il pleut* » et Q celle « *je prends mon parapluie* ». La première affirmation s'écrit alors : « *si P alors Q* ». La vérité supposée dans cet énoncé par cette première affirmation fait que la table de vérité associée à cette expression « *si P alors Q* » se réduit à la forme suivante :

	P	Q	*si P alors Q*
(1)	1	1	1
(2)	0	1	1
(3)	0	0	1

De la seconde affirmation, c'est-à-dire « *Q vraie* », nous restreignons notre table de vérité aux lignes (1) et (2). De ces dernières, nous ne pouvons pas déduire la vérité ou la fausseté de P. La conclusion tirée affirmant « *il pleut* », c'est-à-dire « *P vraie* », est donc erronée. On peut très bien avoir la configuration de la ligne (2) disant « *il ne pleut pas* » et « *je prends mon parapluie* ». L'implication « *S'il pleut alors je prends mon parapluie* » reste vraie dans ce cas.

Dans cette sous-question, cocher la case « *on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre* » peut notamment faire référence au raisonnement ci-dessus où à partir des deux affirmations, on ne peut pas déduire la vérité ou la fausseté de la proposition P affirmant « *il pleut* ». En effet, uniquement sur la base des deux affirmations données, la table de vérité de l'implication est restreinte aux lignes (1) et (2) et elle ne permet pas de conclure avec certitude qu'il pleut (P) ou qu'il ne pleut pas (*non* P). Du fait que l'on ne puisse pas conclure, l'énoncé uniquement basé sur ces deux affirmations est dit contingent, c'est-à-dire qu'à cet instant, on n'a pas les moyens de savoir si la proposition « *il pleut* » est vraie ou fausse. Certains étudiants peuvent alors cocher cette case pour cette raison. Cependant, la conclusion « *il pleut* » a été ici établie. Nous ne sommes donc pas dans cette configuration d'énoncé contingent. On peut ici se prononcer sur le fait que la conclusion tirée est correcte ou non. Des étudiants cochant la case relative à un manque d'informations ont peut-être tendance à répondre sans prendre en compte la conclusion établie et à ainsi voir l'énoncé réduit à ces deux affirmations comme contingent puisqu'on ne peut pas conclure sur le caractère vrai ou non de P. Alors que prendre en compte la conclusion établie à partir des deux affirmations permet de statuer sur le fait que celle-ci est erronée.

La logique des propositions est donc un outil efficace pour répondre à cette question. Nous estimons que celui-ci est disponible pour les étudiants universitaires mais que ce n'est pas le cas a priori pour les élèves du secondaire. En effet, la logique des propositions ne fait pas partie des programmes de l'enseignement secondaire.

Intéressons-nous maintenant à la seconde sous-question présentée dans l'encadrement ci-dessous.

(b)

> Affirmations :
> – Si la propriété X est vérifiée alors la propriété Y est vérifiée.
> – La propriété Y n'est pas vérifiée.
> Conclusion :
> Donc, la propriété X n'est pas vérifiée.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

Cette question met en avant le raisonnement par contraposition ou règle du *Modus Tollens*. Nous choisissons de nous concentrer uniquement sur la version non quantifiée de cette règle, c'est-à-dire sur la configuration : $A \Rightarrow B$ est vrai ; or, *non* B est vrai ; donc, *non* A est vrai.

Ici aussi la logique des propositions s'avère être un outil très efficace pour répondre à la question. Symbolisons respectivement les expressions « *la propriété X est vérifiée* » par X et « *la propriété Y est vérifiée* » par Y. Dès lors, l'implication « *si la propriété X est vérifiée alors la propriété Y est vérifiée* » est symbolisée par « *si X alors Y* ». Les étudiants peuvent poursuivre leur raisonnement de deux façons :

- La première manière consiste à utiliser l'équivalence logique entre une implication et sa contraposée. On obtient alors que « *Si X alors Y* » est équivalent à « *Si non Y alors non X* ». On se ramène ensuite à un raisonnement dit direct (règle du *Modus Ponens*) : de la vérité de « *Si non Y alors non X* » donnée par l'équivalence logique avec la première affirmation et de la vérité de « *non Y* » issue de la seconde affirmation, on déduit que « *non X* » est vrai, c'est-à-dire que la négation de « *la propriété X est vérifiée* » est vraie ou encore que « *la propriété X n'est pas vérifiée* ».
- La seconde manière est de dresser la table de vérité de « *si X alors Y* ». De la vérité de la première affirmation donnée, on réduit cette table aux seuls cas où l'expression « *si X alors Y* » est vraie. On obtient alors la table restreinte suivante :

X	Y	*si X alors Y*
0	0	1
0	1	1
1	1	1

  La seconde affirmation apporte l'information que *non Y* est vrai, c'est-à-dire Y est faux. Ceci réduit la table ci-dessus à une seule configuration possible : celle de la première ligne, soit le cas où les propositions X et Y sont toutes les deux fausses. Celle-ci nous donne alors que X est faux ou encore que *non X* est vrai, c'est-à-dire « *la propriété X n'est pas vérifiée* ».

Ces deux manières de raisonner montre que la conclusion établie à partir des deux affirmations est correcte. La case à cocher associée est donc « *vraie* ».

Ici aussi, nous estimons que le recours à la logique des propositions pour répondre à cette question est de l'ordre du disponible pour les étudiants universitaires mais pas pour ceux du secondaire. En particulier, pour les étudiants universitaires, l'équivalence logique entre une implication et sa contraposée est enseignée. Pour les élèves du secondaire qui n'ont pas reçu a priori un enseignement explicite sur l'expression « *si...alors...* » comme le montre notre analyse des programmes réalisée au chapitre 1, nous pensons que le raisonnement par contraposition n'est pas connu de ces élèves et en particulier, il n'est pas reconnu dans cet exercice. Néanmoins, nous avons vu au chapitre 2 que l'implication peut être un outil de déduction de la logique naturelle. En effet, des raisonnements où l'on utilise la contraposée d'une implication sont souvent présents dans des romans policiers par exemple. Des élèves auront peut-être tendance à utiliser cet aspect lié à la logique naturelle pour conclure que la réponse attendue est « *vraie* ». Dans ce cas, nous nous intéressons particulièrement à la rédaction de la justification qu'ils apportent à cette question.

Concentrons-nous maintenant sur la troisième et dernière sous-question relative à des figures de raisonnement valides ou non. Celle-ci est présentée dans l'encadrement ci-dessous.

(c)

Affirmations :
– Si Doc voyage dans le temps alors sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure.
– Doc ne voyage pas dans le temps.

Conclusion :
Donc, sa DeLorean n'atteint pas la vitesse de 88 miles par heure.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

Cette question repose sur une fausse conception à propos de la contraposée d'une implication que des étudiants peuvent avoir : l'expression ≪ *si P alors Q* ≫ est équivalente à ≪ *si non P alors non Q* ≫ (Stylianides et al. [19, p. 140]). Ceux-ci peuvent alors répondre que la conclusion établie à la sous-question (c) est ≪ *vraie* ≫ en utilisant cette conception et la règle du *Modus Ponens*. Ils peuvent également utiliser cette conception pour répondre à la sous-question (b) et ne pas reconnaître alors comme correcte la conclusion établie par la règle du *Modus Tollens*.

Nous estimons que cette conception peut être partagée par des élèves de l'enseignement secondaire, chez qui l'équivalence entre une implication et sa contraposée n'a pas a priori été établie. Inversément, nous pensons que cette conception sera peu présente à l'université. L'équivalence logique entre une implication et sa contraposée est notamment démontrée dans le cours de Mathématiques élémentaires comme nous l'avons signalé au chapitre 1. Cette équivalence est une connaissance qui fait l'objet d'un enseignement.

Ici aussi, la logique des propositions se révèle être un bon outil pour répondre à la question. Nommons respectivement les expressions ≪ *Doc voyage dans le temps* ≫ par P et ≪ *sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure* ≫ par Q. La phrase conditionnelle ≪ *Si Doc voyage dans le temps alors sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure* ≫ se symbolise alors par « *Si P alors Q* ». En utilisant l'équivalence logique entre une implication et sa contraposée, on obtient que « *Si non Q alors non P* » est équivalent à « *Si P alors Q* ». On se retrouve alors dans la situation suivante : nous avons d'une part deux affirmations vraies « *Si non Q alors non P* » (dont la vérité découle de l'équivalence logique avec l'expression vraie « *Si P alors Q* ») et « *non P* », et d'autre part, une conclusion « *Donc, non Q* » formulée à partir de ces deux affirmations. On s'interroge ensuite sur cette conclusion établie : est-elle "*vraie*", "*fausse*" ou "*on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre*" ? On se retrouve dans une configuration identique à celle présentée à la sous-question (a) : une implication $A \Rightarrow B$ et sa conclusion B sont supposées vraies et quelqu'un propose alors la déduction suivante "*donc, la prémisse A est vraie*". On procède alors de la même manière qu'en (a) pour justifier que la déduction proposée est erronée puisque l'on peut très bien avoir une prémisse A fausse et une conclusion B vraie, l'implication $A \Rightarrow B$ restant toujours vraie. Pour cette question, cela revient à dire que *non Q* est fausse et que *non P* est vraie ou encore que la proposition Q est vraie ("*sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure*") et que la proposition P est fausse ("*Doc ne voyage pas dans le temps*"). Cette configuration disant que "*Doc ne voyage pas dans le temps*" et "*sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure*" vérifie les deux affirmations données mais pas la conclusion "*Donc, sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure*" établie à partir de ces deux affirmations. Suite à cette configuration, on établit que la conclusion proposée dans la question est erroné.

Ici aussi, cette utilisation de la logique des propositions comme outil pour répondre à la sous-question n'est selon nous disponible que pour les étudiants universitaires. Les élèves du secondaire ne connaissent pas a priori cette logique et la table de vérité de l'implication.

Question 3

> Donnez tous les nombres naturels n entre 0 et 20 qui vérifient la propriété suivante :
> « Si n est un nombre pair, alors $n + 1$ est un nombre premier ».
> Détaillez votre raisonnement.

Cette question a été initialement proposée par Durand-Guerrier [7, pp. 6-7] en 1992 dans un cours de mathématiques adressé à des étudiants en première année scientifique, inscrits à l'Université de la ville de Valence en France. Sur 90 étudiants interrogés, tous exceptés trois ont répondu que seuls les entiers 2, 4, 6, 10, 12, 16 et 18 rendaient vraie la propriété. Les trois autres ont répondu que les entiers impairs de 1 à 19 vérifiaient également cet énoncé. En effet, une implication dont la prémisse est fausse est déclarée vraie.

Examinons l'énoncé. La propriété ≪ *si n est un nombre pair, alors n + 1 est un nombre premier* ≫ proposée dans l'exercice est une implication ouverte où la variable n est libre, elle n'admet pas de valeur de vérité. Par contre, en instanciant cette phrase, c'est-à-dire en donnant des valeurs à la variable n, on obtient une implication matérielle qui elle admet une valeur de vérité. Dans l'énoncé, nous spécifions que n est un nombre naturel compris entre 0 et 20 que nous considérons tous les deux comme inclus. L'ensemble de référence dans lequel varie la variable n s'écrit comme tel : $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 20\}$. Dès lors, pour chaque nombre naturel de cet ensemble, nous obtenons une implication matérielle en remplaçant dans la propriété ce n par le naturel en question. Suivant la table de vérité d'une implication en logique classique, toutes les implications matérielles obtenues dont la prémisse est fausse, c'est-à-dire celles où n est un nombre impair, sont déclarées vraies. Toujours suivant cette table, celles dont la prémisse et la conclusion sont vraies (respectivement, n est bien un nombre pair et son successeur, noté $n+1$, est bien un nombre premier) sont également déclarées vraies. Autrement dit, seules les implications matérielles obtenues dont la prémisse est vraie (n est bien un nombre pair) et la conclusion fausse ($n + 1$ n'est pas un nombre premier), sont déclarées fausses. Il y a donc quatre valeurs de n qui rendent la propriété fausse : 0, 8, 14 et 20. Chacune d'elles sont paires mais leur successeur n'est jamais premier. Ce sont d'ailleurs les quatre contre-exemples possibles que l'on peut associer à l'implication formelle $\forall n \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 20\}, n \text{ pair} \Rightarrow n + 1 \text{ premier}$.

Cette question met en avant la tâche mathématique qui consiste à travailler sur la vérité d'une implication. À propos de cette tâche, Deloustal-Jorrand [4, pp. 48 - 50] précise que la question que l'on se pose est la suivante : "*Pour quels objets x l'implication $A(x) \Rightarrow B(x)$ est-elle vraie ? fausse ?*". Elle est au moins vraie pour tous les objets x qui ne vérifient pas $A(x)$ ou dit autrement qui vérifient *non* $A(x)$ puisqu'une prémisse fausse rend l'implication matérielle associée vraie. Elle ajoute qu' ≪ *il y a réellement un enjeu de vérité, on cherche les éléments vérifiant une implication, on ne les connaît pas a priori* ≫ (p. 50).

Pour l'enseignement secondaire, nous pensons trouver dans une grande majorité de réponses que les valeurs de n qui rendent vraie la propriété donnée sont les valeurs naturelles 2, 4, 6, 10, 12, 16 et 18. Ce sont celles qui vérifient à la fois la prémisse et la conclusion de l'énoncé conditionnel donné. Nous imaginons également trouver des justifications expliquant pourquoi il faut rejeter les valeurs 0, 8, 14 et 20. Nous estimons que le raisonnement de la plupart des élèves de cette institution s'arrêtera là, à la prédominance du cas où la prémisse est vraie. En effet, les nombres impairs risquent d'être absent puisque les étudiants n'ont a priori jamais rencontré la table de vérité d'une implication matérielle et par conséquent, ils ne prennent pas en compte le cas d'une prémisse fausse rendant vraie une telle implication. Au-delà de cette raison, certains élèves formuleront peut-être "avec leurs mots" une explication stipulant pourquoi ils ne prennent pas en compte ces nombres impairs. Pour l'université, suite à l'étude explicite de l'expression ≪ *si* P *alors* Q ≫, où P et Q sont deux propositions et de la prise en charge du cas d'une prémisse fausse rendant vraie une implication, les étudiants peuvent répondre que ce sont tous les naturels compris entre 1 inclus et 19 inclus exceptés 8 et 14 qui rendent vraie la propriété donnée. La table de vérité de l'implication est un outil disponible qui peut les aider à identifier les différents distributions de vérité entre prémisse et conclusion qui rendent vraie une implication.

Question 4

Cette question est reprise d'une expérimentation de Deloustal-Jorrand ([2], [3, pp. 58 - 60], [4, pp. 111 - 113]) sur l'implication. Dans cette enquête, elle a interrogé quatre étudiants, futurs enseignants se préparant à l'enseignement dans les lycées et les collèges. Ceux-ci disposent de connaissances en mathématiques semblables à celles d'un étudiant de master diplômé en sciences mathématiques puisque l'un deux prépare notamment une thèse et que les autres ont par exemple leur D.E.A. et l'agrégation ou travaillent pour obtenir cette dernière.

Cette question est divisée en deux parties et à chacune d'elles, un tableau lui est associé. Nous demandons aux étudiants de se prononcer sur la vérité de chaque énoncé conditionnel proposé. Pour cela, ils doivent, dans chaque cas, cocher la réponse de leur choix parmi les propositions "*Vrai*", "*Faux*" ou "*On ne peut pas savoir*". Nous invitons également les étudiants à justifier leurs réponses pour quelques énoncés particulièrement bien choisis.
Cette question a été construite pour voir si des conceptions langagières sur l'implication peuvent être utilisées par les étudiants pour statuer sur le vérité d'un énoncé conditionnel en mathématiques et pour mettre en avant avec le premier tableau une interprétation implicite d'une implication sous forme universellement quantifiée.

Concentrons-nous d'abord sur la première partie de cette question. Celle-ci est présentée dans l'encadré suivant et est relative au phénomène de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels mis en avant par Durand-Guerrier [6].

Que pensez-vous des implications suivantes ?
Dans chacun des cas, cochez la réponse de votre choix.

Soit k un naturel quelconque.

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair			
(b)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ impair			
(c)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ pair			
(d)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ impair			

Justifiez votre réponse donnée en (a).

Deloustal-Jorrand identifie que deux réponses sont possibles pour ce premier tableau suivant le statut que l'on donne à la variable k :

– La première réponse est due à une interprétation des énoncés conditionnels (a), (b), (c) et (d) comme étant universellement quantifiés mais de façon implicite. Le tableau associé à cette première réponse est le suivant :

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair		X	
(b)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ impair	X		
(c)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ pair	X		
(d)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ impair		X	

Pour l'énoncé conditionnel (a), on donne en réalité la valeur de vérité de l'implication formelle $\forall k, k$ pair $\Rightarrow k+1$ pair. On déclare alors l'expression (a) fausse puisqu'elle admet au moins un contre-exemple et qu'un

seul contre-exemple suffit à déclarer une implication formelle fausse. Par exemple, pour $k = 2$, nous avons que 2 est bien pair (prémisse vraie) mais que 3 n'est pas pair (conclusion fausse). L'énoncé (d) est aussi déclaré faux puisqu'un contre-exemple possible est $k = 3$: 3 est impair mais 4 n'est pas impair. Les phrases (b) et (c) sont quant à elles déclarées vraies.
Deloustal-Jorrand [4] précise que : « *Cette réponse reflète une pratique mathématique courante et souvent inconsciente* » (p. 112).

– La deuxième réponse possible repose sur des implications entre énoncés contingents. Le tableau associé à cette seconde réponse est le suivant :

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair			X
(b)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ impair	X		
(c)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ pair	X		
(d)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ impair			X

La variable k est vue comme un élément générique qu'on ne connaît pas a priori. Pour se prononcer sur la valeur de vérité de (a) on procède alors de la sorte : « *Soit k un élément fixé que je ne connais pas. Que dire alors de la phrase "si k est pair alors son successeur, noté $k+1$ est pair" ? Est-elle vraie ? fausse ? On ne peut pas savoir ?* ». La bonne réponse est ici "*On ne peut pas savoir*". En effet, cette phrase admet à la fois des instances vraies et d'autres fausses. Par exemple pour $k = 3$, l'implication matérielle associé "3 *pair* $\Rightarrow$ 4 *pair*" est vraie puisque sa prémisse est fausse. Un exemple possible d'instance fausse est donné par $k = 2$ où l'implication matérielle associée "2 *pair* $\Rightarrow$ 3 *pair*" est fausse puisque sa prémisse est vraie alors que sa conclusion est fausse. Il s'ensuit que l'on ne peut pas se prononcer sur la valeur de vérité de (a) sans connaître la parité de k. Cet énoncé est dit contingent [2]. La réponse attendue est ici "*On ne peut pas savoir*" puisque nous n'avons pas les moyens de savoir si l'énoncé est vrai ou faux sans connaître la parité de k. De manière similaire, on répond "*On ne peut pas savoir*" pour l'énoncé (d) puisque celui-ci admet à la fois des instances vraies

2. Durand-Guerrier[6] définit : « *Un énoncé est contingent pour un sujet donné à un instant t si le sujet n'a pas, à l'instant t, les moyens de savoir si cet énoncé est vrai ou faux* » (p. 70).

(comme pour $k = 2$) et des instances fausses (comme pour $k = 3$). Par contre les énoncés (b) et (c) sont vrais quelle que soit la parité de k.

Selon Deloustal-Jorrand [4, p. 112], ces deux points de vue peuvent être considérés comme justes suivant que l'on interprète les énoncés conditionnels comme universellement quantifiés implicitement ou que ce sont des instances avec des éléments génériques.

Nous choisissons de demander aux étudiants de justifier la réponse donnée en (a). Ce choix est motivé par les deux tableaux ci-dessus où la réponse apportée peut différer selon l'interprétation que l'on fait de ces énoncés. À travers les justifications apportées à cet énoncé, nous voulons analyser si la pratique de quantification universelle implicite d'une implication est partagée ou non par les étudiants des deux institutions que nous étudions. Nous pensons notamment qu'au niveau universitaire le constat sera probablement semblable à celui de Deloustal-Jorrand qui relève dans son expérimentation que les quatre futurs enseignants interrogés ont tous interprété les énoncés conditionnels comme étant implicitement universellement quantifiés.

Intéressons-nous maintenant à la seconde partie de la question représentée dans l'encadrement suivant. Par rapport au premier tableau, la variable k a été fixée avec la valeur naturelle 3. Il s'agit donc d'un cas particulier de la deuxième réponse possible au premier tableau.

Que pensez-vous des implications suivantes ?
Dans chacun des cas, cochez la réponse de votre choix.

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(e)	3 pair $\Rightarrow$ 4 pair			
(f)	3 pair $\Rightarrow$ 4 impair			
(g)	3 impair $\Rightarrow$ 4 pair			
(h)	3 impair $\Rightarrow$ 4 impair			

Justifiez votre réponse donnée en (e).
Justifiez votre réponse donnée en (f).

Dans cette question, nous nous intéressons particulièrement à la valeur de vérité que les étudiants attribuent à une implication dont la prémisse est fausse. Cet intérêt s'illustre dans les énoncés (e) et (f). C'est donc dans ce but que nous demandons aux élèves de justifier la réponse qu'ils donnent à ces deux énoncés. Pour nous aider dans notre dépouillement des questionnaires diffusés dans les deux institutions, nous reprenons l'analyse de Deloustal-Jorrand pour ce second tableau. Elle s'attend à trois types de réponses :

– La première réponse possible qu'elle distingue fait référence au premier tableau où on répond en interprétant chaque énoncé comme étant universellement quantifié implicitement. On coche exactement les mêmes cases pour chaque énoncé en justifiant que la variable k est simplement remplacée par 3 et que cela ne remet pas en cause la vérité de ceux-ci. Comme le précise Deloustal-Jorrand, « *cette réponse est fausse car une implication universellement quantifiée* $\forall x, A(x) \Rightarrow B(x)$ *peut être fausse sans que l'implication entre énoncés contingents correspondante* $A(x) \Rightarrow B(x)$ *soit fausse pour tous les objets* x *(dissymétrie du vrai et du faux !)* ». C'est notamment le cas de l'implication formelle $\forall k, k$ pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair qui est fausse puisqu'elle admet le contre-exemple $k = 2$ mais l'implication entre énoncés contingents associée k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair n'est pas toujours fausse puisqu'elle admet une instance vraie pour par exemple $k = 3$. Le tableau obtenu avec cette première réponse possible est alors le suivant :

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(e)	3 pair $\Rightarrow$ 4 pair		X	
(f)	3 pair $\Rightarrow$ 4 impair	X		
(g)	3 impair $\Rightarrow$ 4 pair	X		
(h)	3 impair $\Rightarrow$ 4 impair		X	

– La seconde réponse possible repose sur une propriété-en-acte que les étudiants peuvent posséder : ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est vraie* ≫. Cette propriété est correcte puisqu'une prémisse fausse rend vraie une implication matérielle. On obtient alors le tableau suivant où les énoncés (e) et (f) sont déclarés vrais en utilisant cette propriété :

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(e)	3 pair $\Rightarrow$ 4 pair	X		
(f)	3 pair $\Rightarrow$ 4 impair	X		
(g)	3 impair $\Rightarrow$ 4 pair	X		
(h)	3 impair $\Rightarrow$ 4 impair		X	

Celui-ci est la réponse correcte que nous attendons pour la seconde partie de la question 4.

– La troisième réponse possible repose cette fois-ci sur une propriété-en-acte fausse que les étudiants peuvent posséder : ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫. Le tableau dressé à partir de cette propriété est le suivant :

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(e)	3 pair $\Rightarrow$ 4 pair		X	
(f)	3 pair $\Rightarrow$ 4 impair		X	
(g)	3 impair $\Rightarrow$ 4 pair	X		
(h)	3 impair $\Rightarrow$ 4 impair		X	

Les énoncés (e) et (f) sont déclarés faux en utilisant cette propriété.

Notons que la conception de causalité (*"A implique B" n'a de sens et a fortiori n'est vraie que si A et B ont un lien de cause à effet*) peut être utilisée pour statuer sur les énoncés (e) et (f). En effet, l'énoncé (e) peut être déclaré faux car le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" n'est pas respecté. Alors que l'implication (f) sera déclarée vraie selon cette conception puisque le lien est cette fois-ci, vérifié.
Remarquons également que pour répondre à la question (f), les étudiants

peuvent utiliser l'équivalence logique entre une implication et sa contraposée et ainsi se débarrasser d'une implication à prémisse fausse. En effet, en utilisant ce résultat, on obtient que “3 *pair* ⇒ 4 *impair*” est équivalent à “4 pair ⇒ 3 impair”, une implication dont la prémisse est vraie. Il s'ensuit que cette implication est vraie puisque la prémisse et la conclusion le sont. Nous estimons que cette connaissance liée à la contraposée n'est disponible que pour les étudiants universitaires.

5.2 Présentation et analyse du second questionnaire

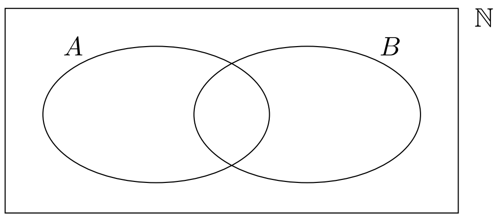
Nous choisissons de représenter ci-dessous nos différentes questions les unes à la suite des autres afin de donner une vue d'ensemble de notre questionnaire. Nous revenons ensuite en détails sur chacune d'elles.

Question 1
Considérons les ensembles suivants :

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\} \text{ et } B = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

Un élément de A vérifie donc la propriété « *être un nombre naturel pair* ». Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel pair, alors il appartiendra à l'ensemble A.
De la même manière, un élément de B vérifie la propriété « *être un nombre naturel multiple de 3* ». Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel multiple de 3, alors il appartiendra à l'ensemble B.

On a représenté ci-dessous les ensembles A, B et $\mathbb{N}$.



(a) Considérons l'énoncé :

“si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair.”

Dans le diagramme ci-dessus, hachurez les différentes zones qui rendent vrai cet énoncé.

(b) L'énoncé

"il existe un naturel x tel que si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

(c) L'énoncé

"pour tout naturel x, si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair."

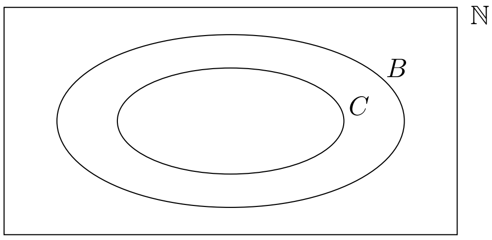
est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Question 2
Considérons les ensembles suivants :

$$B = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} \text{ et } C = \{0, 9, 18, 27, 36, \ldots\}$$

Un élément de B vérifie donc la propriété « *être un nombre naturel multiple de 3* ». Un élément de C vérifie la propriété « *être un nombre naturel multiple de 9* ». Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel multiple de 9, alors il appartiendra à l'ensemble C.

On a représenté ci-dessous les ensembles B, C et $\mathbb{N}$.



(a) Considérons l'énoncé :

"si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

Dans le diagramme ci-dessus, hachurez les différentes zones qui rendent vrai cet énoncé.

(b) L'énoncé

"il existe un nombre naturel x tel que si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

(c) L'énoncé

"pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

(d) Pouvez-vous établir un lien entre l'énoncé

"pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

et le fait que C soit inclus dans B ?
Expliquez votre réponse.

Question 1

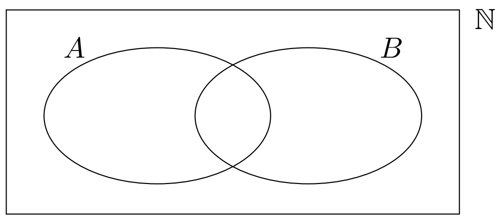
Cette question est divisée en trois parties et est accompagnée de l'introduction suivante :

Considérons les ensemble suivants :

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\} \text{ et } B = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$$

Un élément de A vérifie donc la propriété « *être un nombre naturel pair* ». Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel pair, alors il appartiendra à l'ensemble A.
De la même manière, un élément de B vérifie la propriété « *être un nombre naturel multiple de 3* ». Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel multiple de 3, alors il appartiendra à l'ensemble B.

On a représenté ci-dessous les ensembles A, B et $\mathbb{N}$.

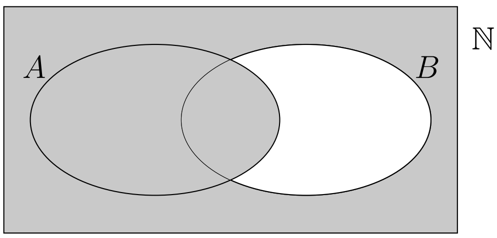


L'énoncé de la première partie de cette question est le suivant :

> (a) Considérons l'énoncé :
>
> "si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair."
>
> Dans le diagramme ci-avant, hachurez les différentes zones qui rendent vrai cet énoncé.

Cette question repose sur la tâche mathématique qui consiste à travailler sur la vérité d'une implication. Dans cette tâche, on se pose la question suivante : "*Pour quels objets x l'implication* $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ *est-elle vraie ? fausse ?*". Cette tâche est ici testée dans le cadre ensembliste. La question associée à cet exercice s'énonce comme suit : pour quels objets x l'implication "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est-elle vraie ?

Elle est vérifiée pour tous les éléments qui ne sont pas des naturels multiples de 3, c'est-à-dire pour tous les éléments de l'ensemble $\mathbb{N} \backslash B$. Ceci correspond au cas où la prémisse de chaque instance associée est fausse. Cet énoncé est également déclaré vrai pour tous les éléments vérifiant à la fois les propriétés "*être un naturel multiple de 3*" et "*être un nombre pair*", c'est-à-dire pour tous les éléments de l'ensemble $B \cap A$. Ceci correspond au cas où la prémisse et la conclusion de chaque instance associée sont vraies. La bonne réponse est donc le diagramme hachuré suivant. Dans celui-ci, la zone grisée représente tous les éléments x de $\mathbb{N}$ pour lesquels l'énoncé donné est vrai.



L'énoncé de la seconde partie de cette question est le suivant :

> (b) L'énoncé
>
> "il existe un naturel x tel que si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair."
>
> est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
> Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Nous demandons aux élèves et étudiants de se prononcer sur la vérité de la clôture existentielle de l'énoncé "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*". Cet énoncé admet au moins une instance vraie suite au schéma précédemment hachuré. Pour vérifier cette clôture, il suffit alors de prendre un élément dans les ensembles hachurés et de montrer que cet élément rend bien l'instance associée vraie. Prenons $x = 6$ par exemple. Cet élément appartient à l'ensemble $A \cap B$, c'est-à-dire qu'il vérifie à la fois la propriété "*être un naturel multiple de 3*" associée à l'ensemble B et la propriété "*être un nombre pair*" associée à l'ensemble A. Dès lors, par définition d'une implication matérielle, l'instance "*si 6 est un naturel multiple de 3 alors 6 est un nombre pair*" obtenue en substituant 6 à la variable x est vraie.

L'énoncé de la troisième et dernière partie de cette question est le suivant :

(c) L'énoncé "pour tout naturel x, si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair." est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Les étudiants doivent ici se prononcer sur la clôture universelle de l'énoncé "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*". Celle-ci est fausse puisqu'il existe au moins une instance fausse de cet énoncé ou dit autrement l'implication formelle "*pour tout naturel x, si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est fausse puisqu'elle admet un contre-exemple. Prenons $x = 9$ par exemple. Cet élément appartient à l'ensemble $B \backslash A$, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété "*être un naturel multiple de 3*" associée à l'ensemble B mais ne vérifie pas celle "*être un nombre pair*" associée à l'ensemble A. Dès lors, par définition d'une implication matérielle, l'instance "*si 9 est un naturel multiple de 3 alors 9 est un nombre pair*" obtenue en substituant 9 à la variable x est fausse.

Question 2

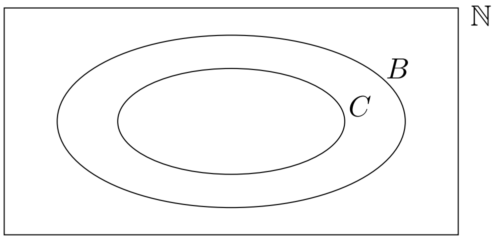
Cette question est divisée en 4 parties et est introduite de la sorte :

Considérons les ensemble suivants :

$$B = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} \text{ et } C = \{0, 9, 18, 27, 36, \ldots\}$$

Un élément de B vérifie donc la propriété ≪ *être un nombre naturel multiple de 3* ≫.
Un élément de C vérifie la propriété ≪ *être un nombre naturel multiple de 9* ≫.
Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel multiple de 9, alors il appartiendra à l'ensemble C.

On a représenté ci-dessous les ensembles B, C et $\mathbb{N}$.



L'énoncé de la première partie est le suivant :

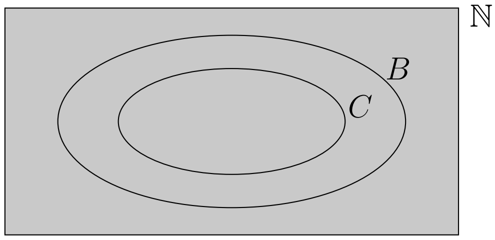
(a) Considérons l'énoncé :

"si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

Dans le diagramme ci-dessus, hachurez les différentes zones qui rendent vrai cet énoncé.

Cette question repose elle aussi sur la tâche mathématique qui consiste à travailler sur la vérité d'une implication. On se pose la question suivante : pour quels objets x l'implication "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est-elle vraie ?

Elle est vérifiée pour tous les éléments qui ne sont pas des naturels multiples de 9, c'est-à-dire pour tous les éléments de l'ensemble $\mathbb{N} \backslash C$. Ceci correspond au cas où la prémisse de chaque instance associée est fausse. Cet énoncé est également déclaré vrai pour tous les éléments vérifiant à la fois les propriétés "*être un naturel multiple de 9*" et "*être un naturel multiple de 3*", c'est-à-dire pour tous les éléments de l'ensemble $B \cap C$, c'est-à-dire l'ensemble C puisque $C \subset B$. Ceci correspond au cas où la prémisse et la conclusion de chaque instance associée sont vraies. La bonne réponse est donc le diagramme hachuré suivant.



Sur ce schéma, la zone grisée représente tous les éléments x de $\mathbb{N}$ pour lesquels l'énoncé donné est vrai. Il s'agit du cas où l'implication "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est universellement quantifiée. La clôture universelle ainsi que celle existentielle de l'énoncé donné sont donc toutes les deux vraies.

L'énoncé de la seconde partie de cette question est le suivant :

(b) L'énoncé

"il existe un nombre naturel x tel que si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Les étudiants doivent se prononcer sur la vérité de la clôture existentielle de l'énoncé "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*". Cet énoncé admet au moins une instance vraie suite au schéma précédemment hachuré. Pour vérifier cette clôture, il suffit alors de prendre un élément dans les ensembles hachurés et de montrer que cet élément rend bien l'instance associée vraie. Prenons $x = 9$ par exemple. Cet élément appartient à l'ensemble C, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété "*être un naturel multiple de 9*" associée à l'ensemble C. Cet élément vérifie également la propriété "*être un naturel multiple de 3*" associée à l'ensemble B puisque $C \subset B$. Dès lors, par définition d'une implication matérielle, l'instance "*si 9 est un nombre naturel multiple de 9 alors 9 est un nombre naturel multiple de 3*" obtenue en substituant 9 à la variable x est vraie.

La troisième partie de notre question s'énonce comme telle :

(c) L'énoncé

"pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Nous avons déjà montré dans la partie (a) de cette question que suite à l'inclusion d'ensembles $C \subset B$, toutes les instances de l'énoncé conditionnel "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" sont vraies. La clôture universelle associée à cette énoncé est donc vraie.

Cependant, les élèves du secondaire et surtout les étudiants universitaires seront peut-être plus enclins à faire la preuve mathématique suivante pour démontrer la vérité de cette clôture universelle.
Soit x un naturel. Supposons que x est multiple de 9, c'est-à-dire supposons que $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x = n \cdot 9$.
Nous devons montrer que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $x = 3 \cdot p$.
Par hypothèse, nous savons que $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x = n \cdot 9$. Il suffit de prendre $p = 3 \cdot n \in \mathbb{N}$, nous obtenons ainsi que $3 \cdot p = 3 \cdot 3 \cdot n = 9 \cdot n = x$.

Voici la quatrième et dernière partie de notre question 2 :

(d) Pouvez-vous établir un lien entre l'énoncé

"pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

et le fait que C soit inclus dans B ?
Expliquez votre réponse.

Avec cette question, nous espérons que les étudiants associeront la vérité de l'implication formelle proposée à la disposition des ensembles B et C dans le diagramme de Venn de notre question 2. En effet, suite à l'inclusion d'ensembles $C \subset B$, l'énoncé conditionnel "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" associé est vrai pour tous les éléments x de l'ensemble $\mathbb{N}$. Il s'agit alors du cas où l'implication "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est universellement quantifié et donc du cas où l'implication formelle "*pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est vraie.

Nous analysons les réponses apportées par les élèves du secondaire et celles données par les étudiants universitaires à nos deux questionnaires respectivement aux chapitres 6 et 8.

Chapitre 6

Un état des lieux des connaissances des élèves sur la notion d'implication

Dans ce chapitre, nous analysons les réponses que des élèves ont apportées à nos deux questionnaires élaborés à leur intention. Pour chaque formulaire, nous précisons tout d'abord les aspects les plus frappants du dépouillement et nous indiquons ensuite quelques éléments plus ponctuels et précis dans les réponses des élèves. Un bilan de cette expérimentation auprès des élèves est réalisé au chapitre suivant.

Nous avons diffusé deux questionnaires aux élèves du secondaire : un premier construit notamment à partir du sens langagier et du sens mathématique de l'implication et un second consacré au cadre de travail ensembliste de cette notion. Nous commençons notre analyse des réponses des élèves par ce premier formulaire. Nous exposons ensuite celles associées à notre second formulaire.

6.1 Diffusion du premier questionnaire

Nous avons distribué notre questionnaire auprès de 115 élèves de $5^{\text{ième}}$ ou $6^{\text{ième}}$ année. Nous pouvons classer ces élèves en deux groupes. Notre premier groupe est composé de 60 étudiants suivant quatre heures de mathématiques par semaine. Ils sont répartis comme tels : 17 sont inscrits en $5^{\text{ième}}$ année et 43 le sont en $6^{\text{ième}}$. Ce premier groupe est appelé dans la suite de ce document "Public 1". Notre second groupe est formé de 55 élèves inscrits en mathématiques fortes, c'est-à-dire suivant un cours à six périodes par semaine, éventuellement augmenté de deux heures de renforcement ou de préparation aux études supérieures. Nous avons interrogé respectivement 32 élèves de 5$^{\text{ième}}$ année dont 15 suivant un cours de renforcement [1] et 23 de 6$^{\text{ième}}$ année dont 18 suivent également un cours de complément mathématique [2]. Ce second groupe est nommé "Public 2" dans la suite. Nous dépouillons notre questionnaire en dressant pour chaque question, un tableau des réponses majoritairement obtenues. Afin d'avoir une vision globale des réponses des élèves du secondaire, nous choisissons de présenter celles-ci sans distinguer les deux groupes cités ci-avant. À travers quelques constats et commentaires sur ces productions des élèves, nous revenons ensuite sur quelques différences qui peuvent exister entre ces deux niveaux. En effet, le fait de distinguer les réponses de ces deux groupes est selon nous doublement motivé : c'est principalement en mathématiques fortes que nous avons trouvé le plus de référence à l'implication dans notre analyse des programmes relatée au chapitre 1 et suite à notre expérimentation auprès des enseignants présentée au chapitre 4, nous avons constaté que les élèves recevaient le plus souvent dans des cours de renforcement, un enseignement sur la logique des propositions et en particulier sur l'implication.

6.2 Réponses apportées par les élèves à notre premier questionnaire

Nous commençons par analyser les réponses des élèves à notre formulaire construit notamment à partir du sens langagier et du sens mathématique de l'implication. Nous avons présenté nos questions et quelques productions possibles des élèves face à celles-ci à la section 5.1, page 94.

Question 1

Commençons par la première partie de cette question dont l'énoncé est le suivant :

> En mathématiques, vous avez déjà rencontré une expression de la forme « *si P alors Q* ».
> (a) Que signifie, selon vous, ce type d'expression ?

1. Ces 15 élèves font tous partie d'une même classe et ont tous reçu un cours portant sur la logique des propositions. Leur enseignant nous a notamment signalé qu'il a dressé avec ceux-ci la table de vérité de "*si P alors Q*" et vu l'équivalence entre cette implication matérielle et sa contraposée.
2. Ces 18 élèves n'ont pas reçu a priori de cours sur la logique des propositions.

Nous dressons dans le tableau suivant, nos observations sur les productions des élèves face à cette question.

Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 115 interrogés)**
Existence d'une dépendance entre P et Q	30
≪ *Si P est vrai alors Q est vrai* ≫	22
Abstention	18
Réponse non pertinente	12
Q est la conséquence de P	9
L'expression ≪ *Si P alors Q* ≫ exprime une condition	9
P est une condition pour que Q existe	4
L'expression ≪ *si... alors...* ≫ est toujours vraie	5
L'expression ≪ *si P alors Q* ≫ est interprétée comme toujours vraie puisque l'élève fournit une explication (uniquement en français) sur les différentes distributions de valeurs de vérité de P et Q qui rendent vraie cette expression	2
Autres	3
≪ *Si P alors Q* ≫ est une implication	1

D'un point de vue global, le première aspect mis en évidence par 26% des élèves est qu'il existe une dépendance entre la prémisse P et la conclusion Q de l'expression "*si P alors Q*". Nous obtenons un pourcentage semblable en ce qui concerne les réponses que nous n'avons pas pu interpréter et les abstentions. En effet, 18 élèves (dont 10 dans le groupe 1 et 8 dans le groupe 2) n'ont pas répondu à notre question, tandis que 12 (respectivement 9 et 3 selon les groupes) nous ont donné une réponse que nous avons classée comme non pertinente. Le dernier aspect que nous relevons comme frappant dans les productions des élèves est que l'expression "*si P alors Q*" signifie pour 19% des étudiants interrogés que ≪ *Si P est vrai alors Q est vrai* ≫. Les autres réponses sont plus isolées et ne sont chacune présentes que chez moins de 8% des 115 élèves interrogés. Détaillons maintenant plus précisément les réponses des élèves.

– Trente élèves interrogés estiment qu'il existe une dépendance entre la prémisse P et la conclusion Q d'une implication. Cette tendance est plus marquée chez les élèves ayant 4 heures de mathématiques par semaine (public 1) que chez ceux en ayant au moins 6 par semaine (public 2) : nous recensons respectivement 21 cas sur 60 et 9 cas sur

55. Parmi ces 21 personnes, nous avons relevé que pour 15 d'entre-elles, la proposition Q dépend de la proposition P (4 élèves pour le public 2). Nous notons également que pour 4 de ces 21 élèves (aucun élève pour le public 2), P et Q sont dépendants l'un de l'autre et que Q ne peut être vérifié si P n'existe pas. Quatre autres étudiants du groupe "public 2" estiment qu'il existe une dépendance sans la caractériser et pour un individu ≪ *P dépend de Q et inversement* ≫. Pour ce dernier, puisque pour une grande majorité d'étudiants "*Si P alors Q*" signifie que ≪ *Q dépend de P* ≫, nous pensons que cet élève peut concevoir une implication comme une équivalence.

– Parmi les réponses des élèves que nous avons pu interpréter, l'expression "*si P alors Q*" signifie pour 22 d'entre eux que "*si P est vrai alors Q est vrai*". Ce constat est plus dominant pour le public 2. En effet, nous avons relevé 16 fois cette signification auprès des 55 élèves de ce niveau. Elle peut apparaître telle quelle (10 fois) ou dans des réponses comme ≪ *Si P est vrai, alors il en résulte obligatoirement [que] Q [est vrai]* ≫ (cité 3 fois), ≪ *A condition que P est vérifié alors Q l'est aussi* ≫ (vu 2 fois) ou ≪ *Si l'expression P est satisfaite alors Q peut s'appliquer* ≫ (lu une fois). En ce qui concerne le public 1, nous recensons explicitement 3 fois cette expression ≪ *Si P est vrai alors Q est vrai* ≫ et nous la retrouvons également dans des réponses telles que ≪ *Si quelque chose est correct alors il est logique que la deuxième chose soit correcte* ≫ (vu une fois) ou ≪ *Si on a P alors on a obligatoirement Q* ≫ (recensé deux fois).

Les réponses suivantes des élèves sont plus ponctuelles et ne sont chacune présentes que chez moins de 8% des élèves interrogés comme nous l'avons signalé.

– Neuf élèves font référence à une relation cause-conséquence entre P et Q puisqu'ils pensent que Q est justement la conséquence de P. Le nombre d'élèves dans ce cas est respectivement de 3 et 6 pour le public 1 et le public 2.
– Pour 9 élèves du public 1, l'idée de "condition" est très présente. Pour eux, l'expression "*Si P alors Q*", ≪ *c'est une condition* ≫ ou ≪ *cela exprime une condition* ≫. Quatre élèves du second public estiment justement que P est une condition pour que Q existe.
– Dans les réponses du public 2, cinq élèves mettent en avant l'aspect toujours vrai associé à une implication. Nous recensons cet aspect trois fois avec la mention ≪ *"si P alors Q" est toujours vrai* ≫ ou deux fois via le commentaire ≪ *"si P alors Q", c'est une affirmation qu'on ne peut contester* ≫. Cet aspect "toujours vrai" vient probablement du fait que des résultats théoriques écrits sous forme conditionnelle sont présentés

comme vrais dans les cours de mathématiques par le biais de définitions ou de théorèmes. Pour ces derniers, une preuve est très souvent réalisée et sert à établir la vérité. Nous retrouvons cette idée d'une implication toujours vraie dans la signification que donne deux autres étudiants de l'expression "*si P alors Q*". Ils ne mentionnent pas explicitement que cette expression est toujours vraie mais leur réponse met selon nous en évidence la vérité de "*Si P alors Q*" en précisant les différentes valeurs de vérité que P et Q peuvent prendre. Nous estimons que ces deux élèves citent donc les cas P vrai et Q vrai, P faux et Q vrai, P faux et Q faux via les explications ≪ *Si P est vérifié alors Q est toujours vérifié. Mais si P n'est pas vérifié alors Q est vérifié ou pas* ≫ et ≪ *Si P est vrai, Q l'est systématiquement. Si P est faux, Q peut être vrai. Si P est faux, Q peut être faux* ≫. Cela fait partiellement référence à la table de vérité de "*Si P alors Q*". Notons qu'aucune table de vérité n'a été dressée par ces deux élèves. Signalons que ces deux personnes font partie des 15 étudiants du public 2 qui ont suivi un cours sur la logique des propositions durant les heures de renforcement mathématique.
– Parmi les trois réponses que nous avons classées comme "Autres", notons qu'un élève du premier public et un du second estiment que ≪ *si P est vérifié alors Q l'est également et que si P n'est pas vérifié alors Q ne l'est pas non plus* ≫. Nous associons la première partie de cette réponse à "*si P est vrai alors Q est vrai*", mais la seconde partie, nous fait penser que ces élèves ont peut-être une conception fausse de la contraposée puisqu'il estime que "*si P est faux alors Q est faux*" ou encore que "*si non P est vrai alors non Q est vrai*". Un autre étudiant du premier public considère cette expression "*si P alors Q*" comme ≪ *[c'est] une égalité* ≫, sans toutefois détailler son affirmation.

Considérons maintenant le seconde partie de notre question dont l'énoncé est le suivant :

(b) Donnez des expressions qui signifient la même chose que ≪ *si P alors Q* ≫.

Nous indiquons ci-dessous les expressions données par les élèves en citant le nombre de fois où elles apparaissent dans les copies.

Expressions relevées	**Nombre de fois qu'une telle expression apparaît sur 115 élèves interrogés**
Aucune expression donnée	48
Donne des expressions s'écrivant exactement sous la forme "*si P alors Q*" en remplaçant P et Q par des propositions au choix, souvent basée sur la vie quotidienne	21
$P \Rightarrow Q$	19
P si et seulement si Q	6
P implique Q	5
P entraîne Q	5
Q est la conséquence de P	5
À condition de P alors Q	4
Si Q alors P	4
Q se réalise si la condition P est remplie	3
$\neg P \Rightarrow \neg Q$	3
$P = Q$	2
P donc Q	1
P d'où Q	1
Dans le cas de P alors Q	1
Si on sait que P alors on peut dire que Q	1
Quand on a P, d'office on a Q	1
$P \Leftrightarrow Q$	1

La première constatation qui apparaît dans les copies des élèves est que près de 42% du public s'abstient. Plus précisément, 27 élèves sur 60 issu du public 1 et 21 sur 55 pour le public 2 ne nous donnent pas d'expressions qu'ils jugent de même signification que "*si P alors Q*". Signalons également que 21 étudiants (dont 17 du premier groupe et respectivement 4 du second), soit 18% du public interrogé, nous donnent des exemples de phrases s'écrivant exactement sous la forme "*si P alors Q*" en remplaçant P et Q par des propositions de leur choix. Ils donnent par exemple des expressions comme "*si j'ai un emploi alors je gagne de l'argent*" ou "*si je vais à l'école alors je m'ennuie*". Ces exemples sont selon nous peu intéressants. Nous préférons nous concentrer sur des expressions dont la formulation qu'elle soit langagière ou symbolique, signifient la même chose que "*si P alors Q*" tout en étant différente. Le fait que 18% du public nous proposent des expressions utilisant exactement la formulation "*si P alors Q*" avec des exemples de propositions particuliers, ainsi que le fort taux d'abstention (42%) reflètent pour nous des

difficultés que les élèves ont pu éprouver pour répondre à cette question. En effet, ces deux catégories de réponses totalisent près de 60% des élèves.
Les 62 expressions que nous relevons et jugeons comme intéressantes sont données par un total de 46 élèves (répartis respectivement comme 16 issus du groupe 1 et 30 du groupe 2). Parmi ceux-ci, 15 élèves nous donnent deux expressions alors que 32 n'en fournissent qu'une seule. Via ces expressions, 19 élèves font mention de la notation symbolique $P \Rightarrow Q$, ce qui représente 16,5% des 115 élèves interrogés et près d'un tiers des 62 expressions jugées selon nous intéressantes. Ce symbole "$\Rightarrow$" atteste selon 5 étudiants du groupe 1 et 14 du groupe 2 que "$P \Rightarrow Q$" a la même signification que "*si P alors Q*". Les autres expressions données par les élèves sont moins récurrentes. En effet, celles-ci ne sont recensées qu'à hauteur de 5% voire moins parmi les 115 personnes interrogées ou encore à hauteur de 9,6% parmi les 62 expressions relevées. Avant de préciser ces différentes expressions nous tenons à signaler deux derniers constats apparaissant dans ce tableau :

– l'aspect langagier est fortement présent dans la formulation de celles-ci par rapport à l'aspect symbolique. En effet, plus de la moitié des expressions données, plus précisément 37 parmi les 62 relevées (soit 60%) dans les questionnaires, sont exprimées à partir du langage. Cette majorité est présente auprès des deux publics : 14 fois sur 21 pour le groupe 1 et 23 fois sur 41 pour le groupe 2.
– toutes les expressions jugées par les élèves équivalentes à "*si P alors Q*", le sont d'un point de vue langagier et non logique. En effet, aucune expression correcte et équivalente d'un point de vue logique à "*Si P alors Q*" comme $\neg P \vee Q$ ou $\neg Q \Rightarrow \neg P$ n'apparaît dans les réponses des élèves. Néanmoins, nous trouvons une trace de cette équivalence logique via une conception fausse de la contraposée, à savoir "$\neg P \Rightarrow \neg Q$" donnée par trois élèves. Celle-ci est donc peu présente vu le peu d'individus la citant. Pour information, signalons que ces trois élèves font partie du groupe ayant suivi un cours de logique des propositions durant les heures de renforcement mathématique.

Détaillons maintenant plus précisément les réponses des élèves. Nous venons de remarquer que ceux-ci ne donnent que des expressions qu'ils jugent équivalentes à "*si P alors Q*" d'un point de vue langagier et non logique, et que de plus, la majorité de celles-ci sont formulées à partir du langage. Plus précisément, nous trouvons dans celles-ci :

– des références qui peuvent renforcer la conception de temporalité (≪ *Dans "A ⇒ B", A doit être vérifié avant B et A se situe dans le temps avant B* ≫) comme ≪ *P implique Q* ≫ (5 fois), ≪ *P entraîne Q* ≫ (5 fois), ≪ *à condition de P alors Q* ≫ (4 fois), ≪ *P donc Q* ≫ (1 fois) ou ≪ *P d'où Q* ≫.

- des phrases telles que « *Q est la conséquence de P* » (5 fois) ou « *Q se réalise si la condition P est remplie* » (3 fois) pour lesquelles l'écriture inverse l'ordre d'apparition entre la prémisse P et la conclusion Q par rapport à "*Si P alors Q*".
- six formulations (une dans le groupe 1 et 5 dans le groupe 2) affirmant que « *P si et seulement si Q* » a une signification identique à "*Si P alors Q*". Ces six élèves confondent apparemment d'une point de vue langagier, une implication avec une équivalence. La confusion entre une implication et sa réciproque peut également apparaître dans le langage puisque pour 4 étudiants du second groupe, « *Si Q alors P* » est équivalent à "*Si P alors Q*".

L'utilisation de symboles mathématiques pour exprimer des expressions signifiant la même chose que "*Si P alors Q*" n'est pas en reste car elle apparaît 25 fois parmi les 62 expressions présentes dans les formulaires dépouillés. Nous relevons :

- que cette utilisation se concentre essentiellement sur le symbole "$\Rightarrow$" (19 apparition parmi 62 expressions) via la notation "$P \Rightarrow Q$".
- des expressions symbolique plus rares et surpenantes comme « $P = Q$ » pour laquelle nous pensons que les deux élèves l'ont peut-être confondu avec « $P \Leftrightarrow Q$ », ce qui conduit à la confusion entre une équivalence et une implication. Nous trouvons d'ailleurs une trace de l'équivalence via l'expression « $P \Leftrightarrow Q$ », sensée être équivalente à "*si P alors Q*".

Intéressons-nous maintenant à la troisième et dernière partie de cette première question. À travers celle-ci, nous désirons obtenir des exemples de propriétés mathématiques de la forme "*Si P alors Q*" que les élèves connaissent.

(c) Citez quelques propriétés que vous avez croisées dans votre cours de mathématique et qui s'énoncent sous la forme « *si P alors Q* ».

Parmi les 115 élèves interrogés, 50 d'entre-eux ne répondent pas à cette question, ce qui nous donne un taux d'abstention de près de 43%. Parmi les 65 élèves qui répondent, nous recensons un total de 75 exemples donnés. Parmi ceux-ci 9 soit 12% des propriétés données, sont erronés ou n'ont pas de sens. Dans les 66 autres, nous avons rencontré de nombreux exemples ponctuels. En conséquence, nous ne les présentons pas tous et préférons nous concentrer sur quelques-uns cités plusieurs fois dans les productions des élèves. Nous classons les exemples donnés selon deux catégories : une première relative à une utilisation de l'implication dans des résultats théoriques (73% des propriétés données) et une seconde plus axée sur une utilisation de l'implication qui pourrait apparaître dans des exercices (27% des exemples fournis). Dans les deux cas, l'implication apparaît comme un outil du langage pour s'exprimer.

Des exemples associés à des résultats théoriques :

- définition de la continuité d'une fonction f en un réel :
  « *f est continue en a si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ » (cité 5 fois)
- énoncé du théorème de Pythagore (donné 4 fois) et sa réciproque (citée 2 fois)
- « *si dans un déterminant, deux rangées parallèles sont identiques alors ce déterminant est nul* » (cité 3 fois)
- « *si une droite est parallèle à une droite d'un plan alors cette droite est parallèle au plan* » (cité 3 fois) et « *si une droite est parallèle à un plan alors elle est parallèle à une droite de ce plan* » (recensé une fois)
- « *si un triangle a un angle droit alors ce triangle est rectangle* » (vu 3 fois)
- « *si un triangle a 3 côtés de même longueur alors il est équilatéral* » (cité 3 fois)
- donne la définition de la limite d'une fonction f en a qui est apparemment b :
  « $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, [\forall x \in domf] : |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ » (citée 2 fois)
- « *si un quadrilatère a 4 angles droits et 4 côtés de même mesure alors c'est un carré* » (recensé 2 fois)
- « *si une rangée d'une matrice est nulle alors son déterminant est nul* » (cité 1 fois)
- « *si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors toute primitive de $f(x)$ est de la forme $F(x) + c$* » (cité 1 fois)

Des exemples associés à une utilisation de l'implication dans des exercices :

- « *si* $\Delta > 0$ *alors* $ax^2 + bx + c$ *admet deux racines* » (cités quatre fois)
- « *si* $x \neq 0$ *alors* $\dfrac{1}{x}$ *existe* » (cité deux fois)
- « *si* $a \cdot b = 0$ *alors* $a = 0$ *ou* $b = 0$ » (cité deux fois)
- « *si* $x = 1$ *alors* $x^2 = 1$ » (cité deux fois)
- « *si* $x = 4$ *alors* $x^2 = 16$ *et si* $x^2 = 16$ *alors* $x = \pm 4$ » (cité une fois)
- « *si* $a = b$ *et* $a = c$ *alors* $b = c$ » (cité une fois)
- « *si* $0 < x < 1$ *alors* $0 < x^2 < 1$ » (cité une fois)
- « *si* $a > 0$ *et* $b < 0$ *alors* $a \cdot b < 0$ » (cité une fois)
- « *si* $x > 0$ *alors* $\sqrt{x^2} = x$ » (cité une fois)
- « *si* $x^2 \geqslant 4$ *alors* $x \geqslant 2$ *ou* $x \leqslant -2$ » (cité une fois)
- « *si* $x \in \mathbb{R}^+$ *alors* $\sqrt{x}$ *n'existe pas* » (cité une fois)

La grande majorité des exemples fournis s'expriment sous la forme langagière "si… alors…" (68 cas relevé sur 75, soit 91% des exemples donnés). Cependant, une autre formulation langagière associée à une implication apparaît dans les exemples cités : il s'agit de l'expression "… si …" dans l'énoncé de la définition de la continuité d'une fonction f en un réel. Nous avons relevé cette expression 5 fois sur 75 exemples donnés, soit un peu plus de 6%. Presque tous les exemples recensés sont formulés avec des mots français, seuls deux élèves du groupe 2 donnent une propriété totalement formulée à l'aide de symboles mathématiques, il s'agit de la définition de la limite d'une fonction f en un réel a. Ils utilisent notamment le symbole "$\Rightarrow$". Ce symbole est donc présent deux fois sur 75 exemples donnés, ce qui correspond à un peu plus de 2%.

Question 2

Cette question est divisée en trois parties, chacune illustrant une figure de raisonnement. L'énoncé de la première partie est rappelé dans l'encadré suivant.

(a)

<u>Affirmations :</u>
– S'il pleut alors je prends mon parapluie.
– Je prends mon parapluie.
<u>Conclusion :</u>
Donc, il pleut.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

Dressons quelques constatations qui apparaissent majoritairement dans les réponses formulées par les 115 élèves interrogés.

Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 115 interrogés)**
La case "vraie" est cochée	43
La case choisie est "fausse"	39
La case liée à un manque d'informations est cochée	33
Abstention	0

La bonne réponse pour cette question est de choisir la case “fausse”. Ce tableau nous informe que seuls 34% des élèves (soit 39 personnes sur 115 interrogées) choisissent cette dernière. En effet, la case “vraie” est le premier aspect qui ressort de ce tableau : 43 élèves cochent cette case, ce qui correspond à 37% des réponses alors que 39 autres préfèrent choisir la case “fausse” (34% des réponses). Enfin, 33 étudiants (29%) estiment ne pas disposer de suffisamment d'informations pour savoir si la conclusion établie à partir des deux affirmations est correcte ou non. Bien que la réponse “vraie” soit légèrement dominante, les pourcentages obtenus pour chaque case cochée sont très proches. Il n'y a pas de majorité écrasante.
Détaillons maintenant les justifications associées à la case “**vraie**” :

- 38 élèves (33% des réponses) estiment que la conclusion établie à partir des deux affirmations est vraie. En dépouillant leurs justifications, nous nous rendons compte que ces élèves interprètent l'implication “*s'il pleut alors je prends mon parapluie*” comme une équivalence. Il s'ensuit alors qu'en prenant le parapluie, la seule déduction possible est qu'il pleut. Cette confusion entre une implication et une équivalence est partagée dans des proportions semblables (environ un tiers) par les deux publics que nous avons interrogés : 22 fois sur 60 élèves dans le groupe 1 et 16 fois sur 55 étudiants dans le groupe 2.
- 5 étudiants (3 et 2 selon les groupes) apportent des justifications pour ce choix de case “vraie” que nous n'estimons pas intéressants à relever.

Détaillons les réponses fournies avec le choix de case “**fausse**”. 39 personnes (24 pour le groupe 1 et 15 pour le groupe 2) cochent cette case.

- La justification apportée est dans 20 cas (respectivement 11 et 9 selon les groupes) ≪ *c'est faux, il peut prendre son parapluie et il ne pleut pas* ≫. Certains élèves peuvent ajouter des adverbes comme “*forcément*” (relevé 11 fois) ou “*nécessairement*” (cité deux fois) à la justification ≪ *il ne pleut pas* ≫.
- Nous distinguons également la justification ≪ *ce n'est pas parce que je prends mon parapluie qu'il pleut* ≫ chez 15 élèves (12 dans le groupe 1 et 3 dans le groupe 2). L'un d'eux ajoute même que ≪ *ça ne va que dans un sens [sous-entendu, c'est une implication et pas une équivalence]* ≫. Cette justification fait écho à la conception de causalité (“*A implique B n'a de sens, et a fortiori n'est vraie, que lorsque A et B ont un lien de cause à effet entre elles*”, ou dit autrement et c'est ce que l'on retrouve dans les productions des élèves “*A implique B est fausse puisque A n'est pas la cause de B*”). À travers l'explication ≪ *ce n'est pas parce que je prends mon parapluie qu'il pleut* ≫, la personne sous-entend que prendre son parapluie n'est pas la cause de la pluie et c'est l'absence d'un lien causal qui provoque la réponse fausse. Remarquons que via

cette justification causale, nous ne pensons pas que les élèves établissent que la conclusion est fausse à partir des deux affirmations mais plutôt qu'il interprète la seconde affirmation "*je prends mon parapluie*" avec la conclusion "*donc, il pleut*" comme l'implication "*si je prends mon parapluie alors il pleut*" et c'est celle-ci précisément qu'ils déclarent fausse parce que sans lien causal entre la prémisse et la conclusion. Néanmoins, 6 personnes parmi les 14 élèves mettant en avant un lien de cause à effet, répondent que ≪ *ce n'est pas parce que l'on prend son parapluie qu'il va forcément pleuvoir, on ne peut pas conclure aussi vite* ≫, ceux-ci semblent donc bien prendre en compte le découpage affirmations et conclusion du raisonnement proposé.
– 4 élèves (2 dans chaque groupe) ne justifient pas cette case "fausse" choisie avec une explication que nous jugeons digne d'être relevée.

32 personnes (14 pour le premier groupe et 19 pour le second) cochent la case relative à un **manque d'informations** pour s'exprimer sur la conclusion établie. Différentes raisons sont mises en avant par les étudiants cochant la case relative à un manque d'informations pour s'exprimer. Nous relevons majoritairement que :

– ≪ *Je prends mon parapluie et soit il pleut, soit il ne pleut pas, on ne peut rien dire [sous-entendu on ne peut pas conclure]* ≫ (cité 8 fois par le groupe 2). Ces élèves ne semblent se baser que sur les deux affirmations pour formuler leur réponse. Il est vrai de dire qu'à partir de celles-ci, il peut en effet pleuvoir ou non. Mais, ils ne prennent pas en compte la conclusion "donc, il pleut". Alors qu'en la prenant en compte, il aurait pu conclure que cette conclusion établie est erronée par la configuration "*je prends mon parapluie et il ne pleut pas*".
– ≪ *On sait que "s'il pleut alors je prends mon parapluie" mais on ne dit pas que "si je prends mon parapluie alors il pleut", il manque cette affirmation* ≫. Cette raison est invoquée par 7 élèves (un seul pour le groupe 1 et 6 pour le second groupe).
– Neuf étudiants (6 pour le groupe 1 et 3 pour le groupe 2) invoquent un manque d'informations liées à la météo : ≪ *on peut prendre son parapluie sans qu'il ne pleuve lorsqu'il y a du soleil par exemple [...] on ne dit rien sur la météo* ≫, ≪ *il peut prendre son parapluie parce qu'il neige* ≫, ...
– Une dernière raison majoritaire que nous avons relevée auprès de 7 élèves (5 du groupe 1 et 2 du groupe 2) est que ≪ *prendre son parapluie par précaution n'est pas dit* ≫.
– Les deux dernières raisons citées majoritairement par les élèves sont les moins intéressantes car elles font référence à des connaissances ou constatations issues du monde extérieur.

En résumé, 34% des élèves interrogés cochent la case “fausse” attendue pour cette question. Cependant, dans ces 34%, seuls 17,4% justifient correctement leur choix avec l’explication “*je prends mon parapluie et il ne pleut pas*”. Nous remarquons également que 33% des élèves cochent la case “vraie” et interprètent dans leurs justifications l’implication donnée comme une équivalence.

L’énoncé de la seconde partie de notre question est le suivant :

(b)

Affirmations :
– Si la propriété X est vérifiée alors la propriété Y est vérifiée.
– La propriété Y n’est pas vérifiée.
Conclusion :
Donc, la propriété X n’est pas vérifiée.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d’assez d’informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

Nous avons relevé majoritairement les réponses suivantes :

Réponses des élèves	**Nombre d’élèves dans ce cas (sur 115 interrogés)**
La case “vraie” est cochée	46
La case choisie est “fausse”	34
La case liée à un manque d’informations est cochée	32
Abstention	3

Les cases “vraie”, “fausse” et relative à un manque d’informations sont cochées respectivement par 40% ; 30% et 28% des élèves. Nous relevons 3 personnes qui s’abstiennent, soit 2% d’abstention. La case “vraie” qui est la réponse correcte attendue, domine donc légèrement les réponses des élèves. Analysons en détails les différentes justifications associées par les élèves à cette question.
La case “**vraie**” est cochée par 46 élèves dont 21 du groupe 1 et 25 du groupe 2. Nous relevons :
– Parmi ces élèves, 21 (dont 10 du groupe 1 et 11 du groupe 2) ne justifient pas le choix “vrai” effectué avec l’explication qu’ils donnent.

– 16 élèves (9 pour le premier groupe et 7 pour le second) nous donnent des explications peu convaincantes. Ils ne font essentiellement que répéter ce qui est dit dans le raisonnement proposé : « *On dit que "si la propriété X est vérifiée alors la propriété Y est vérifiée". La propriété Y n'est pas vérifiée, donc X ne l'est pas non plus. La conclusion établie est donc vraie* ». Cependant, ces élèves pensent peut-être que le raisonnement par contraposition est naturel puisque l'implication naturelle peut selon Deloustal-Jorrand [4, p. 23] être un outil de déduction de la logique naturelle. Nous manquons cependant d'informations pour confirmer cet aspect.
– Cinq étudiants du second groupe identifient que « *de l'affirmation "si X est vérifié alors Y est vérifié", on peut dire que "si Y n'est pas vérifié alors X ne l'est pas non plus"* [dont deux qui apportent selon eux une justification à ce passage, mais en réalité ne disent rien de plus que ce qui est dit avant] *puisque si X est vérifié, Y l'est aussi* ». L'équivalence entre l'implication proposée en première affirmation et sa contraposée n'est jamais explicitement mentionnée et le mot "contraposée" n'apparaît jamais dans les copies. Il est juste dit pour les 5 élèves susmentionnés que "*si Y n'est pas vérifié alors X ne l'est pas non plus*" est issu de "*si X est vérifié alors Y est vérifié*" mais sans plus d'informations. Ces deux propositions sont-elles équivalentes selon les élèves ?
– Les quatre autres explications (2 dans chaque groupe) liées au choix "vraie" diffèrent de la précédente. Nous relevons notamment que pour deux élèves du premier groupe, il interprète l'implication donnée par la première affirmation comme une équivalence et identifie ensuite que "*si Y est vérifiée alors X est vérifiée*", c'est exactement "*si Y n'est pas vérifiée alors X n'est pas vérifiée*", ce qui conduit à cocher la case "vraie". La deuxième partie de cette justification repose sur une conception fausse de la contraposée.

34 élèves (21 dans le groupe 1 et 13 dans le groupe 2) estiment que la conclusion établie à partir des deux affirmations est erronée ou encore qu'elle est "**fausse**". Nous distinguons :

– 17 personnes (respectivement 11 et 6 pour les deux groupes) argumentent que « *la propriété X peut être vérifiée sans que la propriété Y ne le soit* ». Cette argumentation contredit alors la première affirmation donnée. En effet, le cas de figure "*la propriété X est vérifiée*" et "*la propriété Y n'est pas vérifiée*" rend faux l'implication fournie comme première affirmation puisque la prémisse est vraie et que la conclusion est fausse. Ces 17 élèves ne semblent pas tenir compte de cette première affirmation pour répondre que la conclusion établie est fausse.
– 11 étudiants (6 et 5 selon les groupes) ne justifient pas le choix de case

"faux" avec l'explication donnée.
- Les autres justifications associées à cette case "fausse" ne sont souvent propres qu'à un seul étudiant et nous jugeons non pertinent de les présenter vu leur petit nombre.

Intéressons-nous aux diverses raisons apportées par les élèves pour justifier un **manque d'informations**. Cette case a été cochée par 32 personnes dont 15 dans le groupe 1 et 17 dans le groupe 2. Nous relevons que :
- pour 11 élèves (respectivement 8 et 3 dans les deux groupes), il n'est pas précisé dans l'énoncé "*si la propriété Y n'est pas vérifiée alors la propriété X n'est pas vérifiée*". Ils n'identifient donc pas que ce soit-disant manque peut s'obtenir avec la contraposée de la première affirmation. Cette absence est partagée par les deux publics (respectivement 8 et 3 élèves) et est formulée dans 9 cas sur 11 en français. Deux étudiants du groupe 2, ayant suivi un cours sur la logique des propositions, utilisent une écriture symbolique pour nous informer de ce manque d'informations : ≪ [ils nomment respectivement P la proposition "*la propriété X est vérifiée*" et Q "*la propriété Y est vérifiée*"] *on a $P \Rightarrow Q$ mais il manque l'information $\neg Q \Rightarrow \neg P$ pour que ce [raisonnement] soit juste* ≫.
- pour 11 élèves (5 pour le groupe 1 et 6 pour le groupe 2) on donne l'information que "*si X est vérifié alors Y est vérifié*" mais on ne dit rien sur sa réciproque. Ceci apparaît dans des remarques comme ≪ *on ne dit rien sur "si Y est vérifié alors X est vérifié"* ≫ (4 et 3 fois selon les groupes) ou ≪ *Y est dépend de X et non l'inverse* ≫ (1 et 3 fois selon les groupes). Les étudiants ne précisent pas ce qu'ils ont l'intention de faire avec cette information manquante mais nous pensons que celle-ci peut par exemple être nécessaire dans la conception ($Y \Rightarrow X$ est équivalent à $\neg Y \Rightarrow \neg X$) fausse sur la contraposée d'une implication laquelle pouvant conduire à cocher la case "vraie" de cette question.
- 7 personnes (1 et 6 selon les groupes) relèvent des arguments que nous classons dans la catégorie "*les propriétés ne sont pas explicitées et on ne peut se prononcer sans les connaître*".
- 3 étudiants (1 et 2 selon les groupes) ne donnent pas d'explications quant à des informations manquantes pour se prononcer.

En résumé, pour cette question, nous retenons que 40% des élèves cochent la case "vraie" mais que peu de justifications rigoureusement correctes accompagnent ce choix. En effet, seuls 5 personnes parmi ces 40% (soit un peu plus de 4%) fournissent une explication qui est partiellement juste : ils identifient que l'énoncé conditionnel "si la propriété Y n'est pas vérifiée alors la propriété X n'est pas vérifié" est issu de l'implication donnée "si la propriété X est vérifié alors la propriété Y est vérifiée", mais ils ne justifient pas ce passage. Estiment-ils ces deux propositions équivalentes ? Remarquons également que le mot "*contraposée*" n'apparaît jamais dans les copies.

Rappelons l'énoncé de la troisième et dernière partie de notre question :

(c)

<u>Affirmations :</u>
– Si Doc voyage dans le temps alors sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure.
– Doc ne voyage pas dans le temps.
<u>Conclusion :</u>
Donc, sa DeLorean n'atteint pas la vitesse de 88 miles par heure.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

Suite au dépouillement des réponses des 115 élèves à cette question, nous listons les constatations suivantes :

Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 115 interrogés)**
La case "vraie" est cochée	46
La case liée à un manque d'informations est cochée	33
La case choisie est "fausse"	32
Abstention	4

La réponse correcte pour cette question est la case "fausse". Celle-ci est choisie par 28% des élèves. Cependant, ce n'est pas la case majoritairement choisie par les étudiants. En effet, 40% préfèrent opter pour la case "vraie" et 28,6% pour celle relative à un manque d'information pour ce prononcer. Enfin, nous relevons que 4 personnes (soit 3,4%) s'abstiennent. Analysons maintenant les différentes justifications apportées par les élèves pour les cases choisies.

46 personnes (respectivement 27 pour le public 1 et 19 pour le public 2) estiment que la conclusion établie à partir des deux affirmations est **vraie**.

– 28 élèves (15 pour le groupe 1 et 13 pour le groupe 2) mettent en évidence dans leur justification une conception erronée sur la contraposée de l'implication : $\neg A \Rightarrow \neg B$ est équivalent à $A \Rightarrow B$.

Cette conception erronée apparaît 22 fois (15 pour le groupe 1 et 7

pour le groupe 2) sous forme langagière dans les copies : ≪ *La première affirmation dit que "Si Doc voyage dans le temps alors sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure". De là, si Doc ne voyage pas dans le temps alors sa DeLorean n'atteint pas la vitesse de 88 miles par heure. La conclusion est donc vraie* ≫.
Dans le second groupe, 6 élèves nomment P la proposition "*Doc voyage dans le temps*" et Q celle "*sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure*". Quatre d'entre-eux rédigent ensuite leurs justifications en français tandis que deux autres utilisent des notations symboliques. Nous relevons que ≪ *Si P est faux, Q ne peut être que faux puisque Q ne peut être vrai que si P est vrai. [On dit que] P est faux donc Q est forcément faux* ≫ (3 fois) et ≪ *puisque $P \Rightarrow Q$ et que P n'est pas vérifié alors Q n'est par conséquent pas vérifié* ≫ (1 fois). Nous associons également ces deux justifications à la conception erronée sur la contraposée d'une implication citée ci-dessus. Dans le premier exemple, les trois étudiants semblent dans un premier temps réduire la première affirmation "*si P alors Q*" (pour reprendre leur notation) à la forme "*si P est vrai alors Q est vrai*". Selon nous, ils utilisent ensuite la conception erronée sur la contraposée pour affirmer que "*si P est faux alors Q est faux*", ce qui les conduit à cocher "vrai". Dans le second exemple, nous pensons que de la première affirmation l'étudiant retient de $P \Rightarrow Q$ que "P entraîne Q" et de là, le fait que P n'est pas vérifié entraîne par conséquent que Q n'est pas vérifié. Comme mentionné ci-dessus, cette conception erronée sur la contraposée apparaît dans deux copies du groupe 2 sous une forme symbolique : ≪ *[On a] $P \Rightarrow Q$ [les élèves notent ensuite sans explications sur l'existence d'un lien entre les deux énoncés que] $\neg P \Rightarrow \neg Q$ [...] [et cochent la case "vraie"]* ≫.
- 8 justifications (4 pour chaque groupe) sont absentes.
- parmi d'autres justifications pouvant conduire à répondre "vrai", citons par exemple ces explications en lien avec le monde de tous les jours : ≪ *Doc ne voyage pas, il ne conduit pas, la voiture n'avance pas et ne serait [donc] pas atteindre 88 miles par heure* ≫ (vu 3 fois dans le groupe 1).

Listons quelques **informations** que les 33 élèves (13 pour le groupe 1 et 20 pour le groupe 2) estiment **manquantes** pour se prononcer :
- ≪ *On ne sait pas si sa voiture peut atteindre les 88 miles par heure sans qu'il ne voyage dans le temps* [avec parfois l'ajout] *ou même ailleurs* ≫ (cité 15 fois et plus précisément 6 pour le groupe 1 et 9 pour le groupe 2) ;
- ≪ *Doc ne voyage pas donc on sait pas pour la vitesse de la voiture* ≫ (recensé 3 fois dans le groupe 1, cette explication est en lien avec le monde

réel en sous-entendant que Doc ne voyage pas au sens large et qu'il ne conduit pas et donc on ne connait pas la vitesse de la voiture) ;
- ≪ *On donne "Si Doc voyage dans le temps alors sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure" mais pas "Si sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure alors Doc voyage dans le temps"* ≫ (vu 3 fois dans le groupe 2) ;
- ≪ *On ne nous dit pas [dans l'énoncé] "si Doc ne voyage pas dans le temps alors sa DeLorean n'atteint pas la vitesse de 88 miles par heure", il manque cette information* ≫ (donné deux fois dans le groupe 2).
- 5 élèves (3 et 2 selon les groupes) ne donnent pas d'explications.

Nous ne dressons pas le reste des renseignements que les élèves jugent absents pour se prononcer car ceux-ci ne sont tous relevés qu'une seule fois ou sont liés à un non visionnage du film "*Back to the future*".
Parmi les 32 élèves (17 et 15 selon les groupes) qui cochent la case "**fausse**", nous identifions que :
- 13 personnes (7 pour le groupe 1 et 6 pour le groupe 2) justifient avec la réponse correcte que nous attendions : ≪ *Doc ne voyage pas dans le temps et sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure* ≫.
- 13 élèves (6 et 7 selon les groupes) apportent une justification qui semblent contredire le choix effectué.
- les 6 autres étudiants livrent une explication que nous estimons non pertinente à relever ou n'en donnent pas.

En résumé, 28% des élèves cochent la case "fausse", la réponse correcte à cette question. Parmi ces 28%, seuls 11% justifient correctement leur choix avec l'explication "*Doc ne voyage pas dans le temps et sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure*". Nous remarquons également que 24% des élèves choisissent la case "vraie" en mettant en évidence dans les justifications la conception erronée sur la contraposée d'une implication matérielle : $\neg A \Rightarrow \neg B$ est équivalent à $A \Rightarrow B$, où A et B sont deux propositions.

Question 3

L'énoncé de cette question est le suivant :

Donnez tous les nombres naturels n entre 0 et 20 qui vérifient la propriété suivante : ≪ Si n est un nombre pair, alors $n+1$ est un nombre premier ≫. Détaillez votre raisonnement.

Relevons les réponses majoritaires que les deux publics interrogés ont fournies. Nous dressons nos constatations dans le tableau suivant :

	Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 115 interrogés)**
(1)	Donne tous les naturels pairs de l'intervalle $[0, 20]$ excepté 0, 8, 14 et 20	42 (dont 21 cas sans explications)
(2)	Donne tous les naturels pairs de l'intervalle $[0, 20]$ excepté 8, 14 et 20 (0 vérifie la propriété car 1 est considéré comme premier)	34
(3)	La réponse est constituée uniquement de calculs sans explications (l'ensemble de solutions n'est notamment pas donné)	20
(4)	Autres réponses (toutes basées uniquement sur les nombres pairs)	12
(5)	Abstention	6
(6)	Donne tous les naturels pairs de l'intervalle $[0, 20]$ sauf quelques candidats parmi 0, 8, 14 et 20 mais mentionne les nombres impairs	1
(7)	Donne tous les naturels de l'intervalle $[0, 20]$ excepté 0, 8, 14 et 20 (la réponse correcte à la question)	0

Au total pour cette question, nous relevons que 88 élèves sur 115 interrogés (lignes (1), (2) et (4) du tableau), soit 77% des réponses, ne prennent en compte que le cas de la prémisse vraie pour les implications matérielles obtenues en donnant des valeurs à la variable n. Les élèves ne travaillent donc qu'avec des nombres naturels pairs. Le cas de la prémisse vraie est très largement dominant auprès de ceux-ci et celui de la prémisse fausse rendant vraie une implication matérielle totalement absent. La solution apportée par ces 77% d'étudiants n'est donc pas correcte car non complète. En effet, aucune mention n'y est faite aux nombres impairs. Notons également dans ce tableau que nous avons relevé 20 solutions que nous avons jugées non pertinentes et inexploitables puisque celles-ci ne sont constituées uniquement de calculs difficilement interprétables. Aucune explication n'est en effet donnée. Ces 20 solutions (19 et 1 selon les groupes), soit un peu plus de 17% des réponses fournies, sont malheureusement à exclure. Ce pourcentage est encore légèrement grossi avec les 6 absentions relevées, soit 5%. Au total, c'est un peu plus de 22% des réponses que nous devons rejeter de notre enquête.

Enfin, la ligne (6) de notre tableau traduit le fait qu'une unique personne du groupe 2 (soit moins de 1%) mentionne les nombres impairs en plus de donner quelques nombres pairs corrects dans sa résolution. Il précise que ≪ *les impairs sont exclus de la condition "si"* [il donne ensuite l'exemple suivant] *"si 1 est un nombre pair alors 1 + 1 est un nombre premier"*, [remarque que] *1 ne rentre pas dans la condition* [et conclut que] *donc le raisonnement "1 + 1 est-il premier ?" n'a pas lieu d'être* ≫. Ceci renvoie à la conception "*$A \Rightarrow B$ n'a d'utilité et/ou de sens que si A est vrai*". La solution donnée n'est donc pas correcte car dans celle-ci, les nombres impairs sont rejetés. Globalement, avec ce dernier élève, c'est un peu plus de 78% des réponses formulées par les étudiants (soit 89 personnes sur 115) qui sont erronées car non complètes. En effet, celles-ci ne tiennent pas compte du fait qu'une prémisse fausse peut rendre l'implication matérielle associée vraie. Ce pourcentage atteint les 100% si nous faisons abstraction des réponses jugées non exploitables ou absentes.

Détaillons maintenant les différentes réponses apportées par les élèves se concentrant donc uniquement sur le cas d'une prémisse vraie et ne traitant donc qu'avec des nombres naturels pairs :

- 42 élèves (10 et 32 respectivement pour public 1 et 2), soit 37%, donnent tous les naturels pairs de l'intervalle $[0, 20]$ excepté 0, 8, 14 et 20. La moitié de ceux-ci (7 et 14 selon les groupes) n'apportent aucune explication. Pour l'autre moitié, seules 6 personnes sur 21 et toutes issues du groupe 2, justifient l'exclusion des nombres 0, 8, 14 et 20. Le reste se contentent seulement de dire qu'ils sont à rejeter.
- 34 étudiants (respectivement 18 et 16 pour les groupes 1 et 2), soit 29%, pensent que 0 vérifie la propriété. Ceci est dû au fait qu'ils considèrent 1 comme premier, par conséquent, l'implication matérielle "*si 0 est pair, alors 1 est premier*" est vraie puisque 0 est pair et que 1 est premier pour ces personnes. Cette erreur est donc liée à un non partage des élèves vis-à-vis de la convention affirmant que 2 est le plus petit nombre naturel premier. Ici aussi les justifications pour l'exclusion de 8, 14 et 20 peuvent être absentes (simple mention affirmant que ces nombres doivent être rejetés) ou pas toutes présentes : 18 cas ont été recensés, respectivement 10 et 8 pour les deux groupes.
- Dans la catégorie "Autres réponses", nous y classons des constats comme "donner tous les naturels pairs de l'intervalle $[0, 20]$" (vu 5 fois ou encore respectivement 3 et 2 fois selon les groupes), "donner tous les naturels pairs mais oublier de rejeter quelques candidats parmi 0, 8, 14 et 20" (listé 4 fois, ou 3 et 1) et "ne donner que quelques exemples de naturels pairs qui vérifient la propriété ainsi qu'un exemple d'un nombre naturel pair rendant la propriété fausse" (recensé 3 fois uniquement

pour le premier groupe).

Dans notre tableau, en considérant les lignes (1), (2), (4) et (6) de celui-ci, nous relevons que nous avons pu prendre en compte les copies de 89 élèves sur 115 (soit un peu plus de 78%). Parmi ces 89 personnes, 21 réponses, soit 18% sont formulées sans aucune explication. Nous ne pouvons donc pas connaître le raisonnement effectué par ceux-ci pour parvenir à donner les nombres pairs corrects qui rendent vraie la propriété. En les rejetant, nous obtenons un total de 68 raisonnements. Parmi ceux-ci, nous relevons que :

- 54 étudiants donnent successivement à la variable n les valeurs naturelles paires de 0 à 20. Ils constatent ensuite si le successeur de ce nombre est premier ou non. S'il l'est, la valeur substituée à n rend vraie la propriété.
- Cependant 14 élèves (10 et 4 selon les groupes) procèdent autrement et débutent par identifier les éléments qui vérifient la conclusion. Ils listent donc tous les nombres premiers entre 0 et 20 : $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Lorsque ces nombres premiers ont été identifiés, les étudiants retranchent 1 à ces nombres et obtiennent ainsi l'ensemble $\{1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18\}$. Ils (13 cas sur 14) ne conservent ensuite que les nombres pairs, c'est-à-dire ceux qui vérifient la prémisse. Pour 5 élèves, 0 rend aussi la proposition vraie puisqu'ils considèrent 1 comme premier. Une question qui nous vient en tête suite à ce raisonnement est pourquoi commencer par vérifier la conclusion avant la prémisse alors que dans l'expression "*si P alors Q*" les étudiants peuvent penser que "Q est la conséquence de P" et donc suite à la conception temporelle que Q se situe dans le temps après P ?

Question 4

Nous commençons par identifier les réponses que les élèves ont fournies par rapport à notre premier tableau. Dans celui-ci, nous leur demandons de se prononcer sur la vérité des énoncés suivants.

Soit k un naturel quelconque.

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair			
(b)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ impair			
(c)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ pair			
(d)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ impair			

Nous leur demandons ensuite de justifier leur réponse pour l'énoncé (a).

Nous dressons les constatations suivantes suite à la diffusion de notre questionnaire auprès de 115 élèves.

<table>
<tr><th>Constatations</th><th>Nombre d'élèves dans ce cas (sur 115 interrogés)</th></tr>
<tr><td>Les cases cochées mettent en avant une interprétation des énoncés conditionnels comme étant implicitement universellement quantifié
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas savoir</th></tr>
<tr><td>(a)</td><td>k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>(b)</td><td>k pair $\Rightarrow$ $k+1$ impair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(c)</td><td>k impair $\Rightarrow$ $k+1$ pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(d)</td><td>k impair $\Rightarrow$ $k+1$ impair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>104</td></tr>
<tr><td>Abstention</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Autres réponses</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Coche toutes les cases “on ne peut pas savoir”</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Les cases cochées reposent sur des implications entre énoncés contingents où k est vu comme un élément générique qu'on ne connait pas a priori.
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas savoir</th></tr>
<tr><td>(a)</td><td>k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair</td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>(b)</td><td>k pair $\Rightarrow$ $k+1$ impair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(c)</td><td>k impair $\Rightarrow$ $k+1$ pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(d)</td><td>k impair $\Rightarrow$ $k+1$ impair</td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>0</td></tr>
</table>

90% des réponses données semblent sous-entendre une quantification universelle implicite des énoncés conditionnels comme le montre notre tableau. En effet, 104 élèves sur 115 interrogés ont respectivement choisi les cases “faux”, “vrai”, “vrai” et “faux” pour les énoncés conditionnels (a), (b), (c) et (d). Cette réponse est d'ailleurs presque unanime auprès des étudiants des deux groupes puisqu'elle revient 51 fois sur 60 dans le groupe 1 (les élèves ayant 4 heures de mathématiques par semaine) et 53 fois sur 55 dans le groupe 2 (les personnes inscrites dans une option mathématiques fortes). Les justifications que les élèves apportent à la sous-question (a) et que nous dressons ci-dessous, nous permettrons de constater si cette pratique de quantification universelle implicite d'une implication est bien présente chez les élèves.
Ces 90% seront considérés comme des réponses correctes si les élèves interprètent bien tous les énoncés conditionnels donnés comme universellement quantifiés implicitement. Ayant concentré notre demande de justifications sur

la sous-question (a), nous verrons au moins si celle-ci est vue comme universellement quantifiés implicitement à défaut de savoir si les quatre énoncés le sont. Nous listons dans le tableau suivant les cases choisies pour la question (a) par les 115 élèves interrogés.

Réponses des élèves pour l'énoncé conditionnel (a)	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 115 interrogés)**
La case "faux" est choisie	108
Abstention	5
La case "on ne peut pas savoir" est cochée	2
La case "vrai" est choisie	0

La case majoritairement choisie par les 115 élèves interrogés est la case "faux" : celle-ci récolte 109 voix (soit 95% du public). Le peu d'étudiants restant se partagent entre une abstention (3,5%) ou la case "on ne peut pas savoir" (1,5%).

Détaillons les justifications majoritairement apportées pour la case "**faux**" :

– 57 élèves (31 sur 60 pour le groupe 1 et 26 sur 55 pour le groupe 2), soit 50%, justifient l'énoncé conditionnel (a) en donnant un contre exemple à celui-ci : "*Prenons* $k = 4$, *4 est pair mais* $4 + 1 = 5$ *n'est pas pair*". Souvent (27 fois sur 31 et 20 sur 26) les élèves ne disent pas explicitement "*prenons* $k = 4$ " par exemple, ils se contentent de dire que "*4 est pair mais 5 n'est pas pair*" ou encore que "*si 4 est pair alors* $4 + 1 = 5$ *est pair. Or, 5 n'est pas pair. Donc, c'est faux.*". Malgré qu'ils ne mentionnent pas explicitement "*prenons* $k = \ldots$", on peut raisonnablement penser qu'avec l'explication apportée, ces élèves donnent un contre-exemple puisqu'ils donnent une valeur à la variable k et semblent vérifier que l'instance associée est fausse. Nous remarquons que tous les élèves donnant un contre-exemple reconnaissent pour cela que la prémisse doit être vraie et que la conclusion doit être fausse.

– 33 personnes (soit 29% du public) mettent en avant le lien "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" et ce lien n'est ici pas respecté lorsque l'on passe de la prémisse "k *pair*" à la conclusion "$k+1$ *pair*". Ceci fait référence à la conception de causalité « *"A implique B" n'a de sens et a fortiori n'est vrai que si A et B ont un lien de cause à effet* ». Ici, cette idée de "lien de cause à effet" n'est pas à prendre telle quelle, il faut la voir comme un chemin explicatif permettant de passer de la prémisse à la conclusion. L'énoncé (a) est donc faux car le cheminement explicatif "*un pair est suivi d'un impair*" pour passer de la prémisse à la conclusion n'est pas vérifié. Nous relevons cette justification 16 fois pour le groupe 1 et 17 fois pour le groupe 2. Ce lien peut être formulé

par les élèves de diverses façons, nous relevons majoritairement ≪ *un nombre pair est suivi d'un nombre impair* ≫ (19 fois) ou ≪ *deux nombres qui se suivent ne peuvent être pairs* ≫ (9 fois) ou encore ≪ *l'ordre, c'est pair, impair, pair, impair,...* ≫ (5 fois).
- 4 élèves (soit 3% du public interrogé) établissent que l'énoncé conditionnel (a) est faux en justifiant simultanément les deux points précédents. Les justifications "donner un contre-exemple" et "utiliser l'existence d'un lien entre prémisse et conclusion" peuvent donc co-habiter.
- enfin, 14 étudiants donnent une explication qui ne motive apparemment pas le choix "faux" effectué (10 cas) ou ne donnent pas d'explications (4 cas).

Signalons que deux élèves du premier groupe ont coché toutes les cases "*on ne peut pas savoir*" du tableau. Nous nous intéressons aux justifications apportées car cette case peut notamment être choisie en considérant l'énoncé (a) comme une implication entre énoncés contingents où la variable k est vue comme un élément générique que l'on ne connaît pas a priori. Les deux justifications nous signalent respectivement que ≪ *tout dépend de la valeur de* k ≫ ou encore que ≪ *on ne sait pas s'il [k] est pair car* k *est un naturel quelconque, donc il peut aussi être impair* ≫. Le choix "*on ne peut pas savoir*" est donc lié à la parité de k. Les justifications s'arrêtent malheureusement là. Nous pensons que ces élèves cochent ces cases pour les énoncés (a), (b), (c) et (d) car précisément k est un naturel quelconque que l'on ne connaît pas. Ils voient donc k comme un élément générique non connu a priori et l'énoncé (a) n'est donc pas interprété comme universellement quantifié. L'énoncé "k pair" apparaît comme contingent car l'élève ne peut pas savoir, sans connaître la parité de k si cet énoncé est vrai ou faux. Nous imaginons que c'est cette absence de connaissances sur la parité de k qui conduit ces deux élèves à cocher toutes les cases "*on ne peut pas savoir*". Ce choix est cependant erroné pour la case (b) par exemple. Quelque soit la parité de k, toutes les instances de $k \text{ pair} \Rightarrow k+1 \text{ impair}$ sont vraies. Sa clôture universelle est donc vraie et la case à cocher pour (b) est donc "vrai".

En résumé, parmi les 109 personnes qui choisissent la case "faux", 61 y apportent un contre-exemple. La notion de contre-exemple est reliée à celle d'implication universellement quantifié. En effet, donner un contre-exemple pour la sous-question (a), c'est rendre vrai l'énoncé $\exists k, \big(k \text{ pair} \wedge (k+1) \text{ impair}\big)$. Cet énoncé est la négation de $\forall k, \big(k \text{ pair} \Rightarrow k+1 \text{ pair}\big)$, soit une interprétation universellement quantifiée de (a). Nous pouvons donc affirmer que 53% du public interprète donc l'énoncé conditionnel (a) comme étant implicitement universellement quantifié.

Identifions et analysons maintenant les réponses apportées par les élèves à notre second tableau dont l'énoncé était le suivant :

Que pensez-vous des énoncés suivants ?

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(e)	3 pair $\Rightarrow$ 4 pair			
(f)	3 pair $\Rightarrow$ 4 impair			
(g)	3 impair $\Rightarrow$ 4 pair			
(h)	3 impair $\Rightarrow$ 4 impair			

Nous leur demandons ensuite de justifier leur réponse pour les énoncés (e) et (f).

Signalons que nous avons choisi d'être présent lors de toutes les diffusions de questionnaires auprès des élèves, notamment pour répondre à diverses éventuelles questions des élèves. Ce second tableau en a toujours sollicité. Celles-ci peuvent être liées à la forme de l'énoncé (≪ *Je sais ce que signifie le mot “pair” mais ici, que voulez-vous dire par “3 pair” ou même “4 pair”,... ?* ≫ où j'ai dû par exemple préciser que “3 pair” signifie que le chiffre 3 est pair) ou aux propres connaissances que les élèves peuvent avoir (≪ *3 n'est pas pair, monsieur, il est impair. Je dois oublier qu'il est impair pour répondre à (e) et (f) ?* ≫, ma réponse était alors ≪ *qu'estimez-vous important, vos connaissances sur la parité de 3 ou l'oubli de celle-ci est l'acquisition d'une nouvelle, à savoir 3 est pair ? Détaillez bien vos explications pour que je puisse connaître votre raisonnement* ≫).

Suite à notre dépouillement de la question 4, nous dressons un tableau regroupant les réponses des élèves à la page 147.

<table>
<tr><th>Réponses des élèves</th><th>Nombre d'élèves dans ce cas (sur 115 interrogés)</th></tr>
<tr><td>Les cases cochées font apparaître le tableau suivant :
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas savoir</th></tr>
<tr><td>(e)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>(f)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(g)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(h)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td><td>57</td></tr>
<tr><td>Les cases cochées font référence au tableau de réponses suivant :
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas savoir</th></tr>
<tr><td>(e)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>(f)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>(g)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(h)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td><td>35</td></tr>
<tr><td>Autres réponses</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Abstention</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Le tableau suivant illustre la configuration correcte attendue
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas savoir</th></tr>
<tr><td>(e)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(f)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(g)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(h)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td><td>0</td></tr>
</table>

Le premier aspect qui est mis en avant dans notre tableau de constatations et plus particulièrement par la dernière ligne de celui-ci, est qu'aucun élève ne donne la combinaison correcte "*vrai*", "*vrai*", "*vrai*" et "*faux*" respectivement pour les implications matérielles (e), (f), (g) et (h). Parmi les configurations de réponses majoritairement relevées dans les copies des élèves, nous distinguons :

- 57 étudiants (29 sur 60 pour le groupe 1 et 28 sur 55 pour le groupe 2), soit près de 50% des personnes interrogées, qui cochent respectivement les cases "*faux*", "*vrai*", "*vrai*" et "*faux*" pour les énoncés conditionnels (e), (f), (g) et (h).
- et 35 personnes (15 et 20 selon les groupes), soit 30%, qui choisissent respectivement les cases "*faux*", "*faux*", "*vrai*" et "*faux*" pour les énoncés conditionnels (e), (f), (g) et (h).

Nous avons choisi de demander aux élèves de justifier les réponses apportées aux sous-questions (e) et (f). Nous voulons ainsi étudier leur comportement face à une implication matérielle dont la prémisse est fausse.

Nous listons dans le tableau suivant les cases cochées à la question (e) par les 115 élèves interrogés.

Réponses des élèves pour l'énoncé conditionnel (e)	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 115 interrogés)**
La case "faux" est choisie	93
Abstention	14
La case "on ne peut pas savoir" est cochée	5
La case "vrai" est choisie	3

La premier aspect frappant à la vue de ce tableau est que près de 81% des élèves (soit 93 personnes sur 115) cochent la case "faux". Par contre, la case "vrai" qui est la bonne réponse, n'est choisie que 3 fois, soit un peu plus de 2% des élèves. Mentionnons que 14 élèves (soit 12%) s'abstiennent et que 4 autres (soit 3%) coche la case "on ne peut pas savoir". Nous détaillons ci-dessous les justifications majoritairement apportées pour ces différentes cases.

Pour la case "**faux**" très largement sollicitée, nous relevons :

- 32 élèves (17 sur 60 pour le groupe 1 et 15 sur 55 pour le groupe 2) estiment que l'implication "3 pair $\Rightarrow$ 4 pair" est fausse car la prémisse "3 pair" est fausse. Nous associons ces réponses à la propriété-en-acte "*Si A est fausse alors "A implique B" est fausse*". Il suffit donc pour ces élèves que la prémisse d'une implication soit fausse pour que l'implication en elle-même le soit aussi. Avec ce type de réponse, les étudiants prennent donc en compte leurs connaissances sur la parité de 3.

- La seconde réponse majoritairement obtenue se base sur l'existence du cheminement explicatif "*un pair est suivi d'un impair*" pour passer de la prémisse à la conclusion de l'implication. Nous distinguons deux catégories de réponses associées à l'existence d'un lien explicatif.

  (1) La première est mise en avant par 17 élèves (10 pour le groupe 1 et 7 pour l'autre groupe). Il est mentionné explicitement que 3 est supposé pair (même s'ils indiquent que c'est faux). Ils se posent ensuite la question "4 est-il pair ?". Pour y répondre, ils utilisent le lien explicatif "*un pair est suivi d'un impair*", constatent que celui-ci n'est pas vérifié dans l'énoncé (e) et déclarent donc ce dernier faux.

  (2) La seconde catégorie est attachée à une justification uniquement basée sur ce lien explicatif, nous n'avons en effet pas trouvé de traces écrites de "*supposons 3 pair*". Cette catégorie est présente chez 25 élèves dont 8 pour le groupe 1 et 17 pour le groupe 2. Nous pensons que ces élèves statuent sur la vérité de (e) en constatant de manière visuelle la présence de "3 pair" et de "4 pair". Ils restent fixés sur les deux mots "pair" et répondent que (e) est faux en stipulant notamment que ≪ *deux nombres pairs ne peuvent pas se suivre* ≫ (17 fois) ou ≪ *l'ordre, c'est "pair, impair, pair, impair, . . . " ou "impair, pair, impair, pair, . . . " et pas "pair, pair"* ≫ (8 fois).

  Via ces deux catégories, nous constatons que c'est principalement l'existence d'un lien explicatif entre prémisse et conclusion qui fait qu'une implication est déclarée fausse si ce lien n'est pas vérifié. En combinant ces deux catégories, cette justification est même plus répandue auprès des 115 élèves (un peu plus de 36%) que celle mettant en avant la propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫ (plus de 27%). Plus précisément, pour le groupe 1, 17 étudiants utilisent le propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫ et 18, l'existence d'un lien explicatif non vérifié. Ces deux justifications sont donc employées dans des proportions égales. Tandis que pour le groupe 2, l'existence d'un lien explicatif et le fait qu'il soit erroné dans (e) est plus utilisé (24 cas) que la propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫ (15 cas).

- 7 élèves (soit 6% du public) estiment que la valeur de vérité "faux" de (e) peut être justifiée de deux façons, ces deux façons cohabitent donc dans leurs conceptions face à une implication dont la prémisse est fausse. Nous relevons :

- 4 fois (dont trois dans le groupe 2) des justifications utilisant la propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫ et la constatation (1) décrite ci-avant.
- 3 fois (uniquement dans le groupe 2) des justifications basées à la fois sur la propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫ et la constatation (2) décrite ci-avant.

– deux étudiants réutilisent la réponse "faux" choisie pour (a) dans le premier tableau afin de statuer que (e) est faux.
– enfin 10 étudiants donnent une explication qui ne justifie pas la case cochée.

Trois élèves ont coché la case "**vrai**" mais leur explication n'est pas correcte. Dans celle-ci, ces 3 personnes du groupe 1 supposent la prémisse "3 pair" vraie et donc ainsi contournent le cas d'une prémisse fausse qui semble dérangeant. Les élèves savent pourtant que 3 n'est pas pair comme ils nous l'indiquent. Ils regardent ensuite la conclusion "4 pair", constatent que celle-ci est vraie et établissent donc que l'implication (e) est vraie puisque sa prémisse et sa conclusion le sont.

En résumé, aucun élève ne choisit la case vraie en la justifiant correctement, à savoir l'implication matérielle (e) est vraie car sa prémisse "3 pair" est fausse. Le cas d'une prémisse fausse rendant vraie une implication ne semble donc pas partagé par les élèves du secondaire. Face à la prémisse "3 pair" fausse, 81% des étudiants déclarent l'énoncé conditionnel (e) faux. Ils peuvent pour cela avoir divers raisonnements. Ceux-ci sont erronés car ils ne conduisent pas à la case correcte "vrai". Nous en retenons essentiellement deux :

– 36% des élèves basent leurs justifications sur l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion : comme le lien "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" n'est pas vérifié dans l'implication matérielle (e), celle-ci est déclarée fausse ;
– plus de 27% des étudiants déclarent (e) faux en utilisant la propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫

Ces deux raisonnements peuvent même notamment cohabiter (relevé chez 7 élèves, soit 6%) et donc fournir deux justifications pour établir la valeur de vérité fausse de l'implication (e).

Recensons maintenant les différentes justifications majoritairement apportées par les 115 élèves à la question (f).

Réponses des élèves pour l'énoncé conditionnel (f)	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 115 interrogés)**
La case "vrai" est choisie	55
La case "faux" est cochée	38
Abstention	17
La case "on ne peut pas savoir" est choisie	5

La case correcte à choisir ici est "vrai". La justification correcte associée à celle-ci s'obtient par la définition d'une implication entre propositions : une implication dont le prémisse est fausse est déclarée vrai. En effet, la prémisse "3 pair" étant ici fausse, l'énoncé conditionnel (f) est donc déclaré vraie. Cette case "vrai" est choisi par près de 48% des étudiants. Nous dressons par après les différentes justifications majoritairement apportées à ce choix. Cette case domine la case "faux" plébiscitée par 33% des élèves. Signalons enfin que 15% du public s'abstiennent et que la case "on ne peut pas savoir" est cochée par 4% de personnes.
Dressons d'abord les justifications majoritairement apportées à la case "**vrai**" :

- 35% des élèves (soit 40 personnes) utilisent dans leurs justifications l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion de l'implication. Puisque ce lien est établi comme correct dans l'implication (f), celle-ci est déclarée vraie. Nous relevons cet argument auprès de 17 élèves du groupe 1 et de 23 élèves du groupe 2. Comme pour la question (e), nous distinguons deux catégories de réponses associées à l'existence d'un lien explicatif dans le cas d'une implication à prémisse fausse :
  (1) La première est mise en avant par 22% des élèves et plus précisément 25 personnes dont 13 du public 1 et 12 du public 2. Ceux-ci mentionnent explicitement dans leur justification que 3 est supposé pair (et ce, même si c'est pertinemment faux). Ils se posent ensuite la question "4 est-il impair ?". Pour y répondre, ils utilisent le lien explicatif "un pair est suivi d'un impair". Ils constatent que celui-ci est vérifié puisque on suppose que "3 est pair" et il est dit que son successeur, 4 est impair. Puisque le lien est respecté, ils déclarent (f) vrai.
  (2) La seconde catégorie est attachée à une justification uniquement basée sur ce lien explicatif, nous ne trouvons en effet pas de notations supposant que 3 est pair. Cette catégorie est présente chez

13% des élèves (c'est-à-dire 15 personnes dont 4 pour le groupe 1 et 11 pour le groupe 2). Comme pour l'implication matérielle (e), nous pensons que ceux-ci statuent sur la vérité de (f) de manière visuelle en constatant la présence des mots "pair" et "impair" dans les propositions respectives "3 pair" et "4 impair". Ils restent selon nous concentrés sur ces deux mots et répondent que (f) est vrai en stipulant par exemple que ≪ *un nombre pair est toujours suivi d'un nombre impair* ≫ (9 fois) ou que ≪ *la parité des nombres est "pair, impair, pair, impair, ...* ≫ (6 fois).

– Deux élèves (soit moins de 2% du public interrogé) inscrits dans l'option mathématiques fortes (public 2) et ayant suivi un cours sur la logique des propositions, répondent correctement à l'énoncé en justifiant que ≪ $0 \Rightarrow 0$ *donne vrai* ≫. Ceci fait partiellement référence à la table de vérité de l'implication et notamment au cas où celle-ci est vraie lorsque la prémisse "3 pair" et la conclusion "4 impair" sont toutes les deux fausses (le caractère faux étant symbolisé par 0). Ce sont là les seules références correctes que nous avons trouvées pour le cas d'une prémisse fausse qui rend vraie l'implication associée.
– enfin, signalons que dans les 13 personnes restantes nous regroupons celles qui nous donnent une explication peu intéressante à relever ou qui n'en fournissent pas.

Intéressons-nous maintenant aux 38 élèves qui ont coché la case "**faux**". Nous relevons trois types de justifications :

(i) La première fait apparaître que l'implication (f) est fausse car à la fois sa prémisse "3 pair" et sa conclusion "4 impair" sont fausses. Nous avons trouvé cette réponse dans 15 copies (soit 13% du public interrogé), 6 copies sont issues du groupe 1 et 9 du groupe 2.

(ii) La deuxième justification relevée pour "faux" utilise la propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫. Nous relevons celle-ci 12 fois (soit chez 10% du public total) dont 7 fois dans le groupe 1 et 5 dans le groupe 2. Ces 12 élèves estiment donc que l'énoncé (f) est faux car la prémisse "3 pair" est fausse. Une prémisse fausse suffit selon ces élèves à rendre faux une implication.

(iii) La troisième justification est basée sur le raisonnement ≪ *Si B est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫. C'est donc ici le fait que 4 ne soit pas impair qui pousse les élèves à déclarer fausse l'implication matérielle (f). Ce raisonnement est mis en avant par 6 élèves (soit 5% du public), avec trois étudiants répartis dans chaque groupe.

4% du public, soit 5 élèves cochent la case "**on ne peut pas savoir**". Le choix de cette case est dû pour 3 élèves à l'existence de deux justifications possibles pour statuer sur la vérité de (f). Or, ces deux justifications les conduisent à la fois à la réponse "vrai" et à la réponse "faux". Ils cochent par conséquent la case "on ne peut pas savoir". Nous estimons cette constatation intéressante bien que très peu présente car elle fait cohabiter deux justifications menant à des valeurs de vérité différentes. Nous relevons les cas suivant :

- cohabitation des justifications (1) et (i) pour un élève du groupe 2 ;
- cohabitation des justifications (2) et (ii) pour un élève du groupe 2 ;
- cohabitation des justifications (1) et (ii) pour un élève du groupe 1 ;

Un autre réponse est associée au choix "on ne peut pas savoir" pour un étudiant issu du second groupe. Il précise que sans définition des notions "pair" et "impair", il ne sait pas répondre. En effet, lors de la diffusion du questionnaire, il nous a signalé que ≪ *3 est impair et non pair mais on peut redéfinir les impairs comme étant les nouveau pairs et inversement. Donc, sans définition de "pair" et "impair" je ne sais pas me prononcer* ≫.

Il est intéressant de constater que la prémisse fausse "3 pair" incite les élèves à remettre en cause leurs connaissances sur la parité des nombres naturels pour que justement 3 apparaisse comme pair ou dit autrement que la prémisse soit vraie. Un phénomène présent à 17 reprises pour l'implication (e) et à 25 pour l'implication (f). Signalons que ce phénomène est présent dans des proportions raisonnablement identiques entre les deux groupes puisque les chiffres sont précisément de 10 et 7 à la question (e) pour respectivement les groupes 1 et 2 et que pour la question (f), nous relevons 13 et 12 cas pour ces deux groupes.

En résumé pour cette sous-question (f), 55 élèves (soit près de 48% du public interrogé) choisit l'unique bonne réponse : la case "vrai". Cependant, dans les justifications associées à cette case, seuls 2 étudiants du groupe 2 (soit 2% du public total) et ayant suivi un cours sur la logique des propositions, justifient correctement ce choix en faisant implicitement référence à la table de vérité de l'implication dans cette logique. Ils expliquent qu'une implication matérielle avec une prémisse fausse est déclarée vraie. Ce sont là les seules explications correctes qui ont été apportées pour cette case. La justification majoritairement relevée auprès de 35% des élèves (soit 40 personnes) pour cette case "vraie" n'est pas juste car celle-ci se base sur l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion de l'implication. Or, cette existence d'un lien est contraire à la vérifonctionnalité, convention établie dans la logique des propositions et pour laquelle la valeur de vérité d'une phrase ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition du connecteur qui les relient.

Nous poursuivons notre analyse des réponses des élèves avec notre second questionnaire dédié au cadre ensembliste.

6.3 Diffusion de notre second questionnaire

Nous avons diffusé notre second questionnaire auprès de 66 élèves de 5$^{\text{ième}}$ ou 6$^{\text{ième}}$ année. Comme nous l'avons fait pour notre analyse des réponses des élèves à notre premier formulaire, nous classons le public en deux groupes. Notre premier groupe est composé de 37 élèves suivant quatre heures de mathématiques par semaine. Ceux-sont tous inscrits en 5$^{\text{ième}}$ année et nous référençons ce groupe par l'appelation "Public 1" dans la suite de ce document. Notre second groupe interrogé est constitué de 29 élèves inscrits en mathématiques fortes, suivant un cours à six périodes par semaine, éventuellement augmenté de deux heures de renforcement ou de préparation aux études supérieures. Ce second groupe est nommé "Public 2" dans la suite. Précisément, nous avons questionné 8 élèves de 5$^{\text{ième}}$ année. Ceux-ci font partie du groupe de 15 étudiants qui ont suivi un cours sur la logique des propositions en renforcement mathématique et qui ont déjà participé à notre premier questionnaire. D'autre part, nous avons sondé 21 élèves de 6$^{\text{ième}}$ année dont 13 suivent un cours de complément mathématique [3]. Parmi ces 21 personnes, 15 ont participé à notre précédent questionnaire. Nous suivons le même découpage de travail que pour notre premier questionnaire. Nous dépouillons les productions des élèves en dressant pour chaque question, un tableau des réponses majoritairement obtenues. Afin d'avoir une vision globale des réponses des élèves du secondaire, nous choisissons de présenter celles-ci sans distinguer les deux groupes cités ci-avant. À travers quelques constats et commentaires sur ces productions des élèves, nous revenons ensuite sur quelques différences qui peuvent exister entre ces deux niveaux.

6.4 Réponses apportées par les élèves au second questionnaire

Nous analysons les réponses des élèves à notre formulaire dédié au cadre de travail dit ensembliste de l'implication. Rappelons que nous avons présenté nos questions et quelques productions possibles des élèves face à celles-ci au chapitre 5, section 5.2.

3. Ces 13 élèves n'ont pas reçu a priori de cours sur la logique des propositions.

Question 1

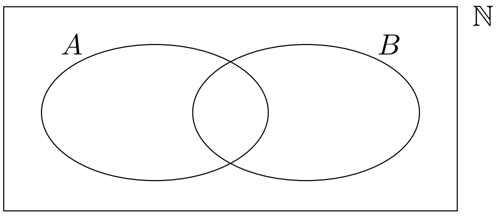
Cette question est divisée en trois parties et est accompagnée de l'introduction suivante :

Considérons les ensemble suivants :

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\} \text{ et } B = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

Un élément de A vérifie donc la propriété « *être un nombre naturel pair* ». Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel pair, alors il appartiendra à l'ensemble A.
De la même manière, un élément de B vérifie la propriété « *être un nombre naturel multiple de 3* ». Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel multiple de 3, alors il appartiendra à l'ensemble B.

On a représenté ci-dessous les ensembles A, B et $\mathbb{N}$.



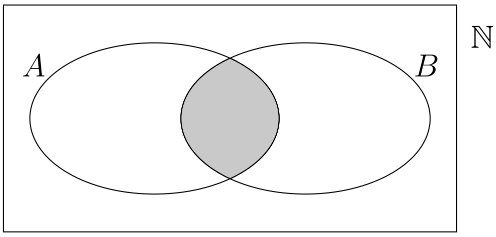
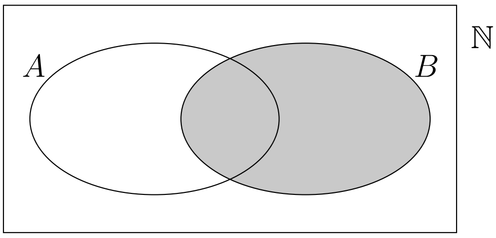
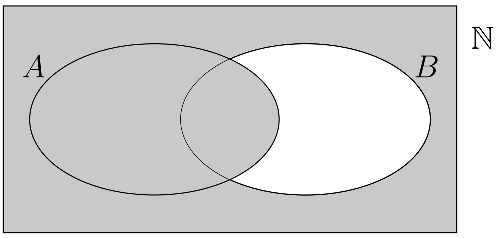
L'énoncé de la première partie de cette question est le suivant :

(a) Considérons l'énoncé :

"si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair."

Dans le diagramme ci-avant, hachurez les différentes zones qui rendent vrai cet énoncé.

Nous dressons dans le tableau suivant, nos observations sur les différentes zones hachurées par les élèves.

Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 66 interrogés)**
La zone hachurée correspond au graphe suivant : 	55
Les élèves hachurent la zone suivante : 	5
La bonne réponse est donnée : 	1
Autres	4
Abstention	1

Discutons tout d'abord globalement des réponses des élèves et de la constatation dominante y apparaissant. Un peu plus de 83% des élèves interrogés hachurent l'intersection des ensembles A et B. Selon eux, cette zone est la seule qui rend vrai l'énoncé proposé. Ce choix se retrouve dans des proportions identiques auprès des deux publics : 32 élèves sur 37 pour le public 1 et

23 sur 29 pour le public 2. Cette réponse est partiellement correcte car celle-ci ne repose que sur le cas des prémisses vraies des implications matérielles obtenues en remplaçant x par certaines valeurs. Dans une mesure nettement moindre, nous constatons que 7% des réponses, soit 5 élèves (2 pour le premier groupe et 3 pour le second) hachurent tout l'ensemble B. Cette réponse peut s'interpréter par la conception suivante : les implications obtenues en substituant une valeur à x sont vraies dès que la prémisse est vraie. Ce qui conduit à hachurer tout l'ensemble B. Cette réponse est bien sûr erronée car les éléments de l'ensemble $B \setminus A$ rendent l'énoncé faux (cas d'une prémisse vraie et d'une conclusion fausse). Près de 7% des réponses données sont donc fausses suite à ce choix. Le dernier aspect que nous avons relevé est celui d'un unique étudiant du public 2 (soit 1,5%) qui nous donne la bonne réponse et qui tiendrait ainsi apparemment compte du cas d'une prémisse vraie mais aussi surtout du cas d'une prémisse fausse pour les instances associées. En effet, tous les éléments ne vérifiant pas la propriété "*être un naturel multiple de 3*" de la prémisse, c'est-à-dire ceux appartenant à l'ensemble $\mathbb{N} \setminus B$ font eux aussi de l'énoncé (a) une proposition vraie. Ceci découle de la définition d'une implication entre propositions, laquelle est vraie dès que sa prémisse est fausse.
Détaillons quelques peu cette réponse majoritaire récoltant près de 83% des suffrages. Hachurer l'intersection des ensembles A et B revient à ne prendre en compte que les implications matérielles obtenues en donnant des valeurs à la variable x appartenant donc à la fois à ces deux ensembles. Mais hachurer cette intersection, c'est surtout ne prendre en compte que le cas de la prémisse vraie pour les implications matérielles associées. Nous pensons qu'en voyant l'énoncé (a) proposé, les élèves restent dans un premier temps fixé sur la condition "*si*". Ils ne prennent en compte que le prédicat "*x est un naturel multiple de 3*", identifient celui-ci à l'ensemble B et décident de se placer dans cet ensemble, ce qui conduit bien à ne considérer que les prémisses vraies des instances associées. Nous estimons qu'après cette étape, les élèves regardent les éléments de l'ensemble B qui rendent vraie la seconde partie de l'énoncé proposé, à savoir le prédicat "*x est un nombre pair*". Ils constatent qu'en remplaçant respectivement x par certaines valeurs l'énoncé peut être vrai et pour d'autres qu'il peut être faux. Ce sont respectivement les instances vraies obtenues avec les éléments de $A \cap B$ et les instances fausses avec les éléments de $B \setminus A$. Les élèves ne tiennent compte alors que de la zone qui rend vrai l'énoncé, c'est-à-dire qu'ils ne tiennent compte que des instances vraies et hachurent la zone $A \cap B$.

En résumé, la prédominance du cas de la prémisse vraie apparaît très largement dans les réponses des élèves. Une seule personne semble a priori prendre en compte le cas d'une prémisse fausse rendant vraie une implication matérielle puisqu'il hachure la zone $A \cup \complement B$, c'est-à-dire tous les éléments naturels exceptés ceux qui apparaissent dans B sans être présent dans A.

Poursuivons notre analyse de cette première question avec la seconde partie de celle-ci dont l'énoncé est le suivant :

(b) L'énoncé "il existe un naturel x tel que si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair." est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Nous avons relevé majoritairement les réponses suivantes :

Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 66 interrogés)**
Coche la case "vrai" et exhibe un élément pour prouver l'énoncé	22
Coche la case "vrai" et justifie sans exhiber d'élément	18
Ne justifie pas son choix "vrai" avec l'explication apportée	16 (dont 2 sans explications)
Coche la case "faux"	6
Coche la case "on ne peut pas savoir"	3
Abstention	1

L'aspect frappant pour cette question est que près de 85% des cases cochées par les élèves sont vraies. La bonne réponse pour cette question est de justement cocher la case "vrai". Nous recensons respectivement 56 personnes qui cochent cette case et plus précisément 31 personnes sur 37 pour le premier groupe et 25 sur 29 pour le second. Les justifications apportées à cette case "**vrai**" semblent partagées :

- 39% des justifications sont correctes dans le sens où l'élève donne une valeur à x pour ensuite montrer que l'instance associée, obtenue en remplaçant x par cette valeur, est vraie ;
- un peu plus de 32% des explications n'exhibent pas d'élément pour prouver cette clôture existentielle de l'énoncé donné en (a) mais nous donnent plutôt l'ensemble des éléments vérifiant (a). Celui-ci est d'ailleurs toujours $A \cap B$. Les élèves qui donnent cette justification ne comprennent pas la signification du quantificateur "il existe" et le fait que

pour prouver cette clôture existentielle, il suffit de donner une valeur (ici à la variable x) qui vérifie l'énoncé dont on considère la clôture ;
- enfin un peu moins de 29% des réponses "vrai" nous est donné avec une justification que nous jugeons non intéressante à relever (7 fois dans chaque groupe) ou absente (une fois pour chaque groupe).

Au final, parmi les 85% de cases cochées "vrai", seules 39% de celles-ci sont donc justifiées correctement.
Notons que quelques choix de case "faux" ou "on ne peut pas savoir" sont présents à hauteur de respectivement 9% et 4%, mais ces deux catégories sont très peu présentes par rapport à la case "vrai" majoritairement choisie.

Détaillons maintenant quelque peu ces résultats en commençant d'abord par la case "**vrai**" :
- 22 élèves (15 sur 37 pour le groupe 1 et 7 sur 29 pour le groupe 2) donne une valeur à la variable x pour démontrer l'énoncé donné. Dans 18 cas sur 22 (respectivement 11 et 7 selon les groupes), les élèves ne commencent par leurs justifications en disant "*prenons* $x = \ldots$", cette étape est implicite. Ils indiquent directement : ≪ *par exemple, 6 est multiple de 3 et 6 est pair* ≫. Dans toutes ces réponses, remarquons qu'un seul exemple est toujours donné et que dans celui-ci, la prémisse et la conclusion de l'instance associée sont toujours vérifiées. Il n'y a pas de valeur donnée à x de sorte que la prémisse soit fausse. La vérité de l'instance associée découlant des vérités de la prémisse et de la conclusion n'est pas expliquée et est laissée au lecteur. Les élèves vérifient uniquement que leur exemple est bien à la fois un multiple de 3 et un nombre pair. Ils disent ensuite que l'implication associée est vraie sans plus de justifications. Signalons que peu d'étudiants font allusion dans leur rédaction au diagramme précédemment hachuré, seul 4 (1 dans le premier groupe et 3 dans le second) mentionnent que l'élément exhibé appartient à $A \cap B$.
- 18 élèves (7 et 11 selon les groupes) ne nous donnent pas, dans leur justification, un élément naturel qui vérifient l'instance associée mais bien l'ensemble de tous les éléments qui vérifient la propriété "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*". Cet ensemble est dans tous les cas $A \cap B$. Les formulations associées sont diverses : ≪ *ce sont les éléments se trouvant dans la zone hachurée* [qui est exactement $A \cap B$] *ces nombres appartiennent à A (et sont donc des nombres pairs) et appartiennent à B (et sont donc des nombres multiples de 3)* ≫ (1 et 6 fois selon les groupes), ≪ *ce sont les éléments de l'intersection des deux ensembles* ≫ (3 et 2 fois selon les groupes), ≪ *ce sont les éléments de $A \cap B$* ≫ (3 fois dans le groupe 2), ≪ *les éléments dans la partie*

commune de A et B ≫ (2 fois dans le groupe 1) et ≪ *les nombres pairs dans B* ≫ (1 fois dans le groupe 1). Après cette identification de $A \cap B$, tous les élèves précisent que ces éléments sont multiples de 3 et pairs, ce qui les conduit à cocher la case “vrai”. Notons qu'à ce moment seul 6 élèves sur 18 (3 pour chaque groupe) concluent alors en disant qu'il existe bien un élément vérifiant la propriété (a). Trois d'entre eux donnent notamment l'exemple de 6. Le fait que seuls six élèves font le lien avec l'ensemble $A \cap B$ hachuré et l'existence d'au moins un élément de cet ensemble vérifiant l'énoncé (a) ou encore le fait que seul trois étudiants donnent un exemple d'une telle valeur, nous fait penser que tous ou au moins 15 candidats ne comprennent pas la signification du quantificateur “*il existe*”.

Six personnes (précisément 4 pour le groupe 1 et 2 pour le groupe 2) ont coché la case “**faux**”. Leurs justifications mettent en avant deux catégories :

– le choix “faux” est une conséquence de la confusion entre les quantificateurs “*il existe*” et “*pour tous*”. Trois élèves du premier groupe et un du second déclarent l'énoncé (b) faux car ≪ *9 est multiple de 3 mais il est impair* ≫. Cette justification est bien sûr erronée pour cette sous-question (b). Cette explication apparaît sous la forme d'un contre-exemple, une notion renvoyant au fait que la clôture universelle de “*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*” est fausse, ce que nous demandons justement aux élèves dans la troisième partie de cette première question.
– deux élèves (un de chaque groupe) confondent l'expression “*il existe...*” avec “*il existe un et un seul...*”. Il s'ensuit qu'ils déclarent l'énoncé (b) comme faux avec l'explication ≪ *il n'existe pas qu'un seul exemple mais bien plusieurs, comme 6, 12, ...* [sans toutefois montrer que ces exemples rendent vrai “*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*”] ≫.

Achevons cette analyse des réponses pour cette sous-question en précisant que les 3 élèves (2 dans le premier groupe et 1 dans le second) qui ont coché la case “**on ne peut pas savoir**”, ne comprennent visiblement pas la signification du quantificateur “il existe”. En effet, ceux-ci répondent qu'≪ *un nombre naturel multiple de 3 peut ne pas être pair, [...] cela dépend de la valeur de x* ≫. Ils semblent avoir conscience que des assignations de x peuvent rendre l'implication associée vraie alors que d'autres valeurs rendront celle-ci fausse, mais faute de compréhension du “il existe” ils ne peuvent se décider et établir que l'énoncé (b) est vrai.

En résumé, 85% des élèves interrogés (soit 56 personnes) cochent la case “vrai” qui est la bonne réponse à cette question. Cependant, seules 39% des justifications apportées à ce choix sont corrects puisque les étudiants donnent une valeur à la variable x et vérifient ensuite que l'instance associée est vraie.

Terminons notre analyse de cette première question avec la troisième et dernière partie de celle-ci disant que :

(c) L'énoncé

"pour tout naturel x, si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Suite au dépouillement des réponses des 66 élèves à cette question, nous dressons les constatations suivantes :

Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 66 interrogés)**
Coche la case "faux" mais ne donne pas de contre-exemple	30
Coche la case "faux" et donne un contre-exemple pour invalider l'énoncé	22
Ne justifie pas son choix "faux" avec l'explication apportée	10 (dont 1 sans explications)
Coche la case "on ne peut pas savoir"	4
Coche la case "vrai"	0
Abstention	0

94% des élèves cochent la case "faux". Cette case est justement la bonne réponse à cette question. Ils sont respectivement 34 sur 37 pour le groupe 1 et 28 sur 29 pour le groupe 2 à choisir cette case. Parmi ces 62 réponses, les justifications peuvent varier : plus de 48% de celles-ci sont établies sans donner de contre-exemple contre 36% qui en donnent précisément un. Cette tendance est d'ailleurs partagée par les deux groupes. Notons que dans ces 62 cases "faux" cochées, 16% des justifications apportées sont selon nous non intéressantes à relever ou ne justifient pas, voire contredisent le choix "faux" effectué. Cette grande majorité de case "faux" cochée ne laisse que peu de place à d'autres choix. Signalons cependant que les 6% de réponses associés aux autres cases est entièrement dédié à la case "on ne peut pas savoir". Aucun élève ne choisi la case "vrai" ou ne s'abstient.

Détaillons maintenant les justifications apportées pour la case "**faux**" cochée. 30 élèves cochent cette case sans en donner de contre-exemple. Parmi celles-ci nous distinguons :

– 16 élèves (8 dans chaque groupe) affirment que l'énoncé est faux avec l'unique explication exprimée ou non au pluriel ≪ *certain(s) naturel(s) multiple(s) de 3 n'est (ne sont) pas pair(s)* ≫. Treize autres (11 et 2 selon les groupes) mettent en avant la justification ≪ *il existe des naturels multiples de 3 qui sont impaires* ≫. Ces explications font référence à la négation de l'énoncé (c) donné. Les élèves sont a priori bien parti dans leur rédaction, mais ils ne prouvent pas que cette négation est vraie. En effet, aucun d'eux ne donnent d'exemples vérifiant cette justification et donc a fortiori rendant vraie la négation de l'énoncé (c). La justification apportée par les élèves n'est donc pas aboutie et ne permet pas de valider correctement le choix de case "faux" effectué.
– nous relevons une réponse particulièrement intéressante au niveau du cadre ensembliste qui nous étudions dans ce questionnaire. Un élève du groupe 2 déclare l'énoncé (c) faux ≪ *car une grande partie de l'ensemble B n'est pas contenue* [le mot "*incluse*" semble plus approprié] *dans l'ensemble A* [il donne ensuite quelques exemples sans toutefois les vérifier] *exemple : 15, 21, 27,...* ≫. Cet étudiant semble donc déclarer l'énoncé (c) faux parce que l'ensemble B n'est pas inclus dans l'ensemble A.

La seconde catégorie dans laquelle nous avons classé les justifications pour la case "**faux**" est dédiée aux élèves qui ont donné un contre-exemple à l'énoncé (c) pour justement prouver ce "faux". Ce qui renvoie aux 36% mentionnés ci-dessus. Cette justification est mise en avant par 11 élèves dans chaque groupe. Elle apparaît dans des proportions qui sont relativement proches, même si elle est plus marquée dans le second groupe puisque celui-ci regroupe 29 élèves au total alors que le premier n'en totalise que 37. Dans la rédaction de ce contre-exemple, la mention "*prenons* $x = \ldots$" n'apparaît que très rarement (3 fois sur 11 dans chaque groupe, ce qui fait un peu plus de 25% de présence dans les 22 réponses donnant un contre-example). Les élèves formulent directement par exemple que ≪ *9 est un naturel multiple de 3 mais n'est pas un nombre pair* ≫. Signalons juste pour information que le mot "*contre-exemple*" n'apparaît jamais dans les productions des élèves.

En conclusion, parmi les 94% d'élèves qui choisissent la case "faux", 36% des explications fournies pour l'ensemble de ces cases fausses cochées sont correctes puisqu'un contre-exemple y est donné. Notons qu'un étudiant déclare l'énoncé (c) faux parce que l'ensemble B n'est pas inclus dans l'ensemble A.

Terminons l'analyse des réponses de cette sous-question en listant la raison invoquée par les 4 élèves (3 dans le groupe 1 et 1 dans le groupe 2) ayant coché la case "**on ne peut pas savoir**" : tous mettent en avant l'explication selon laquelle un multiple de 3 peut être pair ou impair. Ils semblent tous reconnaître qu'il existe des nombres multiples de 3 pair et d'autres impairs, mais ils ne concluent pas "faux" pour autant. Cette explication est probablement liée à une non compréhension du quantificateur "pour tout" et au fait qu'il suffit de trouver un contre-exemple et de montrer que celui-ci en est bien un pour rendre faux une implication formelle, et en particulier ici, la clôture universelle de l'énoncé (a).

Question 2

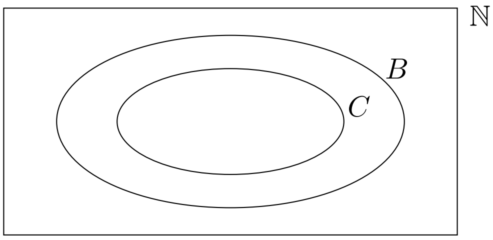
Cette question est divisée en 4 parties et est introduite de la sorte :

Considérons les ensemble suivants :

$$B = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} \text{ et } C = \{0, 9, 18, 27, 36, \ldots\}$$

Un élément de B vérifie donc la propriété « *être un nombre naturel multiple de 3* ».
Un élément de C vérifie la propriété « *être un nombre naturel multiple de 9* ».
Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel multiple de 9, alors il appartiendra à l'ensemble C.

On a représenté ci-dessous les ensembles B, C et $\mathbb{N}$.



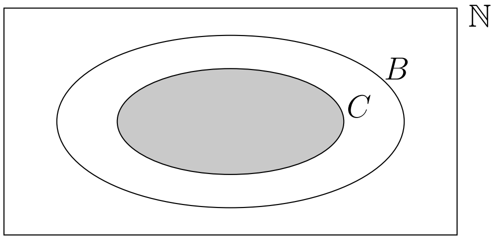
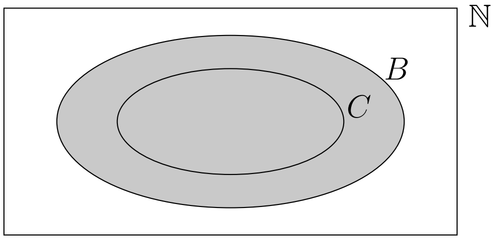
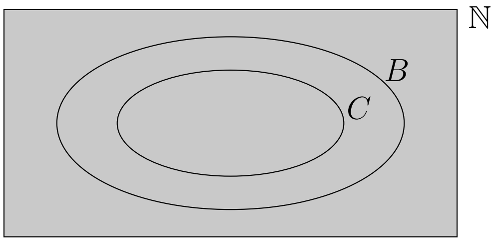
L'énoncé de la première partie est le suivant :

(a) Considérons l'énoncé :

"si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

Dans le diagramme ci-dessus, hachurez les différentes zones qui rendent vrai cet énoncé.

Nous listons dans le tableau suivant les différentes zones que les élèves ont majoritairement hachurées.

Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 66 interrogés)**
La zone hachurée correspond au graphe suivant : 	38
Les élèves hachurent la zone suivante : 	19
Abstention	4
La bonne réponse est donnée : 	3
Autres zones hachurées	2

Plus de la moitié des élèves interrogés (57%) n'hachurent que l'ensemble C. Via cette réponse, les élèves donnent des valeurs à la variable x en ne se concentrant que sur les instances ou implications matérielles associées dont la prémisse est vraie. Cette réponse n'est donc pas correcte car elle ne prend

pas compte le cas d'une prémisse fausse pour les instances associées. Remarquons que cette réponse liée uniquement à la prémisse vraie n'est pas écrasante comme pour le schéma précédemment hachuré à la question 1(a), laquelle récoltait 83% des suffrages. En effet, un peu moins de 29% des élèves noircissent l'entièreté de l'ensemble B.
Seuls trois étudiants hachurent correctement la représentation graphique proposée puisqu'ils noircissent tout l'ensemble $\mathbb{N}$ et tiennent a priori ainsi compte à la fois du cas d'une prémisse vraie et celui d'une prémisse fausse pour les instances associées. Signalons que ces élèves ne représentent seulement qu'un peu plus de 4% des réponses données, contre 6% qui s'abstiennent.

Précisons les différentes réponses données par les élèves :

- 38 personnes (19 dans chaque groupe) n'hachurent que l'ensemble C. Cette réponse est partiellement correcte car comme nous l'avons déjà dit, elle ne prend en compte que le cas de la prémisse vraie des instances associées en substituant des valeurs naturelles à x. Nous pensons que beaucoup de ces élèves font le raisonnement suivant : ils regardent le prédicat "*x est un nombre naturel multiple de 9*" issue de la condition de l'énoncé (a), se placent ensuite dans l'ensemble C associé à la propriété "*être multiple de 9*" (et par extension aux prémisses vraies des instances associées) puis tiennent seulement compte de la conclusion tirée "*x est un nombre naturel multiple de 3*" pour hachurer une zone et plus précisément une partie de l'ensemble C. Pour rendre l'énoncé (a) vrai, ils regardent donc les éléments de C qui vérifient le prédicat "'*x est un nombre naturel multiple de 3*". Or, ces éléments sont ceux appartenant en même temps à l'ensemble B. Ils hachurent donc les éléments présents dans l'intersection de ces deux ensembles. Puisque $C \subset B$, la zone hachurée est juste l'ensemble C.
- 19 élèves hachurent tout l'ensemble B. Cette réponse est plus marquée dans le premier groupe que dans le second : elle y apparaît 13 fois sur 37, soit 35% des réponses du premier groupe et 6 fois sur 29 pour le second, soit 20% des réponses de ce groupe. La question est donc de savoir pourquoi les élèves hachurent-ils cet ensemble B ? Malheureusement, nous n'avons pas demandé explicitement aux élèves de justifier brièvement leur raisonnement pour hachurer une ou plusieurs parties du schéma. Ce manque qui n'a pas posé de problèmes jusqu'à présent, se fait ici ressentir. Nous ne pouvons pas identifier clairement pourquoi 29% des élèves hachurent cet ensemble B. Nous ne pouvons émettre que des hypothèses face à ce choix. Nous en distinguons deux :

  1) La première hypothèse repose sur le fait que l'ensemble C est

dans un premier temps hachuré en ne considérant que le cas d'une prémisse vraie pour les instances associées. L'ensemble $B \backslash C$ est ensuite lui aussi noirci en se basant sur des instances dont la prémisse est fausse et la conclusion vraie. De telles instances sont déclarées vraies par définition d'une implication matérielle. Cependant, cette hypothèse nous paraît peu pertinente avec les résultats obtenus pour les questions précédentes. En effet, le premier hachurage fait à la question 1(a), nous renseigne que près de 83% des élèves n'ont pas tenu compte du cas d'une prémisse fausse en n'hachurant uniquement $A \cap B$. De plus, notre tout premier questionnaire lui aussi laisse entendre que le cas d'une prémisse fausse rendant vraie l'instance associée est totalement absent dans les conceptions des élèves. En effet, pour la question 3 de ce formulaire, aucun élève ne mentionne que les nombres impairs entre 0 et 20 rendent vraie la propriété "*si n est un nombre pair alors $n+1$ est un nombre premier*". Suite aux résultats précédents, nous estimons fort peu probable que des élèves fassent ici le raisonnement qu'une implication matérielle dont la prémisse est fausse sera toujours déclarée vraie.

2) La seconde hypothèse est issue d'une conversation tenue en classe avec trois élèves quelques minutes après avoir répondu à cette question 2. L'un d'eux se demandait pourquoi son voisin avait hachuré tout l'ensemble B. Celui-ci m'expliqua alors que c'est une conséquence de la question 2(c) dans laquelle nous demandons aux élèves de se prononcer sur la vérité de la clôture universelle de "*si x est un naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*". Cet élève coche la case "vrai" et suite à ce choix revient sur le diagramme pour cocher tout l'ensemble B avec la justification orale « *[la question 2(c)] c'est vrai et on dit "pour tout naturel x", donc j'hachure B* ». Les deux autres partagent le choix de case "vrai" pour la question 2(c) mais suite au quantificateur "pour tout naturel" et à la remarque de leur voisin, préfèrent hachurer tout l'ensemble $\mathbb{N}$. C'est peut-être un raisonnement similaire à cette personne qui a fait que d'autres étudiants ont noirci l'ensemble B.

Malheureusement, faute de plus ambles détails sur le raisonnement, nous ne pouvons pas expliquer clairement pourquoi 19 élèves ont hachuré l'ensemble B. Leur motivation est peut-être même différente des hypothèses que nous avons formulé.

– Trois élèves (2 du groupe 1 et 1 du groupe 2) hachurent tout l'ensemble $\mathbb{N}$. Nous avons déjà signalé que deux personnes du groupe 1 noircissent l'ensemble $\mathbb{N}$ suite au choix "vrai" effectué à la question 2(c) et à la mention "pour tout naturel x" dans l'énoncé de celle-ci. Ces deux personnes donnent la bonne réponse en hachurant l'ensemble $\mathbb{N}$ mais l'aspect lié aux instances obtenues dont la prémisse est fausse et vérifiant donc l'énoncé "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*", est caché. La réponse correcte est donc donnée à cette sous-question (a) mais sans avoir conscience du cas d'une prémisse fausse. Pour le troisième étudiant [4], faute d'explications données, nous ne pouvons pas savoir si celui-ci prend bien en compte le cas d'une prémisse fausse dans les instances associées. Il se peut ou non qu'il fasse un raisonnement similaire aux deux élèves précédents.

Nous retenons de cette sous-question (a) que 57% des élèves interrogés restreignent la vérité des instances de cet énoncé conditionnel au seul cas où sa prémisse et sa conclusion sont vraies. Le cas d'une prémisse vraie pour les instances associées est ici aussi majoritairement présent puisque 57% des élèves interrogés ne tiennent visiblement compte que de celui-ci en hachurant l'ensemble C.

L'énoncé de la seconde partie de cette question est le suivant :

(b) L'énoncé

"il existe un nombre naturel x tel que si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

4. Il est issu du groupe 2 mais ne fait pas partie des 15 étudiants ayant suivi un cours sur la logique des propositions pendant des heures de renforcement.

Nous dressons dans le tableau suivant quelques constatations apparaissant majoritairement dans les réponses formulées par les 66 élèves interrogés.

Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 66 interrogés)**
Coche la case "vrai" mais l'explication apportée n'est pas suffisante (aucun élément n'est notamment exhibé pour prouver l'énoncé)	27
Coche la case "vrai" et exhibe un élément pour prouver l'énoncé	17
Ne justifie pas son choix "vrai" avec l'explication apportée	16 (dont 1 sans explications)
Coche la case "faux"	3
Abstention	2
Coche la case "on ne peut pas savoir"	1

L'aspect frappant qui apparaît dans ce tableau est qu'un peu moins de 91% des élèves interrogés cochent la case "vrai". Ce choix est d'ailleurs la réponse correcte à cette question. Cependant, les justifications apportées sont très divisées :

- 41% des élèves livrent des explications non suffisantes pour prouver l'énoncé (b) (ceux-ci ne donnent notamment pas de valeur à la variable x) ;
- 26% justifient correctement leur case "vrai" en prenant une valeur pour x qui rend vraie l'implication associée ;
- enfin 24% des élèves n'explique pas vraiment pourquoi ils ont choisi la case "vrai". Nous jugeons ces justifications peu intéressantes à mentionner.

Les 9% de réponses restants sont partagés entre la case "faux" (4%), des abstentions (3%) et la case "on ne peut pas savoir" (2%).
Détaillons maintenant les justifications apportées à la case "**vrai**".

- Parmi les 27 réponses (14 pour le groupe 1 et 13 pour le groupe 2) dont l'explication apportée n'est pas suffisante pour prouver l'énoncé (b), nous relevons :
  - pour 16 élèves (11 et 5 selon les groupes), la mention ≪ *car tous les multiples de 9 sont également multiples de 3* ≫. La justification s'arrête là et les élèves semblent ne pas différencier les quantificateurs "*il existe*" et "*pour tout*". Ils ne concluent pas en effet de cette phrase qu'il existe en particulier un multiple de 9 qui est aussi multiple de 3, en donnent un et montre que c'est bien le cas.

- pour 11 personnes (3 et 8 selon les groupes), une mention à l'inclusion d'ensembles $C \subset B$, ≪ [l'énoncé (b) est coché vrai] *car l'ensemble des multiples de 9 est inclus dans l'ensemble des multiples de 3* ≫. Cependant, pas plus d'explications ne nous sont données par rapport au quantificateur "*il existe*". Celui-ci est-il d'ailleurs compris des élèves ? Aucune valeur n'est donnée à x pour prouver la vérité de l'énoncé (b).

– 17 élèves (10 sur 37 pour le groupe 1 et 7 sur 29 pour le groupe 2) justifient la case "vrai" cochée en donnant une valeur à la variable x. La mention "*prenons* $x = \ldots$" n'est pas présente excepté 5 fois pour le groupe 1 et 2 pour le second. Les élèves vérifient bien la prémisse et la conclusion de l'instance associée en remplaçant x par la valeur choisie mais ils ne mentionnent pas au final pourquoi cette instance est vraie. Les vérifications des vérités de la prémisse et la conclusion renvoient au fait que ces deux propositions doivent être vérifiées pour que l'implication puisse être déclarée vraie, mais il n'y est fait aucune mention dans les copies des élèves. Remarquons que la valeur donnée à x est toujours un nombre multiple de 9, ce qui renvoie au cas de la prémisse vraie.

Au final, parmi les 60 élèves (91%) ayant coché la bonne case qui est "vrai", seuls 17 (soit 25% des personnes interrogées) justifient correctement leur choix en exhibant un élément pour prouver la clôture existentielle de l'énoncé "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*".

Très peu d'élèves choisissent une case erronée parmi celles "**faux**" et "**on ne peut pas savoir**". Bien que ces choix soient peu présents, expliquons très brièvement les justifications apportées à ces cases.

– 3 élèves (dont 2 du groupe 1 et 1 du groupe 2) cochent "faux" car ils interprètent le quantificateur "*il existe*" comme étant "*il existe un et un seul*". Il s'ensuit alors la réponse "faux" car l'énoncé (b) admet plusieurs valeurs de x qui rendent les instances respectivement associées vraies et non pas une unique valeur.

– 1 seul élève du groupe 1 choisit la case "on ne peut pas savoir". La rasions qu'il invoque est que la variable x n'est pas connue et qu'elle n'est pas un nombre explicite. L'élève coche donc cette case sans comprendre le sens du quantificateur "*il existe*".

Terminons l'analyse de cette question en signalant que globalement nous avons relevé 30 explications (19 et 11 selon les groupes) qui font apparaître une confusion ou une non compréhension des quantificateurs "*il existe*" et "*pour tout*". Ce constat est particulièrement marqué pour le premier groupe dans lequel plus de 51% des élèves confondent ceux-ci. Signalons également le mélange de vocabulaire existant entre les notions utilisées "*inclus*" et "*appartient*" par les élèves. Ce mélange est présent chez 5 élèves du second groupe.

La troisième partie de notre question s'énonce comme telle :

(c) L'énoncé "pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3." est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Nous avons relevé majoritairement les réponses suivantes :

Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 66 interrogés)**
Ne justifie pas son choix "vrai" avec l'explication apportée	40 (dont 1 sans explications)
La case "vrai" est cochée	15
La case "faux" est choisie	6 (dont une sans justifications)
Abstention	5
Coche la case "on ne peut pas savoir"	0

La réponse correcte, à savoir la case "vrai", est cochée par 55 personnes. Cela qui représente 83% des élèves interrogés. Parmi ces 55 personnes, 40 (soit près de 73% des cases "vrai" cochées) ne justifient par leur choix de par l'explication fournie. Seuls 15 élèves (soit près de 27% des cases "vrai" cochées), donnent des justifications que nous jugeons intéressantes mais celles-ci ne sont pas toujours abouties. Nous y reviendrons par après. Outre le choix de la case "vrai" qui rassemble donc très majoritairement les étudiants, 6 (soit près de 9%) préfèrent cocher la case "faux" ou s'abstenir (8%). Aucun élève n'a choisi la case "on ne peut pas savoir".

Détaillons les justifications apportées par les élèves pour les cases "**vrai**" :

- Une grande majorité des explications fournies (40 soit 26 pour le groupe 1 et 14 pour le groupe 2) ne justifie pas le choix "vrai" effectué. Dans celles-ci, une constatation ressort malgré tout, ≪ *tout multiple de 9 est multiple de 3* ≫, présent 10 fois sur 40 explications et plus précisément 7 et 3 fois selon les groupes. Celle-ci n'est rien d'autre qu'une reformulation de l'énoncé (c) et elle est toujours dépourvue d'explications supplémentaires. Elle ne constitue pas pour nous une justification suffisante.

– Les 15 autres explications attachées à cette case "vrai" sont plus intéressantes :

 • 14 élèves (4 du groupe 1 et 10 du groupe 2) font référence au fait que l'ensemble C des multiples de 9 est inclus dans B, celui des multiples de 3. L'implication formelle proposée en (c) est donc vraie selon 5 étudiants issus du groupe 2, suite à cette inclusion. Aucuns détails supplémentaires ne nous sont donnés. Les 9 autres étudiants (4 et 5 selon les groupes) invoquent également cette raison mais précisent que de cette inclusion, ≪ *on peut dire que tous les éléments de C appartiennent à B. De là, tout naturel multiple de 9 est également multiple de 3* ≫. Nous pensons que ces 9 élèves établissent ainsi de par cette explication, un lien entre la vérité de l'énoncé (c) et l'inclusion d'ensembles entre C et B.

 • Un étudiant du groupe 2 affirme que l'énoncé (c) est vrai en sous-entendant que sa négation est fausse. Cette idée est exprimée en français : ≪ *il n'est pas possible de trouver un multiple de 9 qui n'est pas multiple de 3* ≫. Son raisonnement est correct mais non abouti car il ne montre pas que cette négation est bien fausse.

Près de 9% des élèves interrogés font un mauvais choix en noircissant la case "**faux**". Nous choisissons de discuter de cette réponse "faux" car la justification de celle-ci repose pour 4 élèves (dont 3 issus du groupe 1) sur la conception qu'une implication matérielle est fausse ou n'a pas de sens si sa prémisse est fausse. C'est du moins ce qui transparait dans leur rédaction :

– ≪ *Ce n'est pas possible que cela soit pour tout nombre naturel x, x n'est pas forcément multiple de 9* ≫ (2 fois)
– ≪ *il faut que ce nombre soit absolument multiple de 9 ainsi que de 3. Seuls les réels appartenant à la fois à l'ensemble C et donc à B* [le zone hachurée pour la sous-question (a) est justement l'ensemble C] *vérifient cet énoncé* ≫ (idée relevée 2 fois).

Ces commentaires nous font penser qu'après avoir donné diverses valeurs à la variable x, l'élève peut se retrouver face à des instances qu'il déclare fausse selon la conception "*$P \Rightarrow Q$ est faux lorsque P est faux*", où P et Q sont deux propositions. Il peut aussi déclarer ces instances comme n'ayant aucun sens simplement parce que la prémisse est fausse. En particulier, suite aux allusions ensemblistes de ces deux derniers élèves, nous pensons que pour ceux-ci les éléments de l'ensemble $B\setminus C$ ne vérifient pas l'énoncé (a) (que pensent-ils alors de l'implication matérielle obtenue en substituant x par 12 ?) et qu'il en va de même pour les éléments de l'ensemble $\mathbb{N}\setminus B$ (que pensent-ils alors

de l'implication obtenue en remplaçant x par 2 ?).
Enfin, un élève du groupe 2 coche la case "faux" en confondant apparemment l'implication proposée avec sa réciproque : « *un multiple de 3 (12 par exemple) n'est pas forcément multiple de 9* ». Il semble se prononcer en réalité sur l'implication formelle "*pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 3 alors x est un nombre naturel multiple de 9*", qu'il déclare fausse en lui donnant un contre-exemple.

En résumé, parmi les 83% d'élèves qui choisissent la case "vrai", seules 14 personnes (21%) fournissent une explication qui justifie correctement la clôture universelle de l'énoncé "*si x est un nombre naturel multiple de 3 alors x est un nombre naturel multiple de 9*". Cette explication est basée sur l'inclusion de l'ensemble C dans B. Cependant les justifications ne sont pas toujours rigoureuses.

Enfin, terminons notre analyse en nous intéressant aux réponses proposées par les 66 élèves interrogés à notre quatrième et dernière partie de cette question dont l'énoncé est le suivant :

(d) Pouvez-vous établir un lien entre l'énoncé

"pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

et le fait que C soit inclus dans B ?
Expliquez votre réponse.

Voici un tableau illustrant les réponses majoritaires formulées par les élèves à propos de l'existence de ce lien :

Réponses des élèves	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 66 interrogés)**
Réponse non pertinente (aucun oui ou non n'est d'ailleurs formulé)	48
Répond "oui"	8
Répond "oui" mais la justification apportée n'établit pas de lien entre l'énoncé et le fait que C soit inclus à B	6
Abstention	4

Parmi les 66 élèves, 47 (soit 72,5% des réponses - un chiffre assez conséquent) nous donnent une explication que nous jugeons non pertinente. La justification apportée ne fait d'ailleurs pas apparaître si oui ou non les élèves estiment qu'il existe un lien entre l'énoncé donné et l'inclusion de C dans B. Ce pourcentage dédié aux réponses peu intéressantes est principalement gonflé par les réponses des étudiants du groupe 1 : 32 cas sur 37 relevé, soit 86,5% des réponses du groupe. Pour le groupe 2, nous constatons 16 cas sur 29, soit 55% des réponses de ce groupe. Notons que 4 personnes de ce groupe ont répondu que la sous-question (c) était vraie car l'ensemble des multiples de 9 est inclus dans celui des multiples de 3 mais ils n'établissent pas de lien ici. Au total 14 élèves (soit un peu moins de 21,5%) répondent par l'affirmative sur l'existence d'un lien. Malheureusement, suite aux explications apportées, nous devons en rejeter 6 car aucun lien n'est établi entre l'énoncé et l'inclusion proposée. Parmi toutes les réponses apportées à cette question, nous ne pouvons donc tenir compte que de 12% de celles-ci (soit 8 personnes). Nous listons par après ces quelques réponses. Enfin, 6% des élèves (soit 2 personnes dans chaque groupe) s'abstient.

Détaillons les justifications pertinentes apportées à la réponse "**oui**" :

– 7 élèves (dont 4 du groupe 1) partent de l'inclusion de C dans B pour ensuite établir la vérité de l'énoncé proposé :

  - ≪ *C est inclus dans B, donc tous les nombres dans C sont aussi dans B. C représente tous les multiples de 9 et B tous les multiples de 3. Donc, on peut conclure que tout multiple de 9 est également multiple de 3* ≫ (recensé 6 fois dont 3 dans chaque groupe). Un élève du groupe 2 nous précise bien que *l'énoncé [donné] est donc vrai* ≫.
  - dans le même ordre d'idée, nous relevons ≪ *oui car C représente les nombres multiples de 9 et il est comprit* [l'emploi du mot "*inclus*" est plus approprié] *dans B qui représente les nombres multiples de 3. C'est-à-dire que quelque soit le nombre multiple de 9 que je choisi* [lien avec l'expression "pour tout"] *il est aussi multiple de 3* ≫ (1 fois dans le groupe 1).

  Ces 7 élèves expliquent donc que la vérité de l'énoncé découle de l'inclusion de C dans B.

– auprès d'un étudiant du groupe 2, nous relevons une explication particulièrement intéressante : [l'énoncé donné] ≪ *signifie que tous les nombres multiples de 9 sont multiples de 3. Pour cela, l'ensemble des multiples de 9 doit donc être contenu* [le mot "*inclus*" est plus approprié] *dans l'ensemble des multiples de 3 [...]* ≫. C'est d'ailleurs cet élève qui a déclaré à la question 1(c) que l'énoncé "*pour tout naturel x, si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est faux car l'ensemble B des multiples de 3 n'est pas inclus dans A celui des nombres pairs. Plus précisément, il dit : ≪ *[faux] car une grande*

> *partie de l'ensemble B n'est pas contenue dans l'ensemble A* ≫. Quant à la question 2(c), il déclare l'énoncé "*pour tout naturel x, si x est un naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" vrai car ≪ *tous les éléments de C appartiennent à B* ≫.
> Cet élève associe dont que l'implication "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" n'est pas vraie pour tous les éléments $x \in \mathbb{N}$ car dans le schéma proposé B n'est pas inclus à A. Tandis qu'il considère l'implication "*si x est un naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" vrai pour tous les éléments $x \in \mathbb{N}$ car cette fois-ci, comme le schéma le propose, il y a une inclusion d'ensembles de C dans B.
> Cette personne est la seule à établir vraiment un lien entre la disposition des diagrammes de Venn présentés à nos questions 1 et 2 et les clôtures universelles des énoncés conditionnels respectifs de ces questions.

En résumé, parmi les 66 personnes interrogées, 8 élèves (soit 12% du public) établissent un lien entre l'énoncé proposé et l'inclusion d'ensembles de C dans B. Ils expriment tous la vérité de cet énoncé grâce à l'inclusion d'ensemble. Remarquons qu'un seul élève (moins de 2%) établit que l'implication "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est fausse pour certains éléments $x \in \mathbb{N}$ car $B \not\subset A$, tandis que celle "*si x est un naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est vraie pour tous les éléments $x \in \mathbb{N}$ car $C \subset B$. Cet étudiant est le seul à établir un lien entre une implication de la forme *si* $P(x)$ *alors* $Q(x)$ et une inclusion d'ensembles.

Nous réalisons au chapitre suivant un bilan des connaissances des élèves sur la notion d'implication.

Chapitre 7

Bilan des connaissances des élèves sur la notion d'implication

Dans ce chapitre, nous réalisons un bilan des connaissances et des conceptions que des élèves du secondaire peuvent avoir sur l'implication. Celles-ci sont mises en évidence par notre expérimentation dans les classes. Nous avons analysé les réponses des élèves à nos deux questionnaires au chapitre précédent. Nous décrivons ce bilan à partir du questionnement développé dans notre problématique.

7.1 Cadres de travail majoritairement mobilisés

Nous avons vu, au chapitre 2, que l'implication peut être travaillée dans trois cadres de travail à savoir le cadre de la logique formelle, le cadre ensembliste et celui du raisonnement déductif. Nous analysons donc ici les connaissances des élèves dans ces différents cadres.

7.1.1 Le cadre de la logique formelle

Notre analyse des programmes effectuée au chapitre 1 nous montre que la logique des propositions n'est plus enseignée depuis quelques années dans l'enseignement secondaire. Néanmoins, nous voulons savoir ce qu'il en est réellement de la présence du cadre de travail logique de l'implication sur le terrain. Nous désirons particulièrement savoir si celui-ci est présent dans les conceptions des élèves sur cette notion tout en sachant que la logique des propositions n'est pas enseignée dans toutes les classes.

Nous savons que 15 élèves du groupe 2 ont reçu un cours sur la logique des propositions dans un cours de renforcement mathématique. Dans celui-ci, l'enseignant dresse notamment la table de vérité de l'implication "*si P alors Q*", établit l'équivalence entre celle-ci et sa contraposée ou encore l'équivalence entre celle-ci et la disjonction $\neg P \vee Q$. Ces élèves sont donc a priori plus enclins à faire quelques références à ce cadre de travail. Suite à la diffusion de nos questionnaires, nous constatons qu'il n'en est rien et que le cadre logique est relativement absent dans les connaissances de ces 15 élèves mais aussi auprès des autres étudiants des groupes 1 et 2. Pour notre premier questionnaire, nous avons interrogé 60 élèves ayant 4 heures de mathématiques par semaine et 55 en ayant 6 par semaine. Les 15 élèves susmentionnés sont issus de ce second groupe. Donnons quelques constats qui caractérisent l'absence très majoritairement observée de ce cadre de travail :

- Lorsque nous demandons aux élèves de donner la signification selon eux de l'expression "*si P alors Q*", nous ne trouvons par exemple pas de définition de cette expression avec sa table de vérité et ce y compris pour les 15 personnes ayant suivi un cours de logique des propositions. Néanmoins, deux élèves parmi ces 15 font partiellement référence à la table de vérité de celle-ci en donnant une explication uniquement formulée en français sur les différentes distributions de valeurs de vérité de P et Q qui rendent vraie cette expression : P vrai et Q vrai, P faux et Q vrai et P faux et Q faux. Insistons sur le fait qu'aucune table de vérité n'est dressée par ces élèves pour s'aider.
  Au-delà de cette question liée à la signification que les élèves donnent à l'expression "*si P alors Q*", nous remarquons que ce groupe de 15 élèves ne dressent jamais dans nos deux questionnaires, la table de vérité d'une implication matérielle pour éventuellement l'utiliser comme aide dans des raisonnements ou comme aide pour établir la vérité d'un énoncé conditionnel.
- Concernant notre premier formulaire, dans l'ensemble des expressions signifiant la même chose que "*si P alors Q*" que nous donnent les élèves, nous ne relevons pas d'expression correcte équivalente d'un point de vue logique à "*si P alors Q*". Les élèves formulent plutôt des expressions équivalentes d'un point de vue langagier. Nous y reviendrons par après. Signalons que trois élèves parmi les 15 ayant suivi un cours de logique nous donnent une formule erronée de la contraposée : $\neg P \Rightarrow \neg Q$. Cette formule signifie donc selon eux la même chose que "*si P alors Q*". Cette expression erronée fait justement référence à la conception fausse sur une contraposée que nous pensons présente chez certains élèves :

$\neg P \Rightarrow \neg Q$ est équivalent à $P \Rightarrow Q$. Ici aussi, nous en reparlerons par la suite. Nous notons également qu'aucun élève ne fait de référence à l'expression $\neg P \vee Q$ équivalente d'un point de vue logique à $P \Rightarrow Q$, 15 élèves ont pourtant vu en classe cette équivalence logique via un cours de renforcement.

– Nous trouvons néanmoins localement deux références implicites au cadre de la logique. Deux élèves parmi ce groupe des 15 font implicitement référence à la table de vérité de l'implication dans leurs justifications pour statuer sur la vérité des implications matérielles "*3 pair ⇒ 4 pair*" et "*3 pair ⇒ 4 impair*". Pour la première, ils ne répondent pas correctement à celle-ci puisqu'ils cochent la case "faux" en expliquant ≪ 0 ⇒ 1 *donne faux* ≫. Ils identifient que la prémisse "*3 pair*" est fausse en symbolisant cette vérité par la valeur booléenne 0 et que la conclusion "*4 impair*" est vraie. Ils utilisent alors le symbole booléen 1 pour représenter cette valeur de vérité. La notation "0 ⇒ 1" employée fait partiellement référence à la table de vérité de l'implication. Cependant, ces deux élèves identifient que la valeur de vérité de cette implication matérielle est fausse au lieu d'être vraie. Par contre, pour l'implication matérielle "*3 pair ⇒ 4 impair*", ils cochent convenablement la case "vrai" et justifient ensuite correctement ce choix avec l'explication ≪ 0 ⇒ 0 *donne vrai* ≫. Ceci fait partiellement référence à la table de vérité de l'implication et notamment au cas où celle-ci est vraie lorsque la prémisse "3 pair" et la conclusion "4 impair" sont toutes les deux fausses (le caractère faux étant symbolisé par le symbole booléen 0).
  Ces deux élèves semblent baser leurs explications sur la convention de vérifonctionnalité établie dans le calcul des propositions. En effet, ils identifient la valeur de vérité des propositions "*3 pair*", "*4 pair*" ou "*4 impair*" de ces implications matérielles et établissent ensuite la vérité des implications en fonction de la définition du connecteur propositionnel "...⇒..." qui relient les propositions. Notons qu'ils se trompent dans le cas de l'explication apportée à "*3 pair ⇒ 4 pair*".

Le cadre logique de l'implication est donc selon nous absent au niveau des connaissances des élèves du secondaire. Ceci n'est pas une surprise puisque la logique des propositions ne figure pas dans les programmes de cours. Les 15 personnes du groupe 2 ayant suivi un cours sur la logique des propositions ne font pas spécialement plus de références à ce cadre que les autres élèves. Bien que leur professeur leur ait donné un enseignement explicite du connecteur propositionnel "*si... alors...*", ils ne semblent pas rester chez ceux-ci beaucoup de connaissances liées à cette étude.

7.1.2 Le cadre ensembliste

Nous avons dédié un questionnaire entier à l'étude des connaissances des élèves sur ce cadre de travail ensembliste de l'implication. Nous voulons savoir via celui-ci si les élèves établissent un lien entre une implication du type $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ et une inclusion d'ensembles. En particulier, nous désirons nous concentrer sur les diagrammes de Venn des figures 7.1 et 7.2 et voir à quelle configuration les élèves associent une implication vraie pour tous les éléments de l'ensemble de référence.

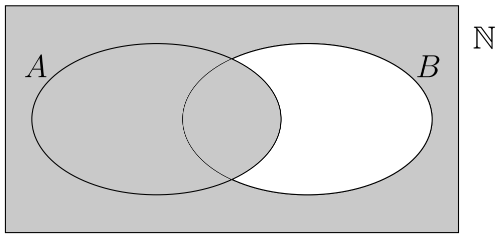


FIGURE 7.1 – Cas où l'implication entre énoncés contingents $\mathrm{B}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x)$ est fausse pour les éléments x qui sont dans B sans être dans A.

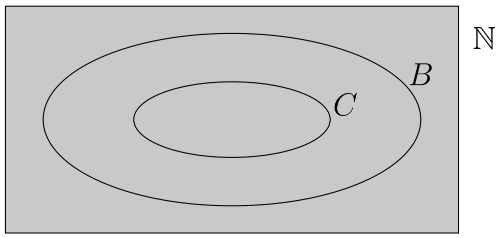


FIGURE 7.2 – Cas où l'implication entre énoncés contingents $\mathrm{C}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ est vraie pour tous les éléments x de $\mathbb{N}$.

Notre expérimentation sur le terrain nous révèle que peu d'élèves semblent établir un lien entre une implication et une inclusion d'ensembles. Plus précisément, dans notre questionnaire ensembliste, nous voulions que les élèves puissent dégager un lien entre l'implication formelle "*pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" et l'inclusion d'ensembles proposée $C \subset B$ où B est l'ensemble des naturels multiples de 3 et C celui des naturels multiples de 9. Nous avons l'impression que ce lien est peu présent dans les connaissances des élèves car nous n'avons pu tenir compte que des réponses de 12% des 66 personnes interrogées, soit 8 individus. Parmi ceux-ci, 7 élèves (un peu plus de 10% du public) partent de l'inclusion de l'ensemble C dans B pour ensuite établir la vérité de l'implication formelle proposée. Ils suivent tous le raisonnement suivant repris d'un élève : « *C est inclus dans B, donc tous les nombres dans C sont aussi dans B. C représente tous les multiples de 9 et B tous les multiples de 3. Donc, on peut conclure que tout multiple de 9 est également multiple de 3. L'énoncé [donné] est donc vrai* ». Le huitième élève (un peu moins de 2% du public interrogé) donne quant à lui une réponse particulièrement intéressante avec notre questionnement ensembliste puisqu'il fait le lien entre la vérité des clôtures universelles des énoncés conditionnels proposés et les diagrammes de Venn respectivement associés à chacun de ces énoncés. Cet élève est le seul à associer à la fois que :

- l'implication "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" n'est pas vraie pour tous les éléments $x \in \mathbb{N}$ car B, l'ensemble des naturels multiples de 3 n'est pas inclus à A, l'ensemble des nombres pairs ;
- par contre l'implication "*si x est un naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" vrais pour tous les éléments $x \in \mathbb{N}$ car cette fois-ci, il y a une inclusion de l'ensemble C des naturels multiples de 9 dans B, celui des naturels multiples de 3.

Cet élève est donc le seul à établir apparemment une équivalence entre une implication formelle vraie et une inclusion d'ensembles ou dit autrement à considérer apparemment que tous les éléments x rendent vraie l'implication $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ si et seulement si l'ensemble P est inclus à l'ensemble Q.

Peu d'élèves (seulement 8 sur 66) établissent donc à travers notre questionnaire ensembliste, un lien entre un énoncé conditionnel $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ et une inclusion d'ensembles. Un seul d'entre eux fait explicitement le lien entre nos diagrammes de Venn et la valeur de vérité des clôtures universelles des énoncés conditionnels respectivement associés à ces diagrammes. Nous pourrions conclure que le cadre ensembliste de l'implication semble donc relativement absent des connaissances du secondaire mais nous ne le ferons pas. En effet, nous estimons avoir une part de responsabilités dans le peu de réponses pertinentes pour établir un lien entre une implication et une inclusion d'ensembles. Nous entendons par là que notre questionnaire ensembliste ne permet pas d'obtenir beaucoup de renseignements sur les connaissances des élèves dans le cadre ensembliste. En effet, si un unique élève établit un lien entre les deux diagrammes et la clôture universelle des énoncés conditionnels associés à chacun de ces deux diagrammes, c'est en partie car notre dernière question est mal exprimée. Nous estimons notre questionnaire pertinent avec notre questionnement sur l'implication mais notre dernière question est trop ciblée sur le lien existant entre l'implication formelle "*pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" et l'inclusion d'ensembles de C dans B. Que les élèves répondent ou non à cette question, ils ne vont pas ensuite comparer cette situation à celle du premier schéma ensembliste où pour les deux ensembles donnés, nous n'avons pas l'inclusion d'un ensemble dans un autre. C'est donc ici que notre questionnaire ensembliste révèle ses lacunes, il ne permet pas, suite à notre expérimentation sur le terrain, de comparer les deux diagrammes de Venn donnés et la valeur de vérité des clôtures universelles des énoncés conditionnels respectivement associés à ces diagrammes.

Nous pouvons néanmoins dégager quelques informations sur les connaissances des élèves face à une implication. Nous leur avons demandé pour chaque diagramme d'hachurer les ensembles ou les zones qui selon eux rendent vrai l'énoncé conditionnel respectivement associé à chaque diagramme. Les élèves doivent donc identifier dans chacun des cas les éléments x qui rendent vrai l'énoncé conditionnel associé de la forme $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$. Nous reviendrons sur cet enjeu de vérité lié aux différents cas qui rendent vraie une instance associée de cet énoncé $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ dans la partie 7.4 de ce chapitre.

Dans notre questionnaire ensembliste, nous traitons également des quantificateurs universels et existentiels. Plus précisément, nous demandons aux élèves de se prononcer sur la clôture existentielle et celle universelle des énoncés conditionnels de la forme "*si $P(x)$ alors $Q(x)$*" associé à chaque schéma ensembliste. Globalement, bien que la grande majorité des élèves se prononce correctement face aux différentes clôtures, ceux-ci ne donnent pas toujours des explications correctes et rigoureuses sur ce choix de vérité. Pour les clôtures existentielles, nous distinguons notamment des erreurs dues à un manque de compréhension du quantificateur "*il existe*" :

– 32% des élèves nous disent que c'est l'ensemble $A \cap B$ qui vérifie la clôture existentielle de l'énoncé "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" où A est l'ensemble des nombres pairs et B celui des naturels multiples de 3 au lieu d'exhiber un élément de cet ensemble ;
– nous n'avons pas relevé de justifications affirmant ≪ *c'est tout l'ensemble C* ≫ pour la clôture existentielle de l'énoncé "*si x est un naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" où C est l'ensemble des nombres naturels multiples de 9 mais nous avons constaté qu'un total de 30 élèves (soit 45% du public interrogé) semble confondre les quantificateurs "pour tout" et "il existe".
– plus localement, nous identifions dans les explications des élèves une confusion entre les quantificateurs "il existe" et "il existe un et un seul" (relevé respectivement 2 et 3 fois pour les questions 1 et 2).

Résumons les bonnes réponses des élèves face à ces différentes clôtures :

– La clôture existentielle de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est identifiée comme vraie par 85% du public et elle est correctement justifiée par 33% des 66 élèves interrogés. Ceux-ci donnent une valeur à la variable x et vérifient ensuite que l'instance associée est vraie. De par l'explication donnée et formulée en fançais, nous identifions que la valeur x est toujours prise dans l'intervalle $A \cap B$ du schéma ensembliste associé bien qu'uniquement 4 personnes (soit 6%) mentionnent explicitement que $x \in A \cap B$ et font ainsi le lien avec notre schéma.

– La clôture universelle de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est reconnue par 94% des élèves comme étant fausse mais seules 36% des explications sont justes puisqu'un contre-exemple y est explicitement donné. Nous identifions que pour chaque contre-exemple, les élèves prennent bien un élément multiple de 3 (appartenant donc à B) et non pair (n'appartenant donc pas à A). Les élèves ne nous signalent cependant pas que la valeur naturelle prise par x dans ce contre-exemple appartient à $B \backslash A$ pour ainsi faire le lien avec notre schéma ensembliste. Notons qu'un seul élève fait ce lien en disant que l'ensemble B n'est pas inclus dans A et en listant quelques éléments appartenant à l'ensemble B mais pas à A.
– La clôture existentielle de "*si x est un naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est reconnue vraie par 91% des élèves mais seulement 25% des élèves justifient correctement en exhibant un élément. La valeur choisie est toujours un multiple de 9 et elle vérifie par conséquent la prémisse et la conclusion de l'instance associée. Signalons que 11 élèves (soit 17% des personnes interrogées) reconnaissent la vérité de cette clôture existentielle en faisant allusion à l'inclusion d'ensembles C dans B mais leur explication n'exhibe pas d'élément et ils semblent apparemment confondre les quantificateurs "pour tout" et "il existe".
– Enfin, la clôture universelle de "*si x est un naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est reconnue par 83% mais seul 21% justifient de façon pertinente leur choix via une explication basée sur l'inclusion de C dans B.

7.1.3 Le cadre du raisonnement déductif

Au chapitre 1, nous avons relevé la présence du mot-clé "*contraposition*" dans les programmes du troisième degré ($5^{\text{ième}}$ et $6^{\text{ième}}$ années de l'enseignement secondaire belge) et plus précisément dans les formations à 4 ou 6 heures de cours par semaine. Nos questionnaires sont justement destinés à ces élèves. Via nos formulaires, nous voulons donc savoir si le raisonnement par contraposition est connu des élèves et en particulier si la contraposée d'une implication peut être utilisée pour statuer sur la vérité d'une implication matérielle.

Nous testons ce raisonnement avec la question 2(b) de notre premier questionnaire. Bien que 40% des élèves estiment que le raisonnement par contraposition que nous proposons soit correct, très peu justifient rigoureusement ce choix. Nous n'avons en effet recensé que 5 élèves (soit 4%), tous issus du groupe 2, qui nous fournissent une explication partiellement juste : ils mentionnent que la proposition "*si la propriété Y n'est pas vérifiée alors la propriété X n'est pas vérifiée*" est issue de l'implication "*si la propriété X est vérifiée alors la propriété Y est vérifiée*" donnée mais ils ne justifient pas ce passage lié à la contraposée. Ces élèves estiment-ils ces deux propositions équivalentes ? Signalons que les autres explications liées à ce choix de case sont soit non pertinentes (21%), soit peu convaincantes (14%) et ne font que répèter ce que nous avons dit dans notre énoncé "affirmations/conclusion". Le raisonnement par contraposition et la notion de contraposée sous-jacente ne semble donc pas avec cette question être connus des élèves. Nous recensons notamment 11 élèves (soit près de 10%) qui cochent pour cette question la case relative à un manque d'informations en avançant l'idée que la proposition "*si la propriété Y n'est pas vérifiée alors la propriété X n'est pas vérifiée*" n'est pas mentionnée dans notre énoncé. Cette précision sur un manque d'informations contribue à renforcer notre opinion sur l'absence de connaissances des élèves à propos de la notion de contraposée. Désireux de mettre en défaut ces connaissances éventuelles, nous rédigeons notre question 2(c) en nous basant sur la conception erronée suivante à propos de la contraposée d'une implication matérielle : $\neg A \Rightarrow \neg B$ est équivalent à $A \Rightarrow B$, où A et B sont deux propositions. Nous relevons que 24% des élèves cochent la case "vraie" en mettant justement en évidence dans leurs justifications la conception erronée susmentionnée sur la contraposée. Les élèves ont donc tendance à dire que la contraposée de l'implication "*si A alors B*" est "*si non A alors non B*", plutôt que "*si non B alors non A*". Nous retrouvons notamment 3 références à cette conception erronée dans les expressions que les élèves estiment équivalentes à "*si P alors Q*" dans la question 1 de notre premier questionnaire. Ces trois étudiants font pourtant partie des 15 personnes du groupe 2 qui ont formulé dans un cours de renforcement mathématique la contraposée d'une implication matérielle.

Faute d'être connue, la contraposée d'une implication ne peut donc pas être utilisée par les élèves comme un outil pour répondre de la vérité de l'implication matérielle "*3 pair $\Rightarrow$ 4 impair*". Signalons qu'en utilisant cet outil, les élèves retombent sur la proposition "*4 pair $\Rightarrow$ 3 impair*" permettant ainsi d'éliminer le cas de la prémisse fausse. Un cas qui comme nous le verrons par après, peut paraître inhabituel et dérangeant pour les élèves et motiver chez certains l'envie de s'en débarrasser en remettant en cause ses propres connaissances. Néanmoins, cet outil est pourtant disponible chez 15 élèves, ceux précisément qui ont établi en renfort mathématique l'équivalence entre une implication et sa contraposée. Ces élèves n'utilisent pourtant pas la contraposée pour répondre à cette question. Il faut dire que malgré cet enseignement explicite sur l'expression "*si P alors Q*", la formule $\neg Q \Rightarrow \neg P$ de sa contraposée n'est pas reconnue. Six élèves sur 15 identifient de manière erronée la contraposée comme étant $\neg P \Rightarrow \neg Q$ tandis que 5 autres (les 4% justement mentionné ci-avant) l'identifient correctement mais ne précisent pas s'il existe une équivalence entre une implication et sa contraposée. Les autres élèves de ce groupe ne reconnaissent quant à eux pas la contraposée ni même la conception erronée sur celle-ci. Nous nous demandons dès lors s'ils peuvent formuler la contraposée de "*si P alors Q*" ?

En ce qui concerne la règle du *Modus Ponens*, celle-ci n'apparaît pas explicitement dans les significations que les élèves peuvent donner ou associer à l'expression "*si P alors Q*". Dans cette règle, la vérité de "*si P alors Q*" associée à celle de P ne conduit à prendre en compte que le cas "*si P est vrai alors Q est vrai*". Ceci peut amener certains élèves à réduire la vérité de l'expression "*si P alors Q*" à ce seul cas. Nous retrouvons notamment cette expression "*si P est vrai alors Q est vrai*" mise en évidence par 19% des élèves lorsque nous leur avons demandé quelle signification ils donnaient à l'expression "*si P alors Q*", et ce sans lui associer la valeur de vérité vraie. Les élèves vont donc même plus loin dans cette réduction puisqu'ils estiment que c'est l'expression "*si P alors Q*" elle-même, c'est-à-dire sans être associée à la valeur de vérité vraie, qui est restreinte à "*si P est vrai alors Q est vrai*". En dehors de ce constat, nous devons avouer que nous n'avons pas testé la présence et la compréhension par les élèves de la règle du *Modus Ponens* dans nos deux questionnaires. En effet, en créant la question 2 de notre premier questionnaire à propos du raisonnement émis sur la conclusion de deux affirmations dont l'une est un énoncé conditionnel, nous avons voulu mettre dans cette question l'accent sur la confusion possible entre une implication et une équivalence, sur la règle du *Modus Tollens* et enfin, sur une conception erronée de la contraposée. Nous aurions dû tester par la même occasion la règle du *Modus Ponens*. Pensant que cette règle est probablement très présente auprès des élèves, nous avons donc malheureusement privilégié les trois aspects précédemment cité en omettant d'étudier cette règle. Nous nous retrouvons donc dans la position de ne pas pouvoir nous prononcer sur la compréhension ou non de ce raisonnement dit direct par les élèves du secondaire. Nous trouvons néanmoins quelques traces locales de celui-ci dans les réponses des élèves face à nos deux questionnaires :

- dans notre question portant sur le raisonnement par contraposition, 5 élèves identifient que la proposition "*si la propriété Y n'est pas vérifiée alors la propriété X n'est pas vérifiée*" est issue de l'implication "*si la propriété X est vérifiée alors la propriété Y est vérifiée*" donnée en première affirmation. De la seconde affirmation donnée "*la propriété Y n'est pas vérifiée*", ils en déduisent alors que la propriété X n'est pas vérifiée elle aussi.
- dans notre question basée sur une conception erronée de la contraposée, 28 élèves identifient justement la contraposée de l'implication $A \Rightarrow B$ donnée en première affirmation comme étant l'expression incorrecte $\neg A \Rightarrow \neg B$. De cette expression et de la seconde affirmation que nous schématisons par la proposition $\neg A$, les élèves établissent alors que la conclusion $\neg B$ est vraie en utilisant le raisonnement du *Modus Ponens.*

Faute d'une étude explicite dans nos questionnaires, nous ne sommes pas en position d'affirmer que la règle du *Modus Ponens* est partagée des élèves.

7.2 Influence de la logique naturelle sur les connaissances associées à une implication

Dans notre analyse des programmes de l'enseignement secondaire réalisée au chapitre 1, nous avons remarqué que l'implication est très associée au langage. Cette association est selon nous renforcée par l'emploi au quotidien de l'expression "*si... alors...*" utilisée pour s'exprimer avec les personnes qui nous entourent. Nous nous intéressons donc au registre de la langue naturelle de l'implication et sur son influence sur les conceptions des élèves face à un énoncé mathématique sous forme conditionnelle.

7.2.1 Quelle signification selon les élèves pour "*si P alors Q*" à partir du langage naturel ?

Nous avons demandé à la question 1 de notre premier questionnaire quelle signification les élèves donnent-ils à l'expression "*si P alors Q*" où P et Q sont deux propositions. Intéressons-nous aux significations formulées à partir du langage naturel. Les réponses des élèves révèlent que chez 26% d'entre eux, une dépendance entre la prémisse P et la conclusion Q de cette expression, dont 13% qui caractérisent cette dépendance en affirmant que Q dépend de

P. Nous estimons ce 26% comme assez conséquent dans le mesure où nous avons du rejeter un pourcentage identique dans les significations données, faute de pertinence ou suite à une abstention.

Interprétons cette dépendance. En affirmant qu'il existe une dépendance entre P et Q et en particulier que Q dépend de P, nous avons l'impression que pour les élèves, les propositions P et Q doivent être liées, c'est-à-dire qu'il doit exister un lien explicatif entre les deux. Ceci renvoie selon nous à l'idée que pour parler d'implication entre deux propositions il est nécessaire qu'un lien explicatif soit présent et que sans celui-ci il serait probablement illogique voire absurde de parler d'implication. En particulier, l'expression "Q dépend de P" renvoie selon nous à la conception de causalité, à savoir ≪ *"A implique B" n'a de sens que si A et B ont un lien de cause à effet* ≫ ou plus précisément, ici ≪ *"A implique B" n'a de sens que s'il existe un cheminement explicatif pour passer de A à B* ≫. Nous avons aussi l'impression que cette expression sur l'existence d'une dépendance peut être rattachée aux valeurs de vérité de P et Q. En particulier, dans l'écriture de l'expression "*Q dépend de P*", nous pensons que la vérité de la proposition Q semble liée à celle de la proposition P dans la mesure où la vérité de Q "dépend" de la vérité de P. Cette expression laisse sous-entendre que P doit donc être vérifiée avant Q et que la vérité de Q sera établie en lien avec celle de P. Ceci peut conduire à la conception de temporalité de l'implication affirmant ≪ *Dans "A implique B", A doit être vérifié avant B et notamment A se situe dans le temps avant B* ≫. Notons aussi que l'expression d'une dépendance entre la prémisse P et la conclusion Q est contraire à la convention mathématique de vérifonctionnalité issue du calcul des propositions. Celle-ci atteste que la valeur de vérité d'une phrase ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu (ici P et Q) et de la définition des connecteurs (ici, l'implication matérielle) qui les relient. La signification que les élèves donnent à propos de l'existence d'une dépendance entre P et Q dans l'expression "*si P alors Q*" sous-entend que l'on doit prendre en compte les contenus sémantiques de ces deux propositions et voir s'il existe un lien entre ces contenus.

Nous retrouvons également la conception de causalité via la signification donnée ≪ *Q est la conséquence de P* ≫ par 9 élèves soit 8% du public interrogé, ainsi que celle de temporalité dans la réponse ≪ *P est une condition pour que Q existe* ≫ avancée par 4 élèves (moins de 4% du public total). Cette dernière réponse nous fait penser que la proposition P doit d'abord être vérifiée et qu'ensuite la proposition Q pourra elle-même exister ou encore être vérifiée.

Ainsi, les significations données par les élèves pour l'expression "*si P alors Q*" à partir du langage naturel font référence à des conceptions langagières comme celle de causalité ou celle de temporalité fortement rattachée à la précédente. Ces deux conceptions s'opposent à la convention de vérifonctionnalité adoptée en mathématiques dans le calcul des propositions.

7.2.2 Quelles expressions équivalentes les élèves associent-ils à "*si* P *alors* Q" à partir du langage naturel ?

Pour répondre à cette question, nous nous basons sur les expressions données par les élèves à la question 1(b) de notre premier questionnaire. Parmi les exemples que nous relevons et que nous jugeons intéressants, nous constatons une prédominance des expressions langagières (60%) sur celles symboliques. Nous relevons des exemples qui peuvent renforcer la conception de temporalité (≪ *Dans "$A \Rightarrow B$", A doit être vérifié avant B et A se situe dans le temps avant B* ≫) comme ≪ *P implique Q* ≫ (8%), ≪ *P entraîne Q* ≫ (8%), ≪ *à condition de P alors Q* ≫ (8%), ≪ *P donc Q* ≫ (1%), ≪ *P d'où Q* ≫ (1%), ≪ *dans le cas de P alors Q* ≫ (1%), ≪ *si on sait que P alors on peut dire que Q* ≫ (1%) ou ≪ *quand on a P, d'office on a Q* ≫ (1%). Elles sous-entendent également l'existence d'un lien de cause à effet entre prémisse et conclusion, ce qui renvoie à la conception de causalité (≪ *"A implique B" n'a de sens que si A et B ont un lien de cause à effet* ≫). Nous constatons également la présence d'expressions pour lesquelles l'écriture inverse l'ordre d'apparition entre la prémisse P et la conclusion Q par rapport à "*Si P alors Q*" : ≪ *Q est la conséquence de P* ≫ (8%) ou ≪ *Q se réalise si la condition P est remplie* ≫ (5%). Comme le souligne Deloustal-Jorrand[pp. 55-56][3] : ≪ *Leur utilisation nécessite donc une reconstruction de la phrase. [...] En effet, dans ces [...] expressions la "conclusion" se trouve après l'"hypothèse" [ou prémisse], ce qui est contraire à l'habitude et, en particulier, contraire à l'utilisation de "si... alors...". Cette nouvelle tournure peut être source de difficultés notamment dans la reconnaissance de l'"hypothèse" et de la conclusion* ≫ mais aussi dans la reconnaissance de condition suffisante et de condition nécessaire. Signalons que l'expression ≪ *Q est la conséquence de P* ≫ renvoie à la conception de causalité où P est la cause de Q et Q la conséquence de P. Nous notons également la présence de formulations renvoyant à une confusion entre une implication et une équivalence : ≪ *P si et seulement si Q* ≫ (10%) et l'écriture symbolique ≪ $P \Leftrightarrow Q$ ≫ (un peu plus d'1%). Cette confusion peut notamment être une conséquence de l'utilisation de l'expression "si... alors..." dans le langage courant. Nous verrons par la suite si les difficultés pressenties entre une implication et une équivalence sont confirmées ou non auprès des élèves.

Ici aussi, les conceptions langagières de causalité et de temporalité peuvent être reliées aux expressions équivalentes que les élèves associent à "*si P alors Q*".

7.2.3 Confusion entre implication et équivalence

Nous avons signalé dans notre chapitre 2 qu'une implication pouvait être confondue dans le langage avec une équivalence. Nous testons avec la question 2(a) de notre premier questionnaire si cette confusion est partagée par les élèves. Les difficultés pressenties à ce propos sont présentes chez 33% des étudiants, soit 38 personnes sur 115 interrogées. Ceux-ci mettent en avant dans leurs justifications une interprétation de l'implication "*s'il pleut alors je prends mon parapluie*" comme une équivalence. Il déduise alors de l'affirmation donnée "*je prends mon parapluie*" qu'il pleut. Ce pourcentage est pour nous assez significatif car seuls 17% des élèves cochent la case fausse attendue en justifiant correctement ce choix. Nous relevons que cette confusion est présente chez les deux publics d'élèves interrogés, à hauteur de respectivement 37% et 29% pour les élèves ayant 4 heures de mathématiques par semaine et ceux en ayant au moins 6 par semaine. Signalons que parmi les 15 étudiants du groupe 2 ayant suivi un cours de logique des propositions en renforcement mathématique, 8 élèves (soit 53%) interprètent eux aussi l'implication donnée comme une équivalence, contre 0 case "fausse" choisie. Notre chapitre 4 regroupant des témoignages d'enseignants du secondaire sur leur enseignement et utilisation en classe de l'implication nous a marqué dans le sens où les enseignants font plus de choses que nous ne l'aurions initialement cru à propos de l'implication. Ils insistent notamment sur la différence existant entre une implication et une équivalence. Il est toujours étonnant de constater ce que les élèves retiennent d'un tel enseignement. En effet, nous savons que les 15 élèves du groupe 2 ont vu en renforcement mathématique la différence entre une implication et une équivalence notamment en distinguant les tables de vérité associées mais aussi dans des parties du cours de mathématique plus contextualisées comme par exemple dans des propriétés sur des inégalités dans $\mathbb{R}$. Dans cette partie du cours, l'enseignant demande aux élèves de réfléchir si, dans les propriétés données, il faut utiliser le symbole d'implication ou celui d'équivalence et il nous donne l'exemple suivant :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a \leqslant b \wedge c \leqslant d) \Rightarrow (a + c \leqslant b + d)$$

Il est donc surprenant que 53% de ces élèves interprètent l'implication donnée "*s'il pleut alors je prends mon parapluie*" comme une équivalence. Selon nous cette confusion auprès de ces élèves montrent que malgré une étude explicite du connecteur "*si... alors...*", la logique naturelle reste très présente chez les élèves et cette confusion possible dans le langage est difficile à mettre en défaut malgré l'enseignement explicite reçu.

7.2.4 Utilisation de conceptions langagières sur l'expression "si... alors..." pour statuer sur la vérité d'énoncés conditionnels

Dans notre premier questionnaire, nous demandons aux élèves de statuer sur des implications matérielles telles que "*3 pair ⇒ 4 pair*" ou "*3 pair ⇒ 4 impair*".

Intéressons-nous d'abord à l'implication "*3 pair ⇒ 4 pair*". Aucun élève ayant choisi la case "vrai" ne justifie son choix correctement. La vérifonctionnalité n'est pas connue des élèves dans le sens où aucun ne prend en compte la vérité des propositions "*3 pair*" et "*4 pair*" en jeu et établit ensuite correctement la vérité de cet énoncé conditionnel en se basant sur la définition du connecteur qui les relient. Le bon raisonnement pour statuer sur la vérité de cet énoncé est donc de constater que la proposition "*3 pair*" est fausse, que celle "*4 pair*" est vraie pour ensuite utiliser la définition du connecteur propositionnel "⇒" et ainsi obtenir la valeur de vérité "vrai" de cet énoncé. L'absence de cette justification dans les réponses des élèves ne nous surprend pas dans le sens où ceux-ci n'ont pas reçu un enseignement explicite et décontextualisé sur l'expression "*si... alors...*". Elle l'est nettement moins auprès des 15 personnes qui ont suivi un cours de logique des propositions en renforcement mathématique. En effet, malgré cet enseignement, aucun d'eux n'identifie l'implication comme étant vraie en apportant l'explication susmentionnée. Signalons que dans les copies des 115 élèves interrogés, nous ne trouvons pas non plus de référence à la propriété-en-acte attestant que ≪ *si A est fausse alors "A implique B" est vraie* ≫.

Le fait que 81% des élèves interrogés cochent la case "faux" et que 89% de ces élèves justifient de manière exploitable leur raisonnement nous fait donc penser que ce choix n'est pas dû au hasard et qu'il est le fruit d'une certaine réflexion. Nous nous interrogeons donc sur la nature de ce raisonnement. En dépouillant les réponses à notre questionnaire, nous relevons principalement deux types de justifications erronées :

– 45% des élèves ayant choisi la case "faux" utilisent l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion : puisque le lien "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" n'est pas vérifié dans l'implication matérielle "*3 pair ⇒ 4 pair*", celle-ci est donc déclarée

fausse. Cette explication renvoie à la propriété-en-acte de causalité issue du langage et affirmant que ≪ *"A implique B" n'a de sens et a fortiori n'est vraie que si A et B ont un lien de cause à effet* ≫. Cette idée de "lien de cause à effet" n'est pas à prendre telle quelle, il faut plutôt la voir comme un chemin explicatif permettant de passer de la prémisse à la conclusion. Et c'est justement cet aspect qui est présent dans les justifications des élèves. Le lien "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" n'étant pas vérifié, les élèves déclarent cette implication fausse.
– 34% des justifications apportées à la case "faux" se basent sur la propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫. Il suffit donc selon ces élèves que la prémisse d'une implication matérielle soit fausse pour que l'implication en elle-même le soit aussi.

Ces deux justifications peuvent notamment cohabiter auprès des élèves ayant coché la case "faux" (8%). Ceux-ci estiment donc que la valeur de vérité de cet énoncé peut se justifier de deux manières distinctes.

Face à l'énoncé conditionnel "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*", les élèves ayant coché la case "faux" utilisent donc à hauteur de 53% la propriété-en-acte de causalité ou du moins la version suivante de celle-ci : ≪ *"A implique B" n'a de sens et a fortiori n'est vraie que s'il existe un cheminement explicatif pour passer de A à B* ≫. Ils ont donc recours à une conception langagière de l'expression "*si... alors...*" pour statuer sur la vérité de cette expression matérielle.

Concentrons-nous maintenant sur l'implication "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*". Nous recensons deux personnes, soit 2% du public interrogé, qui répondent correctement en cochant la case "vrai" et en fournissant l'explication ≪ 0 $\Rightarrow$ 0 *donne vrai* ≫. Celle-ci fait selon nous référence à la vérifonctionnalité dans la sens où les deux élèves identifient que les propositions "3 pair" et "4 impair" sont fausses (la valeur de vérité "faux" étant symbolisée par le booléen 0) et qu'ils utilisent apparemment ensuite la définition du connecteur propositionnel "... $\Rightarrow$ ..." pour donner la valeur de vérité "vrai" de "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*". Notons que ces deux élèves font partie du groupe ayant au moins 6 heures de mathématiques par semaine et ayant suivi un cours de logique des propositions en renforcement. Étrangement, ceux-ci n'ont pas répondu correctement pour l'implication "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*", puisque leur justification ≪ 0 $\Rightarrow$ 1 *donne faux* ≫ ne correspond pas à la valeur de vérité d'une implication matérielle lorsque la prémisse est fausse (symbolisé par 0) et la conclusion est vraie (symbolisé par 1).

Dans la mesure où 35% du public interrogé cochent la case "vrai" en lui apportant une explication exploitable et différente de celle susmentionnée, nous pouvons raisonnablement nous interroger sur la nature du raisonnement effectué par les élèves pour ce choix de case non lié au hasard. Notre dépouillement des réponses nous révèlent que ces 35% choisissent cette case en se basant sur l'existence d'un cheminement explicatif entre la prémisse et la conclusion de cette implication. Puisque le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" est vérifié lorsque l'on passe de la prémisse à la conclusion de cette implication, les élèves déclarent celle-ci vraie. Cette justification renvoie donc comme pour l'implication précédente à la conception de causalité. Cette conception est contraire à la convention de vérifonctionnalité établie dans la logique des propositions pour laquelle la valeur de vérité d'une phrase ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition du connecteur qui les relient. Or, ici, avec l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion, les élèves prennent en compte les contenus sémantiques de ces deux propositions et statuent sur le vérité de l'implication en fonction de ces contenus et d'un lien entre ceux-ci. Outre ce choix de case "vrai" à hauteur de 48%, 33% du public préfère plébisciter la case "faux". Ce pourcentage n'est pas négligeable dans la mesure où 87% de ces 33% nous livrent une explication que nous pouvons interpréter. Nous nous interrogeons dès lors sur le raisonnement qui a poussé des élèves à choisir "faux". Nous pouvons classer les justifications des élèves selon l'utilisation de différentes propriétés-en-acte :

- ≪ *Si A et B sont toutes les deux fausses alors "A implique B" est fausse* ≫ (40%) ;
- ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫ (31%) ;
- ≪ *Si B est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫ (16%).

Toutes ces propriétés-en-acte présentes chez les élèves sont erronées car elles ne reflètent pas la définition d'une implication matérielle. Dans chacun des cas, les élèves identifient correctement la valeur de vérité fausse de la proposition "*3 pair*" ou de celle "*4 impair*", voire des deux, mais faute de connaissances sur le connecteur propositionnel "$\ldots \Rightarrow \ldots$", ils concluent que l'implication est fausse.

En conclusion, les justifications apportées par les élèves pour statuer sur la vérité des implications matérielles "*3 pair ⇒ 4 pair*" et "*3 pair ⇒ 4 impair*" montrent que la conception langagière de causalité est utilisée pour établir la valeur de vérité de ces implications. En effet, 53% des 93 personnes ayant coché la case "faux" pour l'implication "*3 pair ⇒ 4 pair*" et 73% des 55 ayant choisi la case "vrai" pour "*3 pair ⇒ 4 impair*" ont recours à cette conception de causalité pour statuer sur la vérité de ces énoncés conditionnels. Ces pourcentages sont respectivement de 43% et 35% pour le total des 115 élèves interrogés.

Avec les implications matérielles "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*" et "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*" et les explications apportées par les élèves pour statuer sur la vérité de celles-ci, nous voulons étudier le comportement des élèves face à une implication dont la prémisse est fausse. Nous avons déjà souligné que la vérifonctionnalité n'est pas connue des élèves et que ceux-ci utilisent des conceptions langagières sur l'expression "*si... alors...*" pour statuer sur la vérité d'un énoncé conditionnel. Dans notre questionnement sur l'implication présenté au chapitre 3, nous avons émis une hypothèse face au comportement possible des élèves à propos d'une implication dont la prémisse est fausse. Celle-ci attestait que :

> Pour statuer sur la vérité d'une expression ≪ *si... alors...* ≫ dont la prémisse est fausse, on suppose que cette prémisse est vraie même si on sait qu'elle est pertinemment fausse. On s'interroge ensuite sur la vérité de la conclusion en utilisant la propriété-en-acte de causalité : l'implication est vraie s'il existe un lien explicatif entre prémisse et conclusion, elle est fausse ou n'a pas de sens sinon.

Suite au dépouillement des questionnaires, nous nous demandons si cette hypothèse est vérifiée. Pour l'énoncé conditionnel "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*", nous relevons que 15% des élèves mentionnent explicitement dans leur résolution "*supposons 3 pair*" et ils établissent ensuite que cette implication est fausse car le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" n'est pas respecté dans cet énoncé. Quant à l'énoncé "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*", nous recensons que 22% des élèves mentionnent explicitement "*supposons 3 pair*" et donnent la valeur de vérité "vrai" à cette implication puisque cette fois, en passant de sa prémisse à sa conclusion le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" est vérifié. Ces pourcentages grimpent respectivement à 20% et 31% si nous enlevons dans notre panel de réponses pour chaque énoncé conditionnel, les explications absentes ou ne justifiant pas le choix de case cochée. Signalons que nous n'avons pas trouvé dans les copies des élèves d'allusions au fait que la prémisse "*3 pair*" fausse serait dénuée de sens renvoyant donc à la conception langagière ≪ *"A implique B" n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque A est vraie* ≫ et à un choix de case "faux" ou "on ne peut pas savoir".

La prémisse fausse "*3 pair*" de ces deux implications peut provoquer chez les élèves une remise en cause de leurs connaissances sur la parité des nombres naturels et ici en particulier sur celle du nombre 3. Les pourcentages ci-dessus nous laissent penser que les élèves ne sont pas habitués à rencontrer des implications dont la prémisse est fausse. Nous pensons que le nombre d'élèves pouvant être déstabilisés par une prémisse fausse est bien plus élevé que

ne le laissent penser ces pourcentages. En effet, ceux-ci ne reflètent que des réponses d'étudiants mentionnant explicitement une supposition du chiffre 3 comme pair même si ces élèves précisent que ce n'est pas le cas. Nous ne pouvons donc baser nos constats face à cette remise en cause des connaissances que vis-à-vis des élèves ayant explicitement mentionné dans leurs copies celle-ci via la phrase "*supposons 3 pair*".
Nous nous interrogeons : pourquoi des élèves cherchent-ils donc à remettre en cause leurs connaissances ? Voyant que nos énoncés respectifs commencent avec la proposition "*3 pair*" fausse, certains élèves importunés par cette valeur de vérité fausse, éprouvent apparemment le besoin de revenir au cas d'une prémisse vraie en supposant donc explicitement que 3 est pair alors qu'il ne l'est pas. Ceci se traduit notamment dans les nombreuses questions que ces deux implications ont suscitées auprès des élèves : « *3 n'est pas pair, monsieur, il est impair. Je dois oublier qu'il est impair pour répondre ?* ». Les pourcentages susmentionnés nous renseignent donc qu'autant d'élèves ont estimé plus important de remettre en cause leurs connaissances sur la parité de 3 que de garder celles connues. Ce phénomène est partagé par les deux niveaux d'études que nous étudions en secondaire, à savoir les élèves ayant 4 heures de mathématiques par semaine et ceux en ayant au moins 6 à hauteur de respectivement 9% et 6% du public interrogé pour l'implication "*3 pair ⇒ 4 pair*" et 11% dans chaque groupe pour l'implication "*3 pair ⇒ 4 impair*".
Notre groupe de 15 élèves ayant suivi un cours de logique des propositions en renforcement mathématique partagent aussi cette remise en questions des connaissances : respectivement 5 et 4 personnes selon les implications mentionnent "*supposons 3 pair*" dans leurs justifications avant de vérifier l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion de chacun de ces énoncés. Bien qu'ayant donc reçu un cours sur la logique en y dressant la table de vérité d'une implication matérielle, le traitement d'une implication à prémisse fausse n'est pas très bien réussie. Outre cette remise en question chez ces 15 élèves, l'aspect frappant que nous relevons est que respectivement 9 élèves ont pour chaque implication recours à l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion (la mention "*supposons 3 pair*" pouvant être présente ou non dans les justifications des élèves). La conception causale est donc largement présente (60%) parmi ces 15 élèves pour statuer sur la vérité d'un énoncé conditionnel. Bien que l'échantillon d'élèves ayant suivi un cours de logique en renforcement soit mince, il nous apparaît que ce cours n'a pas mis en défaut cette conception de causalité et que pour répondre à la vérité de ces deux implications les élèves ont donc recours au langage et à cette conception plutôt qu'à la table de vérité de l'implication matérielle dressée en classe. Dés lors, nous pouvons nous demander

si cette tendance sera également présente auprès des étudiants universitaires ?

Afin que les élèves du secondaire puissent répondre à notre questionnaire durant la plage horaire d'un cours de 50 minutes, nous avons choisi de cibler les justifications apportées par les élèves à la question 4 de notre premier formulaire. Nous leur avons en particulier demandé de justifier leurs réponses face aux implications matérielles présentées ci-dessus et dont la prémisse est dans chacun des cas fausse. C'est donc par souci de temps que nous n'avons pas formulé une demande d'explications pour les implications suivantes : "*3 impair* $\Rightarrow$ *4 pair*" et "*3 impair* $\Rightarrow$ *4 impair*". Face à ces implications, nous pensons que les élèves peuvent :

- identifier la vérité de "*3 impair* $\Rightarrow$ *4 pair*" en faisant allusion à la réduction de la vérité de "*si P alors Q*" en "*si P est vrai alors Q est vrai*". Cette réduction est d'ailleurs plébiscitée par 19% du public dans la question 1 de notre premier questionnaire, bien qu'elle ne soit attachée qu'à l'expression "*si P alors Q*" sans mention de sa valeur de vérité "vrai".
- reconnaître que "*3 impair* $\Rightarrow$ *4 pair*" est faux dans la mesure où sa prémisse est vraie et que sa conclusion est fausse.
- utiliser la conception de causalité pour répondre de la vérité de chacune de ces implications : la première sera déclarée vraie car le lien explicatif "*un nombre impair est suivi d'un nombre pair*" y est vérifié, ce qui n'est pas le cas dans la seconde et conduit donc à cocher "faux" pour cette dernière.

Cet aspect n'est donc pas pris en compte dans notre travail dans la mesure où nous estimions plus intéressant d'observer le comportement des élèves face à une configuration probablement rare dans leur cours : des implications matérielles dont la prémisse est fausse. La réflexion et les justifications des élèves sur une implication à prémisse vraie n'est donc pas étudiée ici mais il serait peut-être bien surprenant de constater si oui ou non la conception causale est également présente pour statuer sur des implications à prémisse vraie.

7.3 Le phénomène de quantification universelle implicite

Dans notre questionnaire portant sur le sens langagier versus sens mathématique de l'implication, nous voulons étudier avec le premier tableau de notre question 4 le phénomène de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels. Nous désirons donc savoir si les élèves interprètent tout énoncé conditionnel non quantifié comme étant universellement quantifié et confondent alors une implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ où x est un élément générique avec l'implication universellement quantifiée correspondante $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Le fait que 104 élèves sur 115 interrogés aient coché respectivement les cases “faux”, “vrai”, “vrai” et “faux” pour les énoncés conditionnels (a), (b), (c) et (d) - ce qui laisse sous-entendre une quantification universelle implicite - et que 92 de ces personnes aient apporté une justification à ce choix, nous fait penser que ces choix de cases ne sont pas le simple fruit du hasard et qu'une réflexion se cache derrière ceux-ci. Afin de pouvoir diffuser notre questionnaire durant une heure habituelle de cours, nous demandons aux élèves de n'apporter qu'une justification pour la réponse de l'énoncé conditionnel (a). Ce choix n'est pas anodin car selon l'interprétation faite de l'énoncé, nous pensons que les élèves peuvent être amenés à répondre “faux” ou “on ne peut pas savoir”. Le choix “faux” renvoie alors à une interprétation implicitement universellement quantifiée de l'énoncé tandis que l'autre réponse repose sur des implications entre énoncés contingents où la variable k utilisée dans l'énoncé est vue comme un élément générique non connu a priori. Ces deux réponses sont correctes suivant l'interprétation qui est faite de l'énoncé. Concentrons-nous sur les explications apportées par les élèves au choix de case “faux”. Celles-ci nous renseigneront sur l'interprétation faites par les élèves de l'énoncé (a). Parmi ces 92 étudiants, 61 (soit 53% du public total interrogé ou encore 66% de ces 92) ont donné un contre-exemple pour justifier ce “faux”. Le fait de donner un contre-exemple renvoie à une interprétation universellement quantifiée de l'énoncé (a). En effet, donner un contre-exemple, c'est rendre vrai l'énoncé $\exists k, k \textit{ pair} \wedge k+1 \textit{ impair}$. Celui-ci est la négation de l'implication formelle $\forall k, k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ pair}$, soit l'interprétation universellement quantifiée de (a).
Les autres explications apportées à la case “faux” (31 élèves, soit 27% du public total ou encore 34% du groupe de 92 personnes) sont basées sur la conception de causalité mettant en avant le lien “*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*”. Ce lien s'avère être ici non respecté lorsque l'on passe de la prémisse “k *pair*” à la conclusion “$k+1$ *pair*”. Cette non-vérification du lien conduit alors à cocher faux. Avec ce “faux” nous ne pouvons pas affirmer que les élèves interprètent l'énoncé (a) comme universellement quantifié implicitement mais nous ne pouvons pas non plus ne pas l'affirmer. Face aux réponses de ces 31 élèves nous sommes un peu dans la position d'un énoncé contingent, c'est-à-dire que faute d'informations supplémentaires données par les élèves dans leurs explications, nous ne pouvons nous prononcer sur l'in-

terprétation implicitement universellement quantifiée ou non de l'énoncé (a). En effet, les réponses des élèves ne font aucune mention explicite à une quelconque interprétation universellement quantifiée de (a). Nous aurions tendance à dire que le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" s'écrit mathématiquement $\forall k, k$ *pair* $\Rightarrow k+1$ *impair*, mais est-ce l'interprétation mathématique que ces élèves peuvent faire du lien explicatif donné ? Rien n'est certain.
Enfin, nous avons relevé 4 étudiants qui donnent à la fois un contre-exemple pour invalider (a) et une justification basée sur l'existence d'un lien non vérifié lors du passage de la prémisse vers la conclusion. Suite au contre-exemple donné et à l'interprétation implicitement quantifiée universellement de (a) qui en découle, nous avons déjà classé ces 4 personnes dans le groupe de 61 individus donnant un contre-exemple mentionné ci-dessus.

En conclusion, parmi les 115 élèves interrogés, 104 semblent interpréter les différents énoncés conditionnels donnés comme implicitement quantifiés universellement. Nous demandons aux élèves de justifier leur choix sur un énoncé conditionnel bien précis. Face à celui-ci, les élèves ne nous donnent pas toujours des explications que nous pouvons commenter. En effet, nous ne pouvons en exploiter que 88% et donc examiner à partir de celles-ci si cette interprétation est présente ou non. Notre analyse révèlent que 53% du public total interrogé interprètent bien l'énoncé (a) comme implicitement quantifié universellement en donnant un contre-exemple qui invalide cet énoncé. Les autres explications exploitables apportées en déclarant (a) faux sont basées sur la conception langagière de causalité et ne nous permettent pas d'identifier si oui ou non les élèves interprètent l'énoncé conditionnel (a) comme implicitement universellement quantifié. Les élèves cochent cette case "faux" car le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" n'est pas vérifié dans cet énoncé. Ce raisonnement est erroné car il est contraire à la convention de vérifonctionnalité établie en logique des propositions.

7.4 Enjeu de vérité : les différents cas qui rendent vraie une implication

Dans la question 3 de notre premier questionnaire dont le but consiste à donner les nombres naturels entre 0 et 20 qui rendent vraie la propriété "*si n est un nombre pair, alors $n+1$ est un nombre premier*", nous remarquons que toutes les personnes ayant fourni une réponse exploitable (soit 78%) travaillent uniquement avec les nombres pairs, c'est-à-dire uniquement avec les nombres qui rendent vraie la prémisse des instances associées. 73%

des réponses sur les 78% exploitables rejettent les nombres 0, 8, 14 et 20 dont les successeurs respectifs ne sont pas premiers. Notons que quelques élèves peuvent parfois omettre d'exclure l'un ou l'autre candidat ou que les justifications de ces exclusions ne sont pas toujours toutes présentes. Ces élèves identifient donc deux cas :

– une instance de la propriété ci-dessus est vraie lorsque sa prémisse et sa conclusion sont vraies ;
– une instance de cette propriété est fausse lorsque sa prémisse est vraie et que sa conclusion est fausse.

Un seul élève (soit moins de 1%) mentionne quant à lui les nombres impairs dans son explication. Il précise à leur sujet qu'ils sont exclus de la prémisse "*n est un nombre pair*" de cette propriété. Cette précision renvoie à la conception issue du langage et de la logique naturelle ≪ *"A ⇒ B" n'a d'utilité et/ou de sens que si A est vrai* ≫. Aucun autre élève ne mentionne les nombres impairs dans sa résolution. Il est fort possible que ces élèves ne voient pas l'intérêt de considérer ces nombres ou qu'ils n'envisagent même pas du tout ces nombres impairs et restent fixés sur le cas d'une prémisse vraie pour les instances associées.

Dans notre second questionnaire, lorsque nous demandons aux élèves d'hachurer les différentes zones pour un diagramme de Venn donné qui rendent vrais les énoncés conditionnels associés, 83% noircissent l'intersection des deux ensembles pour la figure 7.3 et 57% l'ensemble C dans le cas de l'inclusion de C dans B illustrée à la figure 7.4.

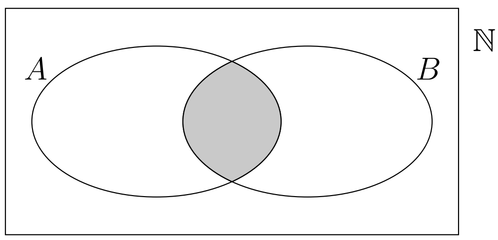


FIGURE 7.3 – Cas où l'implication $\mathrm{B}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x)$ est vraie selon les élèves dans le seul cas où la variable x appartient à $A \cap B$.

Ces zones hachurées représentent les éléments de l'ensemble de référence, c'est-à-dire ici celui des naturels, vérifiant à la fois la prémisse et la conclusion des instances associées à l'implication $\mathrm{B}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x)$ pour la figure 7.3 et à l'implication $\mathrm{C}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ pour le figure 7.4.

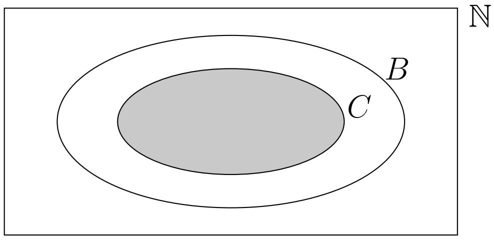


FIGURE 7.4 – Cas où l'implication C(x) $\Rightarrow$ B(x) est vraie selon les élèves dans le seul cas où la variable x appartient à $B \cap C$ ou encore à C puisque $C \subset B$.

Nos questions où les élèves doivent hachurer une ou plusieurs zones ensemblistes rendant selon eux vrai l'énoncé conditionnel correspondant sont pertinentes avec notre questionnement sur l'implication mais nous devons admettre que traiter ces réponses manquent un peu de rigueur dans le sens où nous ne leur avons pas demandé d'apporter une justification à ce choix. Nous ne pouvons donc qu'interpréter partiellement ces résultats.

Intéressons-nous à la figure 7.3. Les élèves hachurant $A \cap B$ semblent estimer que cette intersection est le seul ensemble dont les éléments rendent vrai l'énoncé B(x) $\Rightarrow$ A(x) proposé dans lequel A(x) représente la propriété "*x est un nombre pair*" et B(x) la propriété "*x est un nombre multiple de 3*". Ils se limitent donc à donner des valeurs naturelles à x qui vérifient à la fois la prémisse et la conclusion des instances associées. N'ayant hachuré que cette zone, nous supposons que pour les élèves les éléments de l'ensemble $\mathbb{N} \backslash (A \cap B)$ ne vérifient pas l'énoncé donné. Faute d'explications demandées, nous ne pouvons pas savoir pourquoi les élèves estiment que les éléments de cet ensemble ne vérifient pas l'énoncé. Nous ne pouvons émettre que des hypothèses :

– Les éléments de l'ensemble $B \backslash A$ sont rejetés car ils vérifient la prémisse "*x est un naturel multiple de 3*" mais pas la conclusion "*x est un nombre pair*". Notons que parmi les 22 personnes sur 66 interrogées qui nous donnent un contre-exemple pour invalider la clôture universelle de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*", 21 élèves n'ont hachuré que l'ensemble $A \cap B$ dans notre diagramme de Venn et l'élément à la base de leur contre-exemple appartient à l'ensemble $B \backslash A$. Avec ce contre-exemple, 21 personnes sur 55 (soit 38%) ayant hachuré l'intersection $A \cap B$ comme rendant vrai l'énoncé "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*", identifient apparemment que les éléments de l'ensemble $B \backslash A$ ne vérifient pas cet énoncé conditionnel.

– Les éléments de l'ensemble $\mathbb{N} \backslash B$ sont rejetés :
  - et l'explication renvoie à la conception langagière suivante à propos des instances associées : ≪ *"P implique Q" n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque P est vraie* ≫. En effet, les élèves peuvent penser qu'un nombre rendant la prémisse "*x est un naturel multiple de 3*" fausse serait absurde à considérer et que ce raisonnement n'aurait aucun sens.
  - car les élèves peuvent par exemple avoir la propriété-en-acte suivante pour les instances associées : ≪ *si P est fausse alors "P ⇒ Q" est fausse* ≫.
  - aucune mention n'est faite à ces éléments. Les élèves restent fixés sur des instances de cet énoncé dont la prémisse est vraie.

Nous avons pu interroger au total 8 élèves inscrits dans l'option 6 heures de mathématiques par semaine et ayant suivi un cours sur la logique des propositions. Nous pouvons remarquer que ces 8 élèves ont tous hachuré également l'intersection des ensembles A et B. Donc, malgré avoir étudié spécifiquement le connecteur propositionnel "*si... alors...*" en dressant notamment sa table de vérité, ces élèves n'ont visiblement identifié que la zone ensembliste rendant vraies la prémisse et la conclusion des instances associées de l'énoncé donné. La réponse de ces élèves n'est donc pas différente de celle majoritairement apportée par les autres élèves malgré l'étude explicite du connecteur "*si... alors...*".
Nous n'avons en réalité trouvé qu'une seule réponse correcte pour cette figure 7.3 dans laquelle l'élève hachure tout l'ensemble $\mathbb{N}$ excepté les éléments appartenant à B sans être dans A. Par rapport à la réponse précédente, celle-ci semble prendre en compte le cas d'une prémisse fausse pour les instances associées. Ce cas rend toutes les instances associées vraies par définition d'une implication matérielle, et ce, peu importe la vérité de la conclusion. Malheureusement, faute d'explications demandées, nous ne pouvons pas affirmer que cet élève prend bien en compte ce cas.

Concentrons-nous maintenant sur la figure 7.4. La majorité des élèves n'hachure que l'ensemble C et estime donc que seul celui-ci rend vrai l'énoncé conditionnel $\mathrm{C}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ donné pour lequel $\mathrm{C}(x)$ représente la propriété "*x est un nombre multiple de 9*" et $\mathrm{B}(x)$ la propriété "*x est un nombre multiple de 3*". En hachurant cette zone, les élèves se limitent ainsi à ne donner que des valeurs naturelles à x vérifiant à la fois la prémisse et la conclusion des instances associées. Ici aussi, nous ne pouvons faire que des suppositions face au comportement des élèves à propos des ensembles non-hachurés pour lesquels ils estiment apparemment que les éléments ne vérifient pas l'énoncé donné.

- Les élèves peuvent utiliser la conception langagière suivante à propos des instances associées : « *"P implique Q" n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque P est vraie* ». Ils peuvent alors penser qu'un nombre rendant la prémisse "*x est un naturel multiple de 9*" fausse ne peut être considéré et qu'un tel raisonnement est dépourvu de sens.
- Ils peuvent également avoir une propriété-en-acte pour les instances associées comme : « *si P est fausse alors "$P \Rightarrow Q$" est fausse* ».
- il est possible aussi qu'ils ne songent pas même un seul instant à travailler avec des nombres naturels non multiples de 9 et ce, sans pour autant avoir recours à une des deux hypothèses susmentionnées. Les élèves ne se concentrent alors que sur des instances de cet énoncé dont la prémisse est vraie et donc que sur des nombres multiples de 9.

Ici aussi, face à ce diagramme de Venn, les 8 élèves ayant suivi un cours sur la logique des propositions ne nous donnent pas la bonne réponse qui est d'hachurer tout l'ensemble $\mathbb{N}$. La moitié d'entre eux ne noircit que l'ensemble C et ne prend ainsi en compte que le cas d'une prémisse vraie pour les instances associées, deux autres choisissent tout l'ensemble B et les deux derniers s'abstiennent. Bien qu'ayant étudié explicitement l'expression "*si... alors...*", la réponse majoritaire de ces élèves n'est guère différente de celle de ceux n'ayant pas suivi une telle étude.

Nous relevons trois bonnes réponses pour cette figure dans lesquelles l'ensemble $\mathbb{N}$ est entièrement hachuré. Faute d'explications demandées, nous ne pouvons pas non plus ici savoir avec certitude si ces réponses prennent bien en compte correctement et avec les bonnes justifications le cas d'une prémisse vraie et celui d'une prémisse fausse pour les instances associées.

Pour conclure, en ne tenant pas compte des abstentions, nous constatons que les élèves connaissent tous le cas de figure suivant rendant vraie une implication matérielle ou une instance : la prémisse et la conclusion de celle-ci doivent être vérifiées. La vérité de "*si P alors Q*" est donc restreinte au seul cas où P et Q sont vrais. Les élèves reconnaissent aussi quand une implication matérielle ou une instance est fausse : sa prémisse est vraie et sa conclusion est fausse. En effet, dans la question 3 de notre premier questionnaire basée sur la propriété "*si n est un nombre pair, alors $n+1$ est un nombre premier*", nous relevons que 73% des réponses sur les 78% exploitables rejettent les nombres pairs 0, 8, 14 et 20 dont les successeurs respectifs ne sont pas premiers. Quant à la figure 7.3, la réponse majoritaire des élèves dans laquelle l'ensemble $A \cap B$ est hachuré, exclut apparement l'ensemble $B \backslash A$ pour lequel les éléments vérifient la prémisse des instances associées

mais pas la conclusion.
Le cas d'une instance dont la prémisse est fausse n'est considéré qu'une seule fois parmi les 115 élèves interrogés à notre question 3 basée sur la propriété "*si n est un nombre pair, alors $n+1$ est un nombre premier*". La justification de cet élève peut être interprétée comme mettant en avant la conception langagière ≪ *"$A \Rightarrow B$" n'a d'utilité et/ou de sens que si A est vrai* ≫. Faute de justifications pour les parties non-hachurées de nos deux figures, nous ne pouvons pas connaître le raisonnement des élèves face à ce choix. Cependant, les ensembles majoritairement hachurés par les élèves (respectivement $A \cap B$ et C pour les figures 7.3 et 7.4) nous font penser que les élèves ne prennent pas en compte le cas d'une prémisse fausse pour les instances associées aux énoncés conditionnels de chaque figure. Dans une instance d'un énoncé conditionnel, les cas où :

- la prémisse et la conclusion sont fausses ;
- la prémisse est fausse et la conclusion est vraie ;

ne sont pas connus des élèves comme donnant la valeur de vérité vraie à cette instance par définition d'une implication matérielle.

7.5 La double dimension outil/objet de l'implication dans l'enseignement secondaire

7.5.1 L'implication est-elle travaillée dans l'institution secondaire à la fois dans sa dimension outil et dans sa dimension objet ?

Comme nous l'avons signalé au chapitre 4, l'implication apparaît le plus souvent en classe sous sa dimension outil. Cette dimension est notamment mise en évidence dans les réponses des enseignants sur la façon dont ils abordent l'objectif des programmes mentionnant l'expression "*si... alors...*". L'implication y apparaît comme un outil du langage pour s'exprimer dans des exercices, des résultats théoriques ou des démonstrations. Néanmoins, certains enseignants (4 sur 9 ayant répondu à notre questionnaire) font notamment vivre la dimension objet de cette notion via un chapitre portant sur la logique des propositions. Ce chapitre n'est donné apparemment que dans un cours de renforcement mathématique suivi par les élèves de 5$^{\text{ième}}$ et 6$^{\text{ième}}$ année. Dans celui-ci, tous établissent notamment la table de vérité du connecteur propositionnel "*si... alors...*". Certains élèves reçoivent donc via ce cours un enseignement explicite et décontextualisé de cette expression. Cette étude contribue ainsi à faire vivre l'implication en tant qu'objet dans l'enseignement secondaire. Ces quatre enseignants ne se limitent pas à la dimension objet de l'implication, ils réintroduisent ensuite cette notion via un contexte précis dans certaines parties ou chapitres du cours et ré-insistent notamment sur la différence entre une implication et une équivalence. De cette manière, les enseignants contribuent ainsi à faire vivre l'implication sous sa double dimension outil/objet.

Lors de la diffusion de nos questionnaires, nous avons eu la chance, comme nous l'avons déjà signalé, de pouvoir faire passer ceux-ci auprès d'un groupe d'élèves ayant suivi un cours sur la logique des propositions. Respectivement, 15 et 8 personnes de ce groupe ont ainsi pu répondre à nos questionnaires. Ceux-ci ont reçu d'après leur enseignant un enseignement sur l'implication que nous pouvons qualifier comme apparaissant sous la double dimension outil/objet. Le professeur utilise l'implication comme outil pour s'exprimer dans des résultats théoriques ou exercices en analyse, algèbre ou géométrie et fait vivre cette notion comme un objet en dressant notamment la table de vérité de "*si P alors Q*" où P et Q sont deux propositions. L'enseignant montrent l'équivalence entre "*si P alors Q*" et la disjonction $\neg P \vee Q$, ce qui contribue à faire vivre l'implication comme un objet, parle de la contraposée d'une implication et la formule notamment explicitement. Face à cet enseignement reçu, nous nous demandons donc si l'implication apparaît sous sa double dimension outil/objet dans les réponses que ces élèves apportent à nos questionnaires.

7.5.2 L'implication apparaît-elle sous sa double dimension outil/objet dans les connaissances qu'en ont les élèves ?

Notre expérimentation révèle que l'implication ne semble pas apparaître sous sa double dimension outil/objet dans les connaissances et conception qu'en ont les élèves et ce même parmi le groupe d'étudiants qui a suivi un cours sur la logique des propositions. Le cadre logique est absent à la fois dans les connaissances du public n'ayant pas étudié explicitement l'expression "*si... alors...*" et dans celles du groupe ayant suivi une telle étude. Pour ce dernier groupe d'élèves, bien que l'enseignant fasse vivre l'implication comme un objet, nous ne trouvons pas de traces de cet enseignement objet dans les conceptions des élèves sur une implication. Les élèves ne dressent notamment pas de table de vérité pour donner la signification de "*si P alors Q*" ou à tout autre endroit de nos questionnaires. Nous devons tout de même reconnaître la présence chez deux élèves de l'explication « $0 \Rightarrow 0$ *donne vrai* » qui renvoie partiellement à la table de vérité de l'implication matérielle. Les élèves

ne mentionnent pas non plus l'expression logique $\neg P \vee Q$ équivalente à "*si P alors Q*" et qui contribue elle aussi à faire vivre la dimension objet de l'implication.
En ce qui concerne le cadre ensembliste, il semblerait que celui-ci soit relativement absent des connaissances des élèves. En effet, seuls 12% des élèves établissent que la vérité de l'implication formelle $\forall x, \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ est établie suite à l'inclusion de l'ensemble P dans l'ensemble Q. Suite à cette absence, l'implication ne peut donc apparaître comme un objet suite à sa définition dans le cadre ensembliste, à partir d'une inclusion d'ensembles.

L'implication semble plus apparaître comme un outil du langage pour s'exprimer dans les connaissances des élèves. En effet, de notre question visant à obtenir quelques propriétés que les élèves ont croisées dans leur cours de mathématique et qui s'énoncent sous la forme « *si... alors...* », nous distinguons deux catégories d'exemples dans lesquelles l'implication apparaît comme un outil du langage pour s'exprimer : une première relative à une utilisation de l'implication dans des résultats théoriques (73% des expressions données) et une seconde plus axée sur une utilisation de l'implication dans des exercices (27% des exemples fournis). Remarquons que les élèves du secondaire privilégient l'emploi de l'expression langagière "*si... alors...*" pour exprimer leurs exemples plutôt que d'avoir recours au symbole "$\Rightarrow$" et formaliser ainsi ceux-ci entièrement au moyen de symboles mathématiques.

7.6 Absence de différences dans les connaissances des deux public "*élèves*" interrogés dans l'enseignement secondaire

Nous avons diffusé nos deux questionnaires auprès d'élèves ayant respectivement 4 et au moins 6 heures de mathématiques par semaine. L'option à 6 heures peut notamment être accompagnée d'un cours de renforcement mathématique.

Notre constat suite au dépouillement des questionnaires, est qu'il n'y a pas de différences majeures entre les élèves de ces deux niveaux. Nous pensons que les enseignants de ces deux publics insistent probablement plus sur quelques aspects de l'implication comme par exemple en distinguant une implication d'une équivalence dans le cours de mathématiques 6 périodes que dans celui à 4 périodes, mais les réponses des élèves à nos deux questionnaires ne semblent pas refléter de différences quant à l'enseignement reçu.

Nous relevons un constat encore plus frappant : bien que l'échantillon d'élèves ayant suivi un cours sur la logique des propositions en renforcement mathématique soit bien mince, respectivement 15 et 8 personnes selon nos questionnaires, nous ne remarquons pas d'influence majeure de ce cours dans les réponses apportées par ces élèves. Malgré l'étude explicite du connecteur propositionnel "*si... alors...*" réalisée et la table de vérité de celui-ci dressée, les raisonnements de ces élèves ne sont guère différents de ceux n'ayant pas a priori reçu une telle étude. Nous avons déjà signalé localement dans ce chapitre quelques aspects de cette absence de différences. Résumons les brièvement :

- Les élèves ne font par exemple pas vivre l'implication comme un objet dans la signification qu'ils donnent de l'expression "*si P alors Q*". Ils ne dressent notamment pas la table de vérité de celle-ci.
- Les propositions $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ou $\neg P \vee Q$ ne sont pas présentes dans les expressions signifiant la même chose selon les élèves que "*si P alors Q*".
- 8 élèves sur 15 confondent visiblement une implication avec une équivalence dans notre question consacrée à cette possible confusion.
- 5 élèves sur 15 interrogés ne mentionnent pas s'il existe une équivalence entre une implication et sa contraposée dans le raisonnement par contraposition qu'ils identifient comme correct. Les autres élèves quant à eux ne reconnaissent visiblement pas ce raisonnement, ni même la contraposée d'une implication. En effet, 6 élèves sur 15 estiment que le contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\neg A \Rightarrow \neg B$.
- Tous semblent réduire la vérité d'une implication matérielle ou d'une instance d'un énoncé conditionnel $\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ au seul cas où sa prémisse et sa conclusion sont vraies. En particulier, les cas d'une prémisse fausse et d'une conclusion vraie et celui d'une prémisse et d'une conclusion toutes les deux fausses ne sont pas reconnus comme rendant vraie une implication matérielle ou une instance d'un énoncé conditionnel. Ce constat est établi des réponses fournies pour l'énoncé conditionnel "*si n est un nombre pair alors $n+1$ est un nombre premier*" et par les ensembles hachurés dans notre questionnaire ensembliste.
- 9 élèves sur 15 utilisent la conception de causalité pour statuer sur la vérité des implications conditionnelles "*3 pair $\Rightarrow$ 4 pair*" et "*3 pair $\Rightarrow$ 4 impair*". La vérifonctionnalité n'est donc pas connue de ces élèves.

Cependant, signalons que deux élèves dérogent une rare fois à ce constat puisqu'ils justifient correctement la vérité de l'implication matérielle "*3 pair $\Rightarrow$ 4 impair*" en faisant implicitement référence à la table de vérité de ce connecteur via l'explication « 0 ⇒ 0 *donne vrai* ».

L'étude explicite et décontextualisée qui est faite de l'expression "*si... alors...*" à l'université va-t-elle nous conduire à un constat différent que celui établi pour les élèves ayant suivi un cours sur la logique des propositions en renforcement mathématique ou au contraire à un constat semblable ? Nous analysons les réponses des étudiants à nos deux questionnaires au prochain chapitre. En suivant le découpage de notre travail à propos des connaissances et des conceptions des élèves du secondaire sur la notion d'implication, nous poursuivons ensuite cette analyse avec un chapitre dédié à un bilan de cette expérimentation auprès des étudiants.

Chapitre 8

Un état des lieux des connaissances des étudiants sur la notion d'implication

Dans ce chapitre, nous faisons le point sur les connaissances et conceptions que des étudiants universitaires peuvent posséder sur une implication. Nous mettons en évidence ces connaissances au moyen des deux questionnaires que nous avons diffusés auprès de ce public. Pour chaque formulaire, nous présentons notre analyse des productions des étudiants en suivant le même schéma qu'au chapitre 6 pour les élèves du secondaire. Un bilan de cette expérimentation auprès des étudiants est réalisé au chapitre suivant.

Nous avons diffusé deux questionnaires auprès d'étudiants à l'université : un premier construit notamment à partir du sens langagier et du sens mathématique de l'implication et un second consacré au cadre de travail ensembliste de cette notion. Nous commençons notre analyse des réponses des étudiants par ce premier formulaire. Nous exposons ensuite celles associées à notre second formulaire.

8.1 Diffusion du premier questionnaire

Nous avons soumis notre questionnaire auprès de 39 étudiants inscrits en première année de bachelier en sciences mathématiques, physiques et informatiques à l'Université de Mons. Nous avons interrogé respectivement 16, 7 et 16 étudiants inscrits dans ces sections. Ceux-ci ont tous suivi le cours de Mathématiques élémentaires dans lequel ils ont reçu un enseignement explicite et décontextualisé de l'expression "si… alors…". Nous avons présenté l'étude qui est faite de cette notion au chapitre 1. Nous dépouillons notre questionnaire en dressant pour chaque question, un tableau des réponses majoritairement obtenues. Puisque tous les étudiants intérrogés ont reçu le même enseignement sur l'implication, nous choisissons de présenter ces réponses sans distinguer les différentes sections.

8.2 Réponses apportées par les étudiants au premier questionnaire

Nous analysons dans un premier temps les réponses des étudiants à notre formulaire construit notamment à partir du sens langagier et du sens mathématique de l'implication. Nous avons présenté nos questions et quelques productions possibles des étudiants face à celles-ci à la section 5.1, page 94.

Question 1

Débutons par la première partie de cette question dont l'énoncé est le suivant :

> En mathématiques, vous avez déjà rencontré une expression de la forme « *si P alors Q* ».
> (a) Que signifie, selon vous, ce type d'expression ?

Dans le tableau suivant, nous dressons les diverses significations que les étudiants associent à l'expression « *si P alors Q* ».

Réponses des étudiants	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 39 interrogés)**
« *Si P est vrai alors Q est vrai* »	21
« *Si P alors Q* » est une implication	8
L'expression « *si P alors Q* » est toujours vraie	7
Mention à la table de vérité de "*si P alors Q*" (dont trois tables de vérité dressées)	4
P implique Q	2
$P \Rightarrow Q$	2
Q dépend de P	1
Q est la conséquence de P	1
« *C'est une proposition* »	1
Abstention	0

Nous avons relevé un total de 47 significations selon les étudiants de l'expression "*si P alors Q*". Signalons que 7 personnes mentionnent deux éléments de significations face à cette expression alors que toutes les autres n'en donnent qu'une.

À la vue du tableau, l'aspect frappant est que pour 54% des étudiants "*si P alors Q*" signifie "*si P est vrai alors Q est vrai*". Nous estimons saisissant que la signification majoritairement donnée par les étudiants soit celle-là. En effet, suite à l'enseignement explicite et décontextualisé que les étudiants ont reçu sur l'implication via le cours de Mathématiques élémentaires, nous pensions trouver par exemple plus de tables de vérité de "*si P alors Q*" dressée. Or, seuls 4 étudiants (soit 10% des significations données) mentionnent celle-ci. Nous estimons que ce faible taux de présence est aussi fortement marquant suite à l'enseignement reçu. Le troisième réponse frappante que nous relevons est que pour 18% des étudiants, une implication est toujours vraie. Nous sommes pourtant persuadé que les étudiants ont déjà rencontré des implications en mathématiques dont la réciproque est fausse. Cependant, quand on leur dit "*si P alors Q*", c'est la vérité de celle-ci qui est un facteur dominant pour ces 18%.

Parmi les 47 réponses relevées, nous estimons que 19% d'entre-elles sont fausses. Il s'agit selon nous :

- des 7 mentions au fait qu'une implication soit toujours vraie. Nous aurons l'occasion dans ce questionnaire de mettre les étudiants face à des implications qui ne sont pas toujours vraies comme "*3 impair* $\Rightarrow$ *4 impair*" déclarée fausse ou comme "*si n est un nombre pair alors $n+1$ est un nombre premier*" et "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" (dans notre questionnaire sur le cadre ensembliste) qui admettent chacune à la fois des instances vraies et d'autres fausses.
- deux mentions qui laissent sous-entendre l'existence d'un lien (éventuellement de cause-conséquence) entre la prémisse et la conclusion d'une implication : "*Q dépend de P*" et "*Q est la conséquence de P*". Cet aspect "lien" est attaché à l'implication dans la logique naturelle et va à l'encontre de la vérifonctionnalité, une convention issue de la logique des propositions.

Détaillons maintenant un peu plus ces réponses des étudiants :

- L'expression "*si P alors Q*" signifie pour plus de la moitié des étudiants que "*si P est vrai alors Q est vrai*". Elle peut apparaître telle quelle (relevé 8 fois) ou dans des réponses comme ≪ *si la proposition P est vérifiée, alors la proposition Q est vérifiée également* ≫ (cité 8 fois), ≪ *si la proposition P est vérifiée, cela implique que la proposition Q est également vérifiée* ≫ (vu 4 fois) ou enfin ≪ *si la proposition P est correcte alors Q l'est aussi* ≫ (lu une fois).

- Sept étudiants identifient que l'expression "*si P alors Q*" est toujours vraie, l'un d'eux précise notamment que « *c'est une affirmation qu'on ne peut contester* ». Cinq étudiants accompagnent cette signification d'une explication détaillant les trois cas où les valeurs de vérité de P et Q rendent vraie cette expression. Nous relevons : « *Si P est vrai alors Q est vrai aussi. Si P est faux, alors Q peut être soit vrai soit faux* » (3 fois), « *"si P alors Q" signifie que si P est vrai alors Q l'est aussi. Si P est faux, on considère que l'expression n'est pas mise en défaut et donc quelque soit la valeur de vérité de Q, elle est vraie* » (une fois) et « *Si P vrai alors Q est vrai. Si P est faux, on ne sait pas si Q est vrai ou faux* » (une fois). Ces 5 étudiants, via les différents cas qui rendent "*si P alors Q*" vrai, font donc aussi référence à l'expression "*si P est vrai alors Q est vrai*". Nous trouvons donc au total, sur 26 productions parmi 39 étudiants interrogés, soit dans 66% des réponses, une mention à l'expression "*si P est vrai alors Q est vrai*" (dont 5 issues de la réponse « *"si P alors Q" est toujours vrai* »).
- Peu de références au cadre de travail *logique formelle* de l'implication apparaissent. En effet, seul quatre étudiants mentionnent la table de vérité de "*si P alors Q*". Trois d'entre eux la dressent sans erreur et contribuent ainsi à faire vivre à la fois les valeurs de vérité "vrai" et "faux" qu'une implication matérielle peut prendre. Le quatrième étudiant nous signale juste qu'« *on peut dresser sa table de vérité* [sous-entendu de "*si P alors Q*"] » mais il ne la donne pas pour autant.

Huit étudiants reconnaissent "*si P alors Q*" comme une implication. Ils ne nous donnent pas là une définition de l'expression "*si P alors Q*" mais plutôt un mot pour décrire celle-ci. Quatre étudiants nous donnent d'ailleurs ce que nous appelons du vocabulaire (langagier ou basé sur l'utilisation de symboles) pour exprimer "*si P alors Q*" : l'expression langagière "*P implique Q*" (citée deux fois) et l'énoncé "$P \Rightarrow Q$" (recensé deux fois) employant le symbole "$\Rightarrow$".

La dépendance entre la prémisse et la conclusion de "*si P alors Q*" est très peu présente : un seul cas relevé affirme que Q dépend de P. Il en va de même pour l'idée de "*cause-conséquence*" qui peut être liée à l'expression "*si P alors Q*" : un étudiant considère que Q est la conséquence de P.

En résumé, ce constat est pour nous très frappant car suite à l'enseignement décontextualisé que les étudiants ont reçu sur l'expression "*si... alors...*" (dont notamment la définition de la table de vérité de l'implication matérielle "*si P alors Q*"), la première chose qu'ils retiennent est la réduction de "*si P alors Q*" à "*si P est vrai alors Q est vrai*" ou encore pour sept étudiants, le caractère vrai de "*si P alors Q*".

Intéressons-nous maintenant à le seconde partie de notre question dont l'énoncé est le suivant :

(b) Donnez des expressions qui signifient la même chose que « *si P alors Q* ».

Quatre étudiants s'abstiennent pour cette question. Nous notons que 4 autres étudiants donnent des exemples de phrases s'écrivant exactement sous la forme "*si P alors Q*" en remplaçant P et Q par des propositions de leur choix. Nous choisissons de procéder de manière similaire au dépouillage des questionnaires en secondaire et de ne pas lister ces exemples qui n'apportent rien à notre enquête sur les expressions équivalentes selon les étudiants d'un point de vue vocabulaire (langagier ou symbolique) à "*Si P alors Q*". Notons que 18 étudiants donnent deux expressions équivalentes à "*si P alors Q*" en répondant à cette question alors que les autres n'en donnent qu'une.

Nous choisissons de relever dans le tableau suivant les expressions sollicitées par les étudiants et de citer le nombre de fois qu'elles apparaissent.

Expressions relevées	**Nombre de fois qu'une telle expression apparaît (sur 31 étudiants)**
$P \Rightarrow Q$	15
$\neg P \vee Q$	10
$\neg Q \Rightarrow \neg P$	4
Si non Q alors non P	4
Le mot "*contraposée*" apparaît seul et sans explications	3
Dresse la table de vérité de "*si P alors Q*"	2
Si P se réalise alors Q aussi	1
Hypothèse : P Thèse : Q	1
Donne une fausse expression équivalente d'un point de vue logique à "*si P alors Q*" : – « *la contraposée :* $\neg P \Rightarrow \neg Q$ » (3 fois) ; – « $P \vee \neg Q$ » (1 fois) et la même expression sous sa forme langagière « *P ou non Q* » (2 fois) ; – « $\neg P \wedge Q$ » (2 fois) ; – « *la négation de "si on n'a pas P alors on n'a pas Q"* » (1 fois) qui renvoie donc à $\neg P \wedge Q$.	9

La première constatation émergeant de ces expressions est que les étudiants privilégient les écritures symboliques à celles langagières. En effet, avec les trois premières expressions de notre tableau, nous observons que 29 expressions sur 49 relevées au total, sont formulées avec des symboles mathématiques. Ce chiffre est même plus élevé encore car 6 étudiants donnent une expression erronée sous forme symbolique et équivalente selon eux à "*si P alors Q*". Au total, ce sont donc 35 expressions sur 49 relevées qui sont exprimées avec des symboles. Parmi ces derniers, nous trouvons 15 références pour "$P \Rightarrow Q$". Ces étudiants traduisent avec le symbole "$\Rightarrow$" l'expression "*si P alors Q*".
Parmi le total de 49 expressions relevées, nous en trouvons 18 qui sont logiquement équivalentes à "*si P alors Q*". Avec les 9 expressions erronées, ce sont pas moins de 27 expressions données que les étudiants estiment équivalentes d'un point de vue logique à "*si P alors Q*". Dans ces 18 expressions correctes, nous constatons que 14 d'entre elles mettent en avant l'usage de symboles pour s'exprimer et 4 autres sont formulées avec le langage. Plus précisément nous trouvons 10 fois la proposition "$\neg P \vee Q$" et 8 mentions à la contraposée de "*si P alors Q*". Pour ces 8 références, le choix du vocabulaire (symbolique ou langagier) employé pour exprimer cette notion est partagé : nous relevons 4 fois "$\neg Q \Rightarrow \neg P$" et 4 fois "*si non Q alors non P*". Notons que 3 autres étudiants mentionnent la contraposée mais uniquement de nom, ils ne formulent pas cette dernière.
Deux étudiants dressent correctement pour cette question la table de vérité de "*si P alors Q*". Cette démarche contribue selon nous, plus à définir "*si P alors Q*" qu'à donner une expression signifiant la même chose que "*si P alors Q*". Un étudiant nous donne l'expression langagière "*si P se réalise alors Q se réalise*". Celle-ci renvoie à la réduction de "*si P alors Q*" en "*si P est vrai alors Q est vrai*". Signalons que la réponse d'un étudiant met en avant l'association de la notion "*si... alors...*" à son utilisation pour s'exprimer dans des preuves. La prémisse est identifié à l'hypothèse et la conclusion à la thèse.

Terminons par les réponses apportées par les étudiants à la troisième et dernière partie de notre question. À travers celle-ci, nous voulons qu'ils nous donnent quelques exemples de propriétés mathématiques de la forme "*Si P alors Q*" qu'ils connaissent.

(c) Citez quelques propriétés que vous avez croisées dans votre cours de mathématique et qui s'énoncent sous la forme « *si P alors Q* ».

Remarquons que 5 étudiants se sont abstenus à cette question. Au total, nous avons relevé 54 exemples de propriétés. Parmi ceux-ci, 9 sont des définitions non complètes d'un concept mathématique s'énonçant sous une forme conditionnelle et 3 autres exemples sont erronés. Nous listons ci-dessous les différents exemples que nous ont cités les étudiants :

- donne la définition de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$:
  « $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in domf, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$ » (citée 7 fois)
- donne la définition en $\varepsilon - \delta$ de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ en a :
  « $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in domf, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$ » citée 5 fois et encore 2 autres fois en exprimant "$\cdots \Rightarrow \ldots$" par "si… alors…" :
  « $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in domf, si\ |x-a| < \delta\ alors\ |f(x)-f(a)| < \varepsilon$ »
- autre définition de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ en un réel a
  « $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ *est continue en* a » (cité 2 fois)
- « $maxA = a \Rightarrow supA = a$ », cité 2 fois de manière symbolique et 2 autres fois d'un point de vue langagier : « *si max* A *existe et vaut* a *alors sup* A *existe aussi et vaut* a »
- donne une propriété sur la norme d'un vecteur :
  « $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ » citée 3 fois dont une fois en exprimant "$\cdots \Rightarrow \ldots$" par "si… alors…" : « $\forall x \in \mathbb{R}^n, si\ \|x\| = 0\ alors\ x = 0$ ».
- donne la définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ injective :
  « f *est injective si* $\forall x_1, x_2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ » (cité 2 fois dont une, juste le mot "*injectivité d'une fonction*")
- cite les mots "*bijectivité*" et "*injectivité*" mais ne définit pas ces concepts (relevé une fois) ;
- donne la définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ croissante : « f *est croissante si* $\forall x_1, x_2, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$ » (cité 2 fois)

Tous les exemples suivants ont été recensé une fois :

- définit une base d'un espace vectoriel : « [E espace vectoriel sur un corps K] *si* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est libre et génératrice alors* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est une base de* E »
- « *si* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = b = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe et vaut* b »
- « *si* p *est intérieur à* A *alors* $p \in A$ »
- « *si* $A \subseteq B$ *alors* $supA \leqslant supB$ »
- « *si une fonction est périodique alors elle n'est pas injective* »
- « *si* $x \geqslant 0$ *alors* $|x| = x$ *et si* $x < 0$ *alors* $|x| = -x$ »
- « *si* $a < b$ *et* $b < c$ *alors* $a < c$ »
- « *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Si* $a, b > 0$ *alors* $a \cdot b > 0$ *et si* $a > 0$ *et* $b < 0$ *alors* $a \cdot b < 0$ »

Parmi ces exemples, nous remarquons que les étudiants utilisent à la fois la notation symbolique "$\Rightarrow$" et des expressions langagières comme "si… alors…" ou "…si …". Nous avons relevé 18 écritures sous forme symbolique avec "$\Rightarrow$" et 13 écritures plus langagières avec emploi de l'expression "si… alors…". Dans 3 exemples, les étudiants emploient à la fois l'expression langagière "…si …" et la notation symbolique "$\Rightarrow$" : définition de l'injectivité d'une fonction réelle et définition de la croissance d'une fonction réelle. Dans les notations symboliques, nous remarquons la présence de quantificateurs universels et existentiels et surtout le fait que ceux-ci sont tous des quantificateurs bornés. Ce dernier point reflète une pratique très courante chez le mathématicien qui se retrouve dans les exemples des étudiants. Ces exemples sont majoritairement issus de la branche analyse mathématique mais quelques exemples algébriques apparaissent également dont un en algèbre linéaire.

Question 2

Cette question comporte trois parties où chacune illustre une figure de raisonnement. L'énoncé de la première partie est le suivant :

(a)

> <u>Affirmations :</u>
> – S'il pleut alors je prends mon parapluie.
> – Je prends mon parapluie.
> <u>Conclusion :</u>
> Donc, il pleut.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

Nous dressons dans le tableau suivant les réponses apportées par les 39 étudiants interrogés.

Réponses des étudiants	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 39 interrogés)**
La case choisie est "fausse"	20
La case liée à un manque d'informations est cochée	16
La case "vraie" est cochée	2
Abstention	1

La case correcte à cocher est “fausse”. Celle-ci est d'ailleurs choisie majoritairement par les étudiants à hauteur de 51%. La case relative à un manque d'informations récolte 41% des voix tandis que la case vraie en recueille 5%. Le taux d'abstention est de 3%. Nous détaillerons ci-dessous les justifications apportées pour chaque case.
Parmi les 20 étudiants qui ont coché la case “**fausse**”, nous relevons que 11 personnes (soit 28% du public) justifient correctement leur choix en répondant ≪ *on peut prendre son parapluie et il ne pleut pas* ≫. Via cette réponse, la proposition “*il pleut*” est déclarée fausse et celle “*je prends mon parapluie*” vraie. Ce choix respecte donc la vérité de l'implication donnée en première affirmation par définition d'une implication matérielle dont la prémisse est fausse et la conclusion est vraie. La seconde affirmation “je prends mon parapluie” est également vérifiée avec cette réponse tandis que la conclusion “*il pleut*” ne l'est pas.
Parmi les autres justifications associées à la case “fausse”, nous relevons l'explication erronée suivante basée sur la logique dite naturelle. Cette explication est plus ciblée car elle n'apparaît que chez 2 étudiants (soit dans 10% des cases “fausse”). Ces deux personnes mettent en avant un rapport cause-conséquence : ≪ *Il pleut implique je prends mon parapluie mais l'inverse ne fonctionne pas, c'est pas parce que je prends mon parapluie qu'il pleut* ≫ et ≪ *Ce n'est pas parce que je prends mon parapluie qu'il pleut. Il pleut n'est pas la conséquence de “je prends mon parapluie”* ≫. À travers l'explication ≪ *ce n'est pas parce que je prends mon parapluie qu'il pleut* ≫, la personne sous-entend que “*prendre son parapluie*” n'est pas la cause de la pluie et que la pluie n'est pas la conséquence de “*prendre son parapluie*”. C'est l'absence d'un lien causal qui provoque la réponse fausse. Via cette justification basée sur un lien cause-conséquence, nous estimons que ces deux étudiants n'établissent pas que la conclusion est fausse à partir des deux affirmations mais plutôt qu'ils interprètent la seconde affirmation “*je prends mon parapluie*” avec la conclusion “*donc, il pleut*” comme l'implication “*si je prends mon parapluie alors il pleut*”. Cette idée est selon nous, renforcée par la remarque de l'étudiant stipulant ≪ *mais l'inverse [de “Il pleut implique je prends mon parapluie”] ne fonctionne pas* ≫. C'est cette nouvelle implication qu'ils déclarent fausse parce que sans lien causal entre sa prémisse et sa conclusion.
Décrivons brièvement les autres justifications apportées pour la case “fausse”.

– 5 étudiants donnent une explication qui ne va pas dans le sens du choix de case effectué. Nous ne relevons donc pas celles-ci suite à leur non pertinence.
– un étudiant donne le raisonnement erroné ≪ *il pleut et je ne prends pas mon parapluie* ≫ sans s'apercevoir que celui-ci rend la première

affirmation fausse (car la prémisse "*il pleut*" est vraie tandis que sa conclusion "*je prends mon parapluie*" est fausse).

- un étudiant mentionne la raison ≪ *on peut prendre son parapluie et il y a du soleil* ≫. La mention "*il ne pleut pas*" n'apparaît pas explicitement. Nous avons donc choisi d'écarter cette réponse des 11 justifications correctes stipulant ≪ *on peut prendre son parapluie et il ne pleut pas* ≫. Nous la rejetons car elle est selon nous basée sur des connaissances externes liées au monde extérieur. En effet, si nous prenons en compte nous aussi nos connaissances sur le monde extérieur comme le fait l'étudiant, nous pouvons objecter qu'il existe des configurations météorologiques où à la fois il y a du soleil et il pleut.

Intéressons-nous brièvement aux deux autres choix de cases, ces choix sont tout deux erronés. Seize étudiants cochent la case relative à un **manque d'informations** pour établir si la conclusion faite est correcte ou erronée. Ils mettent en avant différentes raisons que nous relevons ci-dessous :

- Six étudiants nomment respectivement A la proposition "*il pleut*" et B la proposition "*je prends mon parapluie*" et font la remarque que ≪ *[l'] on a* $A \Rightarrow B$ *mais cela ne veut pas forcément dire que* $B \Rightarrow A$ ≫. Trois d'entre eux précisent : ≪ *on a* $A \Rightarrow B$ *mais on ne dit rien sur* $B \Rightarrow A$ ≫ ;
- ≪ *On ne dit pas que "s'il ne pleut pas alors je ne prends pas mon parapluie"* ≫ (cité 2 fois) ou encore, en utilisant l'équivalence logique de cette implication avec sa contraposeé : on ne dit pas que *"si je prends mon parapluie alors il pleut"*. Trois autres étudiants sont moins précis dans leurs justifications puisqu'ils répondent ≪ *on ne dit pas ce que l'on fait quand il ne pleut pas* ≫ ;
- ≪ *prendre son parapluie n'indique pas forcément qu'il pleut* ≫ (recensé 3 fois), les étudiants ne cochent pas la case "fausse" pour autant. Nous pensons que ces étudiants ne prennent en compte que les deux affirmations pour se prononcer. En effet, à partir de celles-ci on ne peut pas conclure qu'il pleut, ni même qu'il ne pleut pas. De là, la remarque ≪ *prendre son parapluie n'indique pas forcément qu'il pleut* ≫. Nous estimons donc que ces étudiants cochent la case dédiée à un manque d'informations sans prendre en compte la conclusion "*donc, il pleut*".
- deux étudiants ne justifient pas leur choix de case.
- enfin, nous relevons une fois la mention ≪ *On ne dit pas si on prend son parapluie par précaution [sous-entendu en prévision qu'il pleuve]* ≫.

En ce qui concerne la case "**vraie**", 2 étudiants estiment que la conclusion établie à partir des deux affirmations est correcte et leurs justifications mettent en avant une interprétation de l'implication "*s'il pleut alors je prends mon parapluie*" comme une équivalence. Le fait de prendre son parapluie conduit alors à déduire qu'il pleut.

En résumé, 51% des étudiants (soit 20 personnes) cochent la réponse correcte à cette question, à savoir la case “fausse” mais seules 11 personnes (soit 28% du public) justifient correctement ce choix de case. L'explication qui y donnée repose sur la combinaison “*je prends mon parapluie et il ne pleut pas*”. Cette question a été initialement crée pour mettre en avant une confusion possible d'un point de vue langagier entre une implication et une équivalence. Nous relevons cette confusion auprès de deux étudiants ayant choisi la case “vraie”. Ce sont d'ailleurs les seuls à avoir coché cette case. Au niveau des 39 personnes interrogées, cette confusion est donc peu présente (environ 5% du public).

Concentrons-nous sur la seconde partie de notre question dont l'énoncé est le suivant :

(b)

Affirmations :
– Si la propriété X est vérifiée alors la propriété Y est vérifiée.
– La propriété Y n'est pas vérifiée.
Conclusion :
Donc, la propriété X n'est pas vérifiée.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

Nous avons relevé majoritairement les réponses suivantes :

Réponses des étudiants	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 39 interrogés)**
La case “vraie” est cochée	28
La case choisie est “fausse”	4
La case liée à un manque d'informations est cochée	2
Abstention	5

28 étudiants sur 39 (soit près de 72%) répondent correctement à cette question en cochant la case “vraie”. Les cases “fausse” et “manque d'informations” sont respectivement choisies par 10% et 5% du public. Cinq personnes

ne répondent pas à notre question, ce qui donne un taux d'abstention de 13%.

Parmi les 28 étudiants qui cochent la case "**vraie**", nous relevons 23 justifications exploitables, soit 82% des cases faux cochées ou encore 59% du public total. Ces 23 explications sont justes mais 7 manquent cependant de rigueur. Uniquement 16 étudiants répondent donc correctement et rigoureusement à notre question. Pour exprimer leur raisonnement, ces 16 étudiants ont recours à la logique des propositions. Ils nomment respectivement X la proposition "*la propriété X est vérifiée*" et Y "*la propriété Y est vérifiée*". Le choix des lettres pour les propositions peut bien évidemment varier d'une copie à l'autre. Nous détaillons ci-dessous ces 16 justifications :

– Onze étudiants fournissent une explication basée sur la contraposée de l'implication donnée en première affirmation. Ils identifient explicitement que $\neg Y \Rightarrow \neg X$ est équivalent à $X \Rightarrow Y$ et raisonnent ensuite correctement en déduisant de la seconde affirmation "*la propriété Y n'est pas vérifiée*" (appelée $\neg Y$) que la propriété X n'est pas elle aussi vérifiée. Signalons que 8 étudiants mentionnent que $\neg Y \Rightarrow \neg X$ est la contraposée de $X \Rightarrow Y$. Ce sont d'ailleurs les seuls à utiliser cette appellation.
– Quatre étudiants dressent la table de vérité de $X \Rightarrow Y$. Suite à la seconde affirmation, ils identifient $\neg Y$ à vrai, c'est-à-dire Y à faux. Ils nous signalent alors qu'une seule possibilité pour la valeur de vérité de X peut découler de la vérité de $X \Rightarrow Y$ dont la conclusion Y est fausse : X est faux, c'est-à-dire la propriété X n'est pas vérifiée.
– un étudiant établit que la conclusion dressée à partir des deux affirmations est juste en effectuant une preuve par l'absurde : en supposant X vrai, il obtient ainsi avec Y faux une contradiction sur la vérité de la première affirmation.

Sept autres étudiants ayant choisi la case "vraie" préfèrent justifier leur raisonnement sans utiliser la logique des propositions. Ils mentionnent juste dans leurs explications que ≪ *si la propriété Y n'est pas vérifiée alors la propriété X ne l'est pas non plus* ≫ mais ils n'expliquent pas la provenance de cette proposition ni ne signalent qu'il s'agit de la contraposée de notre première affirmation ≪ *si la propriété X est vérifiée alors la propriété Y est vérifiée* ≫. Les étudiants ne disent pas explicitement qu'ils jugent la proposition mentionnée équivalente à notre première affirmation. Notons qu'ils déduisent ensuite correctement la conclusion proposée à partir de la proposition qu'ils mentionnent et de notre seconde affirmation. Ils utilisent pour cela la règle du *Modus Ponens*.

Quatre étudiants ont coché la case "**fausse**". Signalons que deux d'entre eux ne reconnaissent pas que la proposition "*si la propriété Y n'est pas vérifiée* *alors la propriété X n'est pas vérifiée*" est la contraposée de la première affirmation : « *on ne peut pas dire que "si Y n'est pas vérifié alors X n'est pas vérifié"* ».

En résumé, pour cette question, nous constatons que 28 étudiants (soit 72% du public interrogé) cochent la case correcte, à savoir "vraie". En examinant les justifications apportées, nous remarquons que 23 personnes (soit 59% du public) justifient ce choix et reconnaissent ainsi le raisonnement par contraposition. Parmi les explications données, 7 d'entre elles manquent cependant de rigueur puisqu'aucune équivalence n'est mentionnée entre l'implication donnée en première affirmation et sa contraposée. Signalons que 11 étudiants reconnaissent que la contraposée de $X \Rightarrow Y$ est $\neg Y \Rightarrow \neg X$ et qu'il existe une équivalence entre ces deux propositions.

Intéressons-nous maintenant à la troisième et dernière partie de notre question. L'énoncé est rappelé ci-dessous :

(c)

Affirmations :
- Si Doc voyage dans le temps alors sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure.
- Doc ne voyage pas dans le temps.

Conclusion :
Donc, sa DeLorean n'atteint pas la vitesse de 88 miles par heure.

Estimez-vous que la conclusion établie à partir des deux affirmations est :
☐ vraie ☐ fausse ☐ on ne dispose pas d'assez d'informations pour y répondre.
Expliquez votre raisonnement.

Suite au dépouillement des réponses des 39 étudiants à cette question, nous listons les constatations suivantes :

Constatations	**Nombre d'élèves dans ce cas (sur 39 interrogés)**
La case choisie est "fausse"	22
La case liée à un manque d'informations est cochée	8
La case "vraie" est cochée	7
Abstention	2

La bonne réponse pour cette question est de cocher la case "fausse". Celle-ci est d'ailleurs majoritairement choisie par les étudiants : 22 fois soit 57%. Les

cases “vraie” et “manque d’informations” récolte respectivement 18% et 20% des votes. Le taux d’abstention pour cette question est de 5%.
Intéressons-nous aux justifications fournies avec le choix de case “**fausse**”. Parmi celles-ci, nous relevons 14 explications correctes (63% des cases fausses), une erronée et basée sur la logique naturelle (5% des cases fausses) et 7 (soit 32% des cases fausses) non exploitables car le raisonnement donné n’y est pas abouti (3 cas) ou ne justifie pas le choix de case fait (4 cas). Dans ces 14 explications justes, nous relevons :

- 12 étudiants justifient ce choix avec le raisonnement ≪ *Doc ne voyage pas dans le temps et sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure* ≫.
- 2 personnes dressent la table de vérité de l’implication donnée en première affirmation comme aide pour formuler une réponse. Pour cela, ils nomment[1] respectivement P la proposition “*Doc voyage dans le temps*” et Q “*sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure*”. Grâce à cette table de vérité, ils identifient que la combinaison P faux et Q vrai vérifie les deux affirmations données mais pas la conclusion établie à partir de ces deux dernières.

Un aspect plus localisé pour cette case est l’explication erronée suivante que donne un étudiant en se basant sur la logique naturelle et précisément sur un rapport de causalité : ≪ *ce n’est pas parce que Doc ne voyage pas dans le temps que la DeLorean ne peut pas atteindre la vitesse de 88 miles par heure* ≫.
Concentrons-nous brièvement sur les deux autres choix de cases. Ceux-ci sont tous les deux erronés. Huit étudiants pensent ne **pas** disposer de **suffisamment d’informations** pour se prononcer sur le raisonnement affirmations/conclusion proposé. Nous listons ci-dessous quelques informations que ces étudiants estiment manquantes pour se prononcer :

- ≪ *On ne nous dit pas ce qui se passe lorsque Doc ne voyage pas dans le temps* ≫ (recensé 4 fois) ;
- ≪ *On ne sait pas conclure [. . .]* ≫ (3 fois), d’après leurs justifications, ils ne tiennent compte que des affirmations, ce qui amène en effet à dire “on ne peut pas conclure” ; ces étudiants ne prêtent pas attention à la conclusion qui est faite.
- ≪ *On ne dit pas si la DeLorean peut atteindre 88 miles par heure sans voyager dans le temps* ≫ (cité 1).

Enfin, sept étudiants ont coché la case “**vraie**”. Dans les explications apportées, nous recensons :

- 5 personnes qui mettent en avant dans leurs justifications une concep-

1. Le choix des lettres peut différer d’une copie à l’autre.

tion erronée sur la contraposée de l'implication : $\neg A \Rightarrow \neg B$ est équivalent à $A \Rightarrow B$. La fausse contraposée apparaît dans les 5 justifications sous la forme langagière "*si Doc ne voyage pas dans le temps alors sa DeLorean n'atteint pas la vitesse de 88 miles par heure*".
– un autre étudiant identifie par contre correctement la contraposée de l'implication donnée en première affirmation bien qu'il la nomme "*transposée*" : ≪ *$A \Rightarrow B$, sa transposée, c'est $\neg B \Rightarrow \neg A$.* [Nous supposons qu'il nomme respectivement A la proposition "*Doc voyage dans le temps*" et B "*sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure*" car cela n'est pas dit] *Sa DeLorean n'atteint pas la vitesse de 88 miles par heure. Donc [Doc] ne voyage pas dans le temps* ≫. Bien qu'ayant correctement identifié la contraposée, l'étudiant semble ensuite confondre $\neg B \Rightarrow \neg A$ avec $\neg B \Leftrightarrow \neg A$.
– un dernier étudiant donne une justification qui ne va pas dans le sens de la case "vraie" cochée.

En résumé, pour cette question, nous recensons 22 étudiants (soit 57% du public) qui choisissent la case "fausse". En examinant les justifications de ces 22 personnes, nous constatons que 14 d'entre elles, soit 63,5%, sont correctes. Parmi celle-ci, nous en relevons 12 basée sur le raisonnement ≪ *Doc ne voyage pas dans le temps et sa DeLorean atteint la vitesse de 88 miles par heure* ≫ et 2 obtenue en dressant la table de vérité de l'implication. Nous avons créé cette question à partir de la conception erronée que des étudiants peuvent avoir sur la contraposée d'une implication : $\neg A \Rightarrow \neg B$ est équivalent à $A \Rightarrow B$. Nous avons relevé que celle-ci est présente auprès de 5 étudiants, soit 13% du public interrogé.

Question 3

L'énoncé de cette question est le suivant :

Donnez tous les nombres naturels n entre 0 et 20 qui vérifient la propriété suivante : ≪ Si n est un nombre pair, alors $n + 1$ est un nombre premier ≫. Détaillez votre raisonnement.

Nous relevons dans le tableau suivant les réponses majoritairement apportées par les 39 étudiants interrogés.

	Réponses des étudiants	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 39 interrogés)**
(1)	Donne tous les naturels pairs de l'intervalle $[0, 20]$ excepté 0, 8, 14 et 20	14
(2)	Donne tous les naturels pairs de l'intervalle $[0, 20]$ excepté 8, 14 et 20 (0 vérifie la propriété car 1 est considéré comme premier)	10
(3)	La réponse est constituée uniquement de calculs sans explications (la personne ne mentionne pas quels sont les nombres naturels qui vérifient la propriété)	8
(4)	Donne tous les naturels de l'intervalle $[0, 20]$ excepté 0, 8, 14 et 20 (la réponse correcte à la question)	6
(5)	Donne tous les nombres pairs de l'intervalle $[0, 20]$, y compris 0, 8, 14 et 20 qui sont considérés comme rendant vraie la propriété	1
(6)	Abstention	0

Les lignes (1), (2) et (5) du tableau nous renseigne que 25 étudiants sur 39 (soit près de 64% du public interrogés) ne donnent que des nombres pairs dans leur réponse. Ceux-ci ne tiennent compte que du cas d'une prémisse vraie pour les instances obtenues en donnant des valeurs naturelles à la variable n comprise entre 0 et 20. Ils ne travaillent alors qu'avec des nombres pairs, ceux qui vérifient justement la prémisse. Leur réponse n'est donc pas correcte puisque les nombres impairs n'y figurent pas. La ligne (4) de notre tableau nous informe que seuls six étudiants sur 39 interrogés, soit 15%, répondent en listant à la fois tous les nombres impairs entre 0 et 20 (qui rendent vraie la propriété puisque la prémisse des instances associées n'est pas vérifiée) et les nombres pairs 2, 4, 6, 10, 12, 16 et 18 (qui vérifient la propriété puisque la prémisse et la conclusion des instances associées sont vraies). Ces six étudiants sont donc les seuls à répondre correctement à notre question. Enfin, signalons que 8 réponses (soit 21%) sont à rejeter car les étudiants y listent des nombres ou des implications matérielles mais au final, ne répondent pas à la question.

Donnons un peu plus de précisions à propos des réponses des étudiants. Parmi les 25 personnes qui ne travaillent qu'avec des nombres pairs, nous relevons que :

- 14 personnes donnent correctement les nombres naturels pairs entre 0 et 20 vérifiant la propriété ;
- 10 étudiant estiment que 0 vérifie la propriété, la raison étant qu'ils considèrent son successeur, 1, comme un nombre premier. Ils ne se rendent donc pas compte que 2 est le plus petit naturel premier.
- un étudiant pense que tous les nombres pairs de l'intervalle $[0, 20]$ rendent vraie la propriété. Il n'identifie pas que 8 vérifie la prémisse mais pas la conclusion de l'instance qui lui est associée.

Dans les copies de ces 25 étudiants, nous remarquons que des justifications peuvent être absentes (12 cas) ou partiellement manquantes. Nous constatons notamment que 7 étudiants oublient notamment de justifier pourquoi un candidat pair comme par exemple 8 doit être exclu alors qu'ils le font pour des candidats comme 14 ou 20.

Parmi les 6 étudiants mentionnant les nombres impairs dans leur réponses, les justifications sont généralement présentes mais certains peuvent oublier parfois quelques précisions :

- deux étudiants considèrent que 0 rend vraie la propriété puisqu'ils estiment que 1 est un nombre premier ;
- un étudiant ne remarque pas que 1 vérifie la propriété alors qu'il identifie que les autres nombres impairs le font ;
- deux étudiants affirment que les nombres impairs vérifient la propriété mais sans expliquer pourquoi ;
- enfin, un étudiant exclut des candidats comme 8 ou 14 mais ne justifie pas cette exclusion.

En résumé pour cette question, nous ne relevons que 15% de bonnes réponses (soit 6 étudiants) qui établissent que tous les nombres naturels de 1 à 19 excepté 8 et 14 rendent vraie la propriété donnée. Dans les instances associées, ces étudiants prennent donc en compte à la fois le cas d'une prémisse vraie et celui d'une prémisse fausse. Nous constatons également avec cette question que 64% des étudiants donnent une réponse incomplète puisqu'ils ne travaillent qu'avec des nombres pairs et donc qu'avec le cas d'une prémisse vraie pour les instances associées.

Question 4

Nous commençons par identifier les réponses que les étudiants ont apportées à notre premier tableau. Dans celui-ci nous demandons aux étudiants de se prononcer sur la vérité des énoncés conditionnels donnés.

Soit k un naturel quelconque.

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair			
(b)	k pair $\Rightarrow$ $k+1$ impair			
(c)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ pair			
(d)	k impair $\Rightarrow$ $k+1$ impair			

Nous leur demandons ensuite de justifier leur réponse pour l'énoncé (a).

Nous dressons les constatations suivantes suite à la diffusion de notre questionnaire auprès de 39 étudiants.

<table>
<tr><th>Réponses des étudiants</th><th>Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 39 interrogés)</th></tr>
<tr><td>Les cases cochées mettent en avant une interprétation des énoncés conditionnels comme étant implicitement universellement quantifié
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas savoir</th></tr>
<tr><td>(a)</td><td>k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>(b)</td><td>k pair $\Rightarrow$ $k+1$ impair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(c)</td><td>k impair $\Rightarrow$ $k+1$ pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(d)</td><td>k impair $\Rightarrow$ $k+1$ impair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>37</td></tr>
<tr><td>Coche les cases respectivement "vrai", "faux", "vrai", "vrai" pour les énoncés (a), (b), (c) et (d)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Coche toutes les cases "on ne peut pas savoir"</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Abstention</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Les cases cochées reposent sur des implications entre énoncés contingents où k est vu comme un élément générique qu'on ne connait pas a priori.
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas savoir</th></tr>
<tr><td>(a)</td><td>k pair $\Rightarrow$ $k+1$ pair</td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>(b)</td><td>k pair $\Rightarrow$ $k+1$ impair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(c)</td><td>k impair $\Rightarrow$ $k+1$ pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(d)</td><td>k impair $\Rightarrow$ $k+1$ impair</td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>0</td></tr>
</table>

95% des étudiants cochent les cases "faux", "vrai", "vrai", "faux" respectivement pour les énoncés conditionnels (a), (b), (c) et (d). Ce choix semblent sous-entendre une quantification universelle implicite des énoncés conditionnels. Nous demandons aux étudiants de justifier leur réponse apportée à la sous-question (a) afin de vérifier si cette pratique se reflète dans leurs connaissances et conceptions associées à une implication.
Nous considèrerons ce choix de cases "faux", "vrai", "vrai", "faux" comme correct s'il s'avère que les étudiants interprètent bien tous les énoncés conditionnels donnés comme universellement quantifiés implicitement. Afin que les étudiants puissent répondre à notre questionnaire dans un délais de temps raisonnable, nous avons concentré notre demande de justifications sur la sous-question (a). Nous espérons ainsi constater si au moins celle-ci est interprétée

comme universellement quantifiée implicitement, à défaut de savoir si les quatre énoncés conditionnels le sont.

Le tableau de réponses ci-avant nous renseigne déjà sur les différentes cases cochées par les étudiants à cette sous-question (a) : 37 personnes sur 39 interrogées (soit 95% du public) choisissent la case "faux" tandis que les cases "vraies" et "on ne peut pas savoir" obtiennent chacune une voix (2%). Nous identifions deux réponses pouvant être jugées comme correctes : la case "faux" si l'énoncé conditionnel (a) est interprété comme implicitement quantifié universellement et la case "on ne peut pas savoir" où l'énoncé (a) est cette fois-ci une implication entre énoncés contingents avec k un élément générique non connu a priori.

Nous dressons dans le tableau suivant les justifications majoritairement apportées par les étudiants pour la sous-question (a).

Justifications apportées à l'énoncé conditionnel (a)	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 39 interrogés)**
Établit que (a) est faux car le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" formulé sous cette forme langagière n'y est pas vérifié	11
Établit que (a) est faux car le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" formulé mathématiquement y est erroné	10
Établit que (a) est faux en donnant un contre-exemple	8
La case "faux" est cochée mais l'explication apportée ne justifie pas ce choix de case	5
Ne donne pas de justifications à la sous-question (a)	4 (dont trois cases "faux" cochées et une "vrai")
Explique pourquoi avoir choisi la case "*on ne peut pas savoir*"	1

95% du public (soit 37 étudiants) a coché la case "faux". Parmi les explications apportées pour cette case, 57% (soit 21 personnes) d'entre elles sont basées sur l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion Les cases cochées au premier tableau nous informent que 37 étudiants sur 39 interrogés ont coché la case "fausse" pour la sous-question (a). Décrivons les justifications majoritaires apportées par ceux-ci pour justifier ce faux. Un cinquième des étudiants donne à l'énoncé (a) un contre-exemple. La rédaction de ce dernier est correcte et suit la structure suivante :

"*prenons* $k = 42$*, on a que 42 est pair et* $42 + 1 = 43$ *n'est pas pair*". Donner un contre-exemple pour invalider (a), c'est justement montrer que la négation de l'énoncé conditionnel (a) sous sa forme universellement quantifiée est vraie. Les élèves montrent donc que il existe un k tel que k est pair et $k + 1$ n'est pas pair. Ces étudiants, au nombre de 8, sont en minorité par rapport aux 21 qui mettent en avant dans leur justification l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse "k *pair*" à la conclusion "$k+1$ *pair*" de cet énoncé. Pour ces 21 personnes, c'est parce que le lien explicatif n'est pas vérifié que (a) est déclaré faux. Nous relevons dans les productions des étudiants deux façons d'exprimer ce lien explicatif :

- la première consiste à exprimer ce lien sous forme langagière : ≪ *un nombre pair est suivi d'un nombre impair* ≫ (relevé 11 fois) ;
- la seconde façon recensée chez 10 étudiants, repose sur une explication mathématique de ce lien "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" : ils établissent une preuve pour nous montrer que le successeur d'un nombre pair est un nombre impair. Ils démontrent tous en réalité l'énoncé "$\forall k, \big(k \textit{ pair} \Rightarrow k + 1 \textit{ impair}\big)$". Cette preuve les conduira notamment à répondre "vrai" pour l'énoncé (b). 7 personnes mentionnent notamment : ≪ *ce que je viens de montrer,* $\forall k, \big(k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ impair}\big)$*, c'est exactement (b)* ≫. La sous-question (a) est donc déclarée fausse par les étudiants car elle ne vérifient pas le lien mathématique démontré.

Cette justification de la sous-question (a) reposant sur l'existence d'un lien explicatif qui y est non vérifié, met en avant ce phénomène de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels auprès de 10 étudiants. En effet, ils démontrent tous l'implication formelle $\forall k, \big(k \textit{ pair} \Rightarrow k + 1 \textit{ impair}\big)$ et 7 d'entre eux mentionnent notamment que cette implication universellement quantifiée est exactement l'énoncé (b) donné. Parmi les 37 étudiants ayant répondu "faux" en (a), nous pouvons dire qu'au total 18 personnes (soit 46% du public total interrogé ou encore 49% de ces 37 personnes) ont interprété l'énoncé $k \textit{ pair} \Rightarrow k + 1 \textit{ impair}$ comme étant quantifié universellement mais de façon implicite. En effet, 8 personnes donnent un contre-exemple pour invalider (a), ce qui renvoie à une implication formelle et près de 10 mentionnent explicitement le quantificateur $\forall k$ dans l'explication donnée.

Remarquons qu'un étudiant a coché toutes les cases "on ne peut pas savoir" dans ce tableau pour les énoncés (a), (b), (c) et (d). Il explique que ≪ *la propriété "k pair" n'est pas vérifiée pour tous les naturels quelconques et de même pour "k impair"* ≫. À travers cette explication, nous avons l'impression que pour l'étudiant, selon la parité de k, la propriété "k *pair*" peut être vraie ou fausse. Sa remarque laisse en tout cas penser que cette propriété n'est pas toujours vraie et il en va de même pour "k *impair*". L'explication de l'étudiant n'est guère plus détaillée et ne nous permet pas d'aller plus loin dans son analyse.

Identifions et analysons maintenant les réponses apportées par les étudiants à notre second tableau dont l'énoncé est le suivant.

Que pensez-vous des énoncés suivants ?

		Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(e)	3 pair $\Rightarrow$ 4 pair			
(f)	3 pair $\Rightarrow$ 4 impair			
(g)	3 impair $\Rightarrow$ 4 pair			
(h)	3 impair $\Rightarrow$ 4 impair			

Nous leur demandons ensuite de justifier leur réponse pour les énoncés (e) et (f).

Nous dressons les réponses majoritairement apportées par les étudiants dans le tableau de la page 227.

Les réponses des étudiants sont principalement partagées entre deux configurations. Seize étudiants cochent respectivement les cases “faux”, “vrai”, “vrai” et “faux” pour les implications (e), (f), (g) et (h). Tandis que 14 autres cochent respectivement les cases “vrai”, “vrai”, “vrai” et “faux” pour ces mêmes implications, ce qui constitue la réponse que nous attendions. Nous avons choisi de demander aux étudiants de justifier leurs réponses pour les énoncés conditionnels (e) et (f). Nous désirons ainsi étudier leurs conceptions face à une implication entre propositions dont la prémisse est fausse.

<table>
<tr><th>Réponses des étudiants</th><th>Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 39 interrogés)</th></tr>
<tr><td>Les cases cochées font apparaître le tableau suivant :
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas savoir</th></tr>
<tr><td>(e)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>(f)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(g)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(h)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td><td>15</td></tr>
<tr><td>Le tableau suivant illustre la configuration correcte attendue :
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas savoir</th></tr>
<tr><td>(e)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(f)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(g)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(h)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td><td>14</td></tr>
<tr><td>Les cases cochées font référence au tableau de réponses suivant :
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas savoir</th></tr>
<tr><td>(e)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>(f)</td><td>3 pair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>(g)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 pair</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(h)</td><td>3 impair $\Rightarrow$ 4 impair</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td><td>2</td></tr>
<tr><td>Autres réponses :
coche respectivement pour (e), (f), (g) et (h),
– les cases “faux”, “faux”, “vrai”, “vrai” (relevé une fois) ;
– les cases “vrai”, “faux”, “vrai”, “faux” (vu 4 fois) ;
– toutes les cases “on ne peut pas savoir” (listé 2 fois).</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Abstention</td><td>1</td></tr>
</table>

Nous listons dans le tableau ci-dessous les différentes justifications majoritairement apportés par les 39 étudiants interrogés pour la sous-question (e).

Justifications apportées à l'énoncé conditionnel (e)	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 39 interrogés)**
Vrai car la prémisse "3 pair" est fausse et qu'une prémisse fausse rend vraie une implication	12
Vrai en utilisant l'équivalence logique entre l'implication matérielle "$P \Rightarrow Q$" et "$\neg P \vee Q$"	1
Vrai avec une autre justification	1
Faux car on suppose que 3 est pair même si on sait que c'est pertinemment faux et on constate ensuite que le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" (formulé sous cette forme langagière) n'est pas vérifié pour l'implication (e)	8
Faux car le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" (formulé sous cette forme langagière) est erroné pour l'implication (e)	3
Faux en utilisant la réponse "faux" cochée pour l'énoncé conditionnel (a)	3
Faux en utilisant la propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫	2
Explication non pertinente associée à la case "*on ne peut pas savoir*"	1
L'explication apportée ne justifie pas la case cochée	3
Abstention	5

Au total, si nous englobons les différents tableaux possibles de réponses, 18 étudiants ont coché la case "vrai". Parmi ceux-ci, 12 justifient leur réponse correctement en notant que cette implication est vrai puisque sa prémisse "*3 pair*" est fausse. Cette justification apparaît 7 fois sous la forme ≪ *(e) est vrai car "3 pair" est faux* ≫ et 5 fois sous l'explication symbolique ≪ *(e) vrai car* $0 \Rightarrow 1$ [5 tables de vérité sont notamment dressées] ≫. Cette dernière fait référence à la table de vérité de $P \Rightarrow Q$ où la proposition P pour "3 pair" est fausse (symbolisé par "0") et la proposition Q "4 pair" est vraie (symbolisé ici par un “1”). “$0 \Rightarrow 1$” renvoie ainsi à la vérité d'une implication dont la prémisse est fausse. Parmi les justifications apportées à la réponse “vrai”, nous recensons deux autres types de justifications :

- la première est correcte et n'apparaît qu'une seule fois. L'étudiant y met en avant la vérité de l'implication (e) en utilisant l'équivalence logique entre $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$ et en nommant respectivement P la proposition “3 pair” et Q celle “4 pair” ;
- la seconde n'est pas correcte : l'étudiant argumente ≪ *même si l'on considère 3 comme pair (or que c'est faux) la conclusion que 4 est pair est vraie* ≫, il suppose donc que 3 est pair même si ses connaissances lui disent le contraire mais prend en compte ses dernières pour affirmer que 4 est pair. Son but est apparemment de se ramener au cas d'une prémisse vraie et ainsi contourner celui d'une prémisse fausse. Il conclut alors que (e) est vrai car sa prémisse et sa conclusion sont selon lui toutes les deux vraies.

Les explications apportées pour les quatre dernières réponses “vrai” sont soit absentes (1 cas) soit ne justifient pas le choix “vrai” (3 cas).
Au total, si nous regroupons les différents tableaux possibles de réponses, 18 étudiants ont coché la case “faux”. Parmi ceux-ci, 11 justifications prennent en compte le lien explicatif “*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*” pour passer de la prémisse “3 pair” à la conclusion “4 pair”. L'implication (e) est alors déclarée fausse car ce lien explicatif n'est ici pas vérifié. Notons que 8 étudiants se ramènent au cas de la prémisse vraie en supposant que 3 est pair bien qu'ils signalent que “3 pair” est pourtant faux. Ils utilisent ensuite le raisonnement associé au lien explicatif. Trois autres étudiants ne se ramènent apparemment pas au cas de la prémisse vraie, nous n'avons en effet pas trouvé de traces écrites de “on suppose 3 pair”. Nous pensons que ces élèves statuent sur la vérité de (e) en constatant de manière visuelle la présence de “3 pair” et de “4 pair”. Ils restent fixés sur les deux mots “pair” et répondent que (e) est faux parce que le lien n'est pas vérifié. Parmi les 18 étudiants cochant la case “faux”, nous relevons également auprès de deux étudiants, un autre type de justification : (e) est faux car sa prémisse “3 pair” est fausse, ce qui renvoie à la propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors “A implique B” est fausse* ≫. Enfin, signalons que trois autres étudiants utilisent la réponse “faux” cochées pour l'énoncé conditionnel (a) et que deux derniers s'abstiennent de justifier leur choix.

Pour terminer, nous recensons dans le tableau suivant les justifications majoritairement apportées par les 39 étudiants interrogées pour la sous-question (f).

Justifications apportées à l'énoncé conditionnel (f)	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 39 interrogés)**
Vrai car la prémisse "3 pair" est fausse et qu'une prémisse fausse rend vraie une implication	10
Vrai car on suppose que 3 est pair même si on sait que c'est pertinemment faux et on constate ensuite que le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" est vérifié	5
Vrai car le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" est correct	3
Vrai en utilisant l'équivalence logique entre l'implication matérielle "$P \Rightarrow Q$" et "$\neg P \vee Q$"	1
Vrai en réutilisant la réponse "vrai" cochée pour l'énoncé conditionnel (b)	3
Faux en utilisant la propriété-en-acte ≪ *Si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫	2
Faux en faisant le raisonnement que ≪ *Si B est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫	1
Faux car la prémisse "3 pair" et la conclusion "4 impair" sont toutes les deux fausses	1
Explication non pertinente associée à la case "*on ne peut pas savoir*"	1
L'explication apportée ne justifie pas la case cochée	6
Abstention	6

Si nous regroupons les différentes tableaux de réponses fournis par les étudiants, nous relevons que 30 personnes ont coché la case "vrai" pour l'implication matérielle (f). Dix d'entre eux justifient correctement ce choix puisqu'ils identifient que la prémisse "3 pair" est fausse et qu'une prémisse fausse rend vraie une implication entre propositions. Cinq de ces étudiants donnent l'explication symbolique ≪ *(f) vrai car* $0 \Rightarrow 0$ [5 tables de vérité sont notamment dressées] ≫. Cette dernière fait référence à la table de vérité de $P \Rightarrow Q$ où la proposition P pour "3 pair" est fausse (symbolisé par "0") et la proposition Q pour "4 impair" est également fausse (symbolisé aussi par un "0"). "$0 \Rightarrow 0$"

renvoie ainsi à la vérité d'une implication dont la prémisse est fausse. Parmi les autres explications apportées à la réponse "vrai", nous recensons trois autres types de justifications :

– le première est erroné car il ne respecte pas la vérifonctionnalité d'une implication entre propositions. Huit étudiants prennent en compte le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" pour passer de la prémisse "3 pair" à la conclusion "4 impair" et ce servent de celui-ci pour statuer sur la vérité de (f). En effet, (f) est déclarée vrai car le lien explicatif y est vérifié. Notons ici aussi la présence d'une différence dans les raisonnements associés à l'existence d'un lien explicatif. Cinq étudiants mentionnent "*supposons 3 pair*" pour se ramener au cas d'une prémisse vraie et utilisent ensuite le raisonnement associé au lien explicatif. Trois autres étudiants ne se ramènent apparemment pas au cas de la prémisse vraie, nous n'avons en effet pas trouvé de traces écrites de "supposons 3 pair". Comme pour l'implication (e), nous pensons que ces élèves statuent sur la vérité de (f) en constatant de manière visuelle la présence de "3 pair" et de "4 impair". Ils restent fixés sur les mots "pair" et "impair" et répondent que (f) est vrai parce que le lien explicatif y est vérifié.
– le second type de justifications est correct. Nous l'avons relevé auprès d'un seul étudiant. Celui-ci se prononce sur la vérité de l'implication (f) en utilisant l'équivalence logique entre $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$ et en nommant respectivement P la proposition "3 pair" et Q celle "4 impair" ;
– le troisième et dernier type de justifications utilisé par 3 étudiants est selon nous erroné. Il se base sur la première réponse possible présentée à la page 110. La case "vrai" cochée fait référence à la case précédemment choisie pour l'énoncé conditionnel (b). Les choix de cases effectués par ces 3 étudiants pour les énoncés conditionnels (a), (b), (c) et (d) laissent sous-entendre qu'ils ont interprété ceux-ci comme étant universellement quantifiés implicitement. Les justifications apportées à la case (a) vont dans ce sens puisque les étudiants y donnent un contre-exemple. Dès lors, cocher la case "vrai" pour l'implication (f) en suivant le choix de l'énoncé (b) apparaît un peu comme un coup de chance. En effet, l'énoncé (b), k pair $\Rightarrow k + 1$ impair, s'avère vrai pour toutes les instances obtenues en assignant à k une valeur naturelle. Ceci conduit à dire que sa clôture universelle est vraie. Puisque toutes les instances sont vraies, en particulier, l'instance obtenue en substituant 3 à k (on a donc 3 pair $\Rightarrow$ 4 impair) est une implication matérielle vraie. Nous disons que c'est un coup de chance car cette idée de copier les réponses du premier tableau proposé ne fonctionne pas avec l'implication (e), 3 pair $\Rightarrow$ 4 pair. En effet, (e) est une instance vraie de (a),

k pair $\Rightarrow k+1$ pair, dans laquelle k prend la valeur 3. Dès lors, recopier la réponse donnée en (a), à savoir “faux”, n'est pas correct. Les réponses que donnent ces trois étudiants en recopiant pour (e), (f), (g) et (h) le choix de case effectué en respectivement (a), (b), (c) et (d) quand ces quatre derniers énoncés sont interprétés comme universellement quantifiés implicitement n'est donc pas un raisonnement correct. En effet, cette explication conduit à choisir malgré soi la bonne case pour (f) mais pas celle pour (e). Nous estimons donc que le raisonnement donné par ces trois étudiants n'est pas correct.

Les explications apportées par les 8 derniers étudiants ayant choisi la case “vrai” sont soit absentes (3 fois) soit ne justifient pas la case cochée (5 fois).

Si nous regroupons les différents tableaux de réponses, nous recensons que 6 étudiants ont coché la case “faux” pour l'implication matérielle (f). Les raisons sont diverses :

- deux personnes remarquent que la prémisse “3 pair” est fausse et établissent qu'une prémisse fausse suffit à rendre faux l'implication correspondante. Ils utilisent donc la propriété-en-acte « *Si A est fausse alors “A implique B” est fausse* ».
- un étudiant voit que la conclusion “4 impair” est fausse et déclare que (f) est faux en utilisant le raisonnement « *Si B est fausse alors “A implique B” est fausse* »
- un étudiant affirme que (f) est faux car à la fois sa prémisse “3 pair” et sa conclusion “4 impair” sont fausses.

Enfin, deux derniers étudiants ne justifient pas leur choix de case “faux”.

Nous poursuivons en analysant les réponses des étudiants à notre second questionnaire consacré au cadre de travail ensembliste de l'implication.

8.3 Diffusion du second questionnaire

Nous avons distribué notre second questionnaire à 37 étudiants inscrits en première année de bachelier en sciences mathématiques, physiques et informatiques à l'Université de Mons. Ces étudiants sont les mêmes que ceux précédemment interrogés avec notre premier questionnaire. Plus précisément, nous avons diffusé notre formulaire auprès de respectivement 16, 7 et 14 étudiants de ces sections. Nous suivons le même découpage de travail que pour notre premier questionnaire. Nous dépouillons les copies des étudiants en dressant pour chaque question, un tableau des réponses majoritairement obtenues. Puisque les étudiants de ces différentes sections ont tous reçu le même enseignement sur l'implication, nous choisissons ici aussi de présenter ces réponses sans distinguer ces sections.

8.4 Réponses apportées par les étudiants au second questionnaire

Nous dépouillons et analysons les réponses des étudiants à notre formulaire dédié au cadre de travail ensembliste de l'implication. Nous avons présenté nos questions et quelques productions possibles des étudiants face à celles-ci à la section 5.2 du chapitre 5, page 112.

Question 1

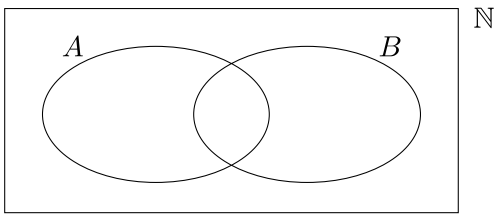
Cette question est divisée en trois parties et est accompagnée de l'introduction suivante :

Considérons les ensemble suivants :

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\} \text{ et } B = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

Un élément de A vérifie donc la propriété « *être un nombre naturel pair* ». Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel pair, alors il appartiendra à l'ensemble A.
De la même manière, un élément de B vérifie la propriété « *être un nombre naturel multiple de 3* ». Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel multiple de 3, alors il appartiendra à l'ensemble B.

On a représenté ci-dessous les ensembles A, B et $\mathbb{N}$.



L'énoncé de la première partie de cette question est le suivant :

(a) Considérons l'énoncé :

"si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair."

Dans le diagramme ci-avant, hachurez les différentes zones qui rendent vrai cet énoncé.

Nous dressons dans le tableau de la page 235, nos observations sur les différentes zones hachurées par les étudiants.

En regardant ce tableau, on découvre que la réponse majoritairement apportée par les étudiants est d'hachurer l'intersection des ensembles A et B. 84% des étudiants estiment que cette zone est la seule qui rend vrai l'énoncé proposé. Cette réponse largement dominante est partiellement correcte car elle ne prend en compte que le cas de la prémisse vraie pour les instances associées. Seuls 5 étudiants, soit 13%, considèrent en plus du cas de la prémisse vraie, celui de la prémisse fausse pour les instances associées. Cependant, uniquement deux personnes (soit 5%) nous donnent la réponse correcte à cette question en hachurant tout l'ensemble $\mathbb{N}$ à l'exception des éléments présents dans B sans appartenir à A. Trois étudiants (soit 8% des réponses) nous livrent une réponse partiellement correcte en noircissant uniquement l'ensemble A. Ils semblent ne pas tenir compte d'instances dont la prémisse et la conclusion sont toutes les deux fausses. Pourtant, une telle configuration rend vraie l'instance associée par définition d'une implication entre propositions. Tenir compte de cette configuration les aurait conduit à hachurer en plus de l'ensemble A, l'ensemble $\mathbb{N}\backslash(A \cup B)$ sur le schéma ensembliste proposé. Terminons notre analyse des réponses pour cette sous-question en signalant qu'un étudiant hachure tout l'ensemble B. Cette réponse est erronée car les éléments de $B\backslash A$ rendent faux les instances associées (cas d'une prémisse vraie et d'une conclusion fausse). Cet étudiant se rend compte de son erreur à la sous-question (c) mais ne corrige pas pour autant son hachurage en $A \cap B$ selon les explications apportées pour cette sous-question.

En résumé, pour cette question, seuls 2 étudiants sur 37 interrogés (soit 5% des réponses) nous donnent une réponse correcte en hachurant tout l'ensemble $\mathbb{N}$ excepté $B\backslash A$. 84% des étudiants interrogés (soit 31 personnes sur 37) donnent une réponse uniquement basée sur le cas d'une prémisse vraie pour les instances associées. En hachurant l'ensemble $A \cap B$, ces étudiants semblent réduire la vérité d'une implication matérielle ou ici d'une instance de l'énoncé proposé au seul cas où la prémisse et la conclusion sont vraies.

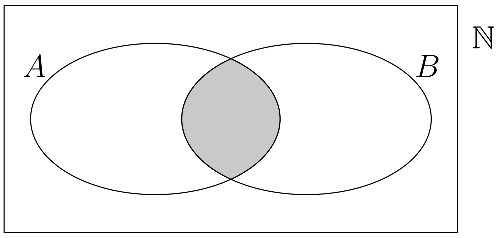
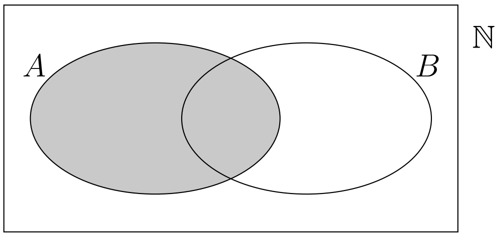
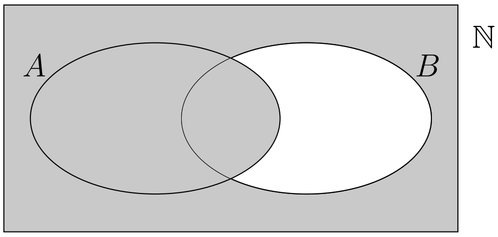
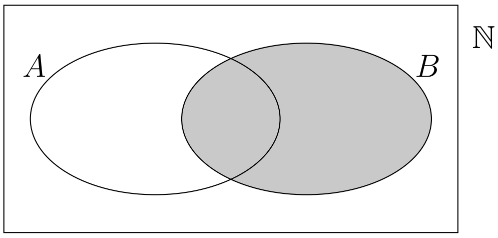
Poursuivons notre analyse de cette première question avec la seconde partie de celle-ci dont l'énoncé est le suivant :

(b) L'énoncé

"il existe un naturel x tel que si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir

Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Réponses des étudiants	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 37 interrogés)**
La zone hachurée correspond au graphe suivant : 	31
Les étudiants hachurent la zone suivante : 	3
La bonne réponse est donnée : 	2
La zone suivante est hachurée (mais l'étudiant contredit sa réponse avec la justification qu'il donne à la troisième partie de cette question) : 	1
Abstention	0

Nous avons relevé majoritairement les réponses suivantes :

Réponses des étudiants	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 37 interrogés)**
Coche la case "vrai" mais l'explication apportée n'est pas suffisante	19
Coche la case "vrai" et exhibe un élément pour prouver l'énoncé	17
Coche la case "faux"	1
Coche la case "on ne peut pas savoir"	0
Abstention	0

La clôture existentielle de l'énoncé "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est presque unanimement déclarée vraie par 97% des étudiants interrogés. Parmi les justifications apportées pour cette case relevons que 19 d'entre elles, soit 51% des explications pour ce choix de case, sont insuffisantes notamment parce qu'un élément précis n'est pas exhibé pour prouver l'énoncé, ce que font les 17 autres étudiants (soit 46%). Notons qu'une seule personne (3%) choisit la case "faux". Ce mauvais choix se traduit dans son explication par une interprétation du quantificateur "*il existe*" en "*pour tout*" puisque celui-ci donne le contre-exemple ≪ *prenons $x = 3$, 3 est multiple de 3 or il est impair, donc, c'est faux* ≫.
Les justifications apportées à la case "**vrai**" sont partagées :

– Près de 46% d'entre elles sont correctes puisque les étudiants donnent une valeur à la variable x et vérifie ensuite que l'instance associée est vraie. La totalité des 17 exemples donnés repose sur une valeur pair et multiple de 3 assignée à la variable x. La cas de la prémisse vraie est donc largement présent et dominant. En effet, aucun étudiant ne donne une valeur non multiple de 3 à x. La rédaction de la justification est correcte puisqu'ils commencent tous excepté un, celle-ci par "*prenons $x = \ldots$*". Signalons que dans tous les exemples donnés, les étudiants vérifient seulement que la prémisse et la conclusion de l'instance associée sont vraies. Ils ne justifient pas pourquoi cette instance est vraie. Le lecteur doit donc lui-même conclure à la vérité de cette instance en utilisant la définition d'une implication matérielle. Enfin, nous identifions dix personnes qui font également mention dans leurs explications de l'appartenance de l'élément exhibé à l'ensemble $A \cap B$.
– 19 justifications sont insuffisantes ou non pertinentes. Signalons que dans celles-ci, nous avons relevé :
  • 10 explications (soit 28%) dans lesquelles les étudiants affirment que ce sont tous les éléments de l'ensemble $A \cap B$ qui rendent

vrai l'énoncé proposé. Huit d'entre-eux ont notamment hachuré cet unique ensemble pour la question précédente. Nous relevons 7 fois la mention ≪ *ce sont les éléments de* $A \cap B$ ≫ et 3 fois celle ≪ *c'est vrai pour les naturels compris dans l'intersection de* A *et de* B ≫. Ces étudiants ne comprennent donc pas la signification du quantificateur "il existe" et le fait que pour prouver l'énoncé donné, il suffit de donner une seule valeur à la variable x, celle-ci devant rendre vraie l'implication ouverte "*si* x *est un naturel multiple de 3 alors* x *est un nombre pair*".

- 2 explications du même type que précédemment (soit un peu moins de 6%) mais avec la précision qu'≪ *en prenant un nombre de cet ensemble [i.e.* $A \cap B$*], l'énoncé est vrai* ≫. Ces deux candidats ne nous donnent pas pour autant un exemple.
- 3 étudiants (soit plus de 8%) affirment sans donner d'exemple, que l'on peut trouver au moins un x dans la zone hachurée. Cette zone est $A \cap B$ dans les trois cas.
- et enfin, 11% des étudiants interrogés (soit 4 personnes) ne justifient pas ce choix de case avec l'explication qu'ils fournissent et ne renvoient pas non plus à un autre choix.

En résumé, 97% des étudiants interrogés cochent la case "vrai" mais seulement 17 étudiants sur 37 (soit 47%) justifient correctement la clôture existentielle de "*si* x *est un naturel multiple de 3 alors* x *est un nombre pair*" en exhibant un élément pour x et en vérifiant ensuite la vérité de l'instance associée.

Terminons notre analyse de cette première question avec la troisième et dernière partie de celle-ci disant que :

(c) L'énoncé

"pour tout naturel x, si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Suite au dépouillement des réponses des 37 étudiants à cette question, nous dressons les constatations suivantes :

Réponses des étudiants	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 37 interrogés)**
Coche la case "faux" et donne un contre-exemple pour invalider l'énoncé	22
Ne justifie pas son choix "faux" avec l'explication apportée	10
Coche la case "faux" et fait allusion à l'absence d'une inclusion de B dans A	4
Coche la case "on ne peut pas savoir" sans apporter de justifications	1
Coche la case "vrai"	0
Abstention	0

97% des étudiants choisissent la case "faux", nous relevons au total 36 fois ce choix. Celui-ci est donc presque unanime puisque nous avons interrogés un total de 37 personnes. En effet, seul un individu noircit la case "on ne peut pas savoir" mais sans apporter d'explications. Détaillons les justifications fournies pour le choix de case "**faux**" :

- 59% des étudiants interrogés (soit 22 personnes) donnent un contre-exemple. Celui-ci prouve ainsi que la clôture universelle de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est fausse, un raisonnement correct et que nous attendions. La rédaction de ce contre-exemple est juste car tous prennent bien un élément multiple de 3 et non pair pour exprimer ce contre-exemple. L'ensemble $B \backslash A$ est d'ailleurs la seule zone qui rend fausses les instances associées en substituant une valeur à x. Trois étudiants sur 22 (soit 14%) font d'ailleurs explicitement allusion au fait que la valeur x choisie pour le contre-exemple doit appartenir à $B \backslash A$. Signalons que dans cette rédaction, 4 personnes, soit 18% des étudiants ayant donné un contre-exemple, ne commencent pas avec la mention "*prenons $x = \ldots$*". Ils indiquent directement que par exemple ≪ *9 est multiple de 3 et n'est pas pair* ≫. Notons également que parmi ces 22 rédactions, nous n'avons trouvé que 2 mentions du mot "*contre-exemple*".
- Quatre personnes (soit 11%) cochent la case "faux" sans donner de contre-exemple. Les justifications peuvent être mises en relation avec une absence d'inclusion entre les ensembles A et B. Nous relevons :
  - trois personnes pour qui ≪ *tous les éléments de l'ensemble B ne sont pas pairs et donc ne sont pas tous dans l'ensemble A* ≫ [aucun

exemple n'est donné]. Ceci sous-entend donc que les éléments qui sont dans B sans être dans A ne vérifient pas l'énoncé (a). Cette explication fait aussi référence au fait que $B \not\subset A$.

- un étudiant signale qu'« *on voit sur le diagramme* [il hachure $A \cap B$ à la sous-question (a)] *que tous les x n'appartiennent pas à la partie hachurée* ($B \not\subset A$). *Donc, certains x sont des naturels multiples de 3 et ne sont pas pairs* [ce qui fait référence à l'ensemble $B \backslash A$, notons qu'aucun exemple n'est donné par l'étudiant] ». Il déclare donc cette clôture universelle fausse car $B \not\subset A$.

Ces explications sont selon nous partiellement correctes. Nous estimons que celles-ci ne sont pas totalement abouties. Certes, nous y avons trouvé quelques liens avec la cadre ensembliste de l'implication et notamment le fait que cette clôture universelle ne peut pas être vraie car $B \not\subset A$. Cependant, nous aurions apprécié que ces étudiants nous donnent un exemple numérique prouvant cette absence d'inclusion. En effet, ceux-ci tiennent des propos comme « *tous les éléments de l'ensemble B [...] ne sont pas tous dans l'ensemble A* » ou « *certains x sont des naturels multiples de 3 et ne sont pas pairs* », mais n'en donnent pas au moins un exemple. Un tel exemple renvoyant évidemment à la notion de contre-exemple pour invalider une implication formelle.

– enfin, 10 étudiants (soit 27% des personnes interrogées) cochent la case "faux" mais nous jugeons les justifications apportées insuffisantes ou erronées. Signalons parmi celles-ci :

- 5 étudiants dont l'explication peut être classée dans la catégorie « *il existe au moins un naturel multiple de 3 non pair* ([avec 2 personnes précisant] *dans* $B \backslash A$) » mais aucun exemple n'est donné ;
- un étudiant proposent un contre-exemple erroné (il prend $x = 2$) ;
- une personne formulent la négation de l'énoncé (c) comme étant $\exists x \in A$ *tel que* $x \notin B$, ce qui est erroné. Il donne en réalité la négation de l'implication formelle "*pour tout naturel x, si x est un nombre pair alors x est un nombre multiple de 3*" qui est la réciproque de celle mentionnée dans notre question. Au passage, nous nous demandons si cet étudiant est capable de supprimer la quantification bornée utilisée et ainsi revenir à l'expression $\exists x, x \in A \wedge x \notin B$, obtenue en reprenant sa négation erronée. Nous n'étudions cependant pas la quantification bornée dans ce travail mais la compréhension de celle-ci en secondaire et plus particulièrement à l'université est une autre piste intéressante à développer. Pour plus d'informations sur ce phénomène de quan-

tification bornée, nous conseillons la lecture des travaux [8] et [9] de Durand-Guerrier.

En résumé, 97% des étudiants choisissent la case "faux" mais seulement 61% d'entre eux fournissent une justification correcte en donnant un contre-exemple juste pour invalider l'implication formelle proposée. Remarquons que 4 étudiants (soit 11%) déclarent cette dernière fausse car $B \not\subset A$.

Question 2

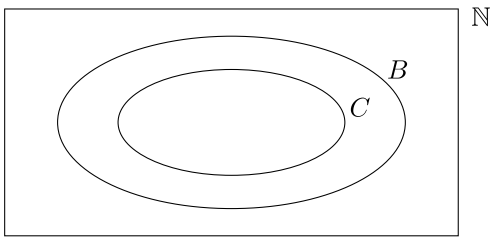
Cette question est divisée en 4 parties et est munie de l'introduction suivante :

Considérons les ensemble suivants :

$$B = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} \text{ et } C = \{0, 9, 18, 27, 36, \ldots\}$$

Un élément de B vérifie donc la propriété « *être un nombre naturel multiple de 3* ». Un élément de C vérifie la propriété « *être un nombre naturel multiple de 9* ». Réciproquement, si un nombre est un nombre naturel multiple de 9, alors il appartiendra à l'ensemble C.

On a représenté ci-dessous les ensembles B, C et $\mathbb{N}$.



L'énoncé de la première partie est le suivant :

(a) Considérons l'énoncé :

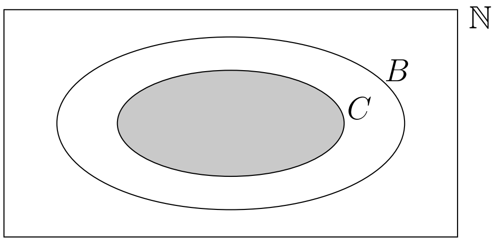
"si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

Dans le diagramme ci-dessus, hachurez les différentes zones qui rendent vrai cet énoncé.

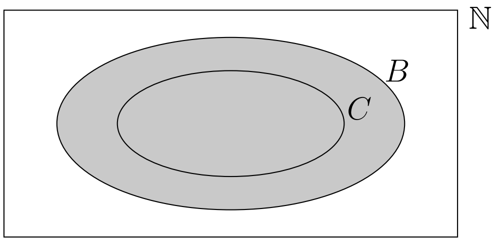
Nous listons les différentes zones que les étudiants ont majoritairement hachurées pour cette question dans le tableau de la page 242.

65% des étudiants interrogés n'hachurent que l'ensemble C. Cette réponse n'est pas totalement correcte car ils ne prennent apparemment en compte que le cas d'une prémisse vraie pour les instances associées grâce à x mais oublient le cas d'une prémisse fausse. En effet, pour exprimer cette réponse, ils donnent des valeurs à la variable x de sorte que les instances associées reposent uniquement sur une prémisse vraie. Ces valeurs sont les éléments de l'ensemble C. Ils cherchent ensuite à rendre la conclusion "*x est un nombre naturel multiple de 3*" vraie, ce sont justement les éléments de l'ensemble B qui vérifient celle-ci. Il s'ensuit alors que seuls les éléments de $B \cap C$ rendent vraies la prémisse et la conclusion de l'énoncé proposé. Les étudiants hachurent au final l'ensemble $B \cap C$ ou encore l'ensemble C puisque $C \subset B$. Sept étudiants soit 19% des réponses, estiment que tout l'ensemble B rend vrai l'énoncé proposé. Ils prennent en compte le cas d'une prémisse vraie et partiellement celui d'une prémisse fausse pour les instances associées à cet énoncé. En effet, en hachurant l'ensemble $B \backslash C$, ils considèrent les instances vraies dont la prémisse est fausse et la conclusion vraie. Ils omettent donc apparemment le cas d'une prémisse et d'une conclusion toutes les deux fausses qui rendent vraie par définition de l'implication matérielle, l'instance associée. Trois autres étudiants soit 8%, hachurent par contre correctement le schéma proposé en noircissant tout l'ensemble $\mathbb{N}$. En effet, suite à l'inclusion de C dans B, l'implication "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est vraie pour tous les éléments de l'ensemble de référence qui est ici, celui des naturels. Parmi tous les étudiants interrogés, seuls ces 8% nous donnent donc la bonne réponse et tiennent apparemment compte à la fois du cas d'une prémisse vraie et de celui d'une prémisse fausse.

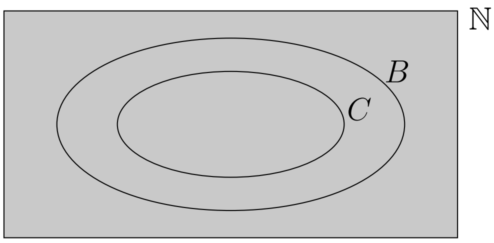
<table>
<tr><th>Réponses des étudiants</th><th>Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 37 interrogés)</th></tr>
<tr><td>La zone hachurée correspond au graphe suivant :



</td><td>24</td></tr>
<tr><td>Les étudiants hachurent la zone suivante :



</td><td>7</td></tr>
<tr><td>La bonne réponse est donnée :



</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Autres zones hachurées</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Réponse illisible</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Abstention</td><td>0</td></tr>
</table>

En résumé, pour cette question, uniquement 3 étudiants sur 37 interrogés (soit 8% des réponses) nous donnent une réponse correcte en hachurant tout l'ensemble $\mathbb{N}$. 65% des étudiants interrogés (soit 24 personnes sur 37) donnent quant à eux une réponse uniquement basée sur le cas d'une prémisse vraie pour les instances associées en hachurant l'ensemble C.

L'énoncé de la seconde partie de cette question est le suivant :

(b) L'énoncé

"il existe un nombre naturel x tel que si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Nous dressons dans le tableau suivant les cases choisies par les 37 étudiants interrogés.

Réponses des étudiants	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 37 interrogés)**
Coche la case "vrai" et exhibe un élément pour prouver l'énoncé	16
Coche la case "vrai" mais l'explication apportée n'est pas suffisante	16
La case "vrai" est choisie mais les justifications apportées sont dépourvues de sens ou incompréhensibles	5
Coche la case "faux"	0
Coche la case "on ne peut pas savoir"	0
Abstention	0

Tous les étudiants cochent la case "vrai". Cependant, les justifications majoritairement apportées pour ce choix, soit près de 57% de celles-ci, ne justifient pas la clôture existentielle de l'énoncé "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*". En effet, seuls 16 étudiants sur 37 apportent une justification correcte en exhibant un élément pour prouver l'énoncé.

Intéressons-nous à l'ensemble de ces justifications :

– 43% d'entre elles, soit 16 cas sur 37, sont correctes puisque dans celles-ci, les étudiants prennent une valeur pour la variable x et vérifient ensuite que celle-ci rend vraie l'instance associée. Ces seize étudiants optent tous pour une valeur vérifiant la prémisse et la conclusion de l'instance associée, c'est donc un élément de $B \cap C$ ou encore de l'ensemble C puisque $C \subset B$. Le cas de la prémisse vraie est donc ici aussi dominant dans ce choix. Signalons qu'ici aussi les étudiants vérifient la vérité de la prémisse et de la conclusion mais ne justifient pas pourquoi l'implication matérielle associée est vraie. C'est au lecteur de conclure sur cette vérité. En ce qui concerne la rédaction, notons que 5 étudiants sur 16, soit 31,25% de ceux-ci, n'écrivent pas explicitement "*prenons* $x = \ldots$". Ce choix est apparemment sous-entendu dans des explications comme par exemple ≪ *9 est multiple de 9 et 9 est multiple de 3* ≫. Enfin, deux personnes nous informent que la valeur prise pour x est dans l'ensemble C qu'ils ont hachuré à la sous-question précédente.

– 16 justifications (soit 43% des explications apportées) ne sont pas suffisantes, aucune valeur n'est d'ailleurs explicitement donnée à la variable x. Parmi celles-ci, 9 font néanmoins référence à l'inclusion de C dans B, mais le raisonnement donné n'est pas abouti. Nous identifions :
  - 5 sont peu intéressantes car affirment seulement que l'énoncé (b) est vrai ≪ *car* $C \subset B$ [sans plus d'explications] ≫ (cité 3 fois) ≪ *car si* $x \in C$ *alors* $x \in B$ *puisque* $C \subset B$ [ici aussi sans détails supplémentaires] ≫ (cité 2 fois et le quantificateur universel sous-entendu dans l'inclusion est absent dans l'expression donnée).
  - 4 étudiants constatent que ≪ *C est inclus à B, donc tous les nombres de C appartiennent à l'ensemble B. En particulier, il existe au moins un nombre qui est multiple de 9 et qui est en même temps multiple de 3* ≫ mais aucun exemple n'est donné. Notons qu'un de ces étudiants avait déclaré la question 1(c) fausse car B n'était pas inclus à A.

En résumé, tous les étudiants interrogés estiment que la clôture existentielle de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est vraie mais seulement 43% des étudiants (soit 16 personnes sur 37) justifient correctement cette clôture existentielle en exhibant un élément pour x et en vérifiant ensuite la vérité de l'instance associée.

La troisième partie de notre question s'énonce comme telle :

(c) L'énoncé

"pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Nous avons relevé majoritairement les réponses suivantes :

Réponses des étudiants	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 37 interrogés)**
Ne justifie pas son choix "vrai" avec l'explication apportée ou la justification apportée est peu pertinente	19 (dont 2 sans explications)
La case "vrai" est cochée	15
Abstention	2
La case "faux" est choisie	1
Coche la case "on ne peut pas savoir"	0

92% des étudiants (soit 34 personnes) cochent la case "vrai". En dépouillant les explications de ces personnes, nous constatons que nous devons exclure 54% des réponses faute de pertinence ou d'explications suffisantes voire absentes. Nous relevons par exemple 8 personnes (soit 22%) qui nous disent que l'énoncé proposé est vrai simplement avec la mention ≪ *car tous les multiples de 9 sont multiples de 3* ≫. Ils ne font là que répéter sous une forme langagière notre énoncé proposé sans en donner de preuve. Nous relevons 15 justifications (soit 38%) plus intéressantes pour cette case "**vraie**" toutes basées sur l'inclusion d'ensembles de C dans B :

- 7 étudiants répondent que ≪ *Comme $C \subset B$, tous les éléments appartenant à C appartiennent aussi à B. De là, tous les naturels multiples de 9 sont aussi multiples de 3. L'énoncé proposé est donc vrai* ≫. Signalons qu'une de ces personnes avait déclaré la clôture universelle de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" fausse car l'ensemble B des multiples de 3 n'était pas inclus dans A celui des nombres pairs.
- 6 autres explications sont malheureusement incomplètes puisqu'elles établissent juste la vérité de notre énoncé en affirmant ≪ *car $C \subset B$* ≫. Aucune explications supplémentaires ne nous sont données.
- 2 étudiants identifient que ≪ *$C \subset B$ donc $\forall x \in C, x \in B$. De là, tout naturel multiple de 9 est multiple de 3* ≫. Ces 2 étudiants définissent mathématiquement l'inclusion d'ensembles en faisant bien apparaître la quantificateur universel caché dans l'écriture ensembliste "$C \subset B$". Cette définition est exprimée sans faire apparaître explicitement le symbole "$\Rightarrow$", nous nous demandons si ces deux personnes sont conscientes que ce symbole est caché avec cette quantification bornée et s'il peuvent réécrire leur définition de l'inclusion comme telle : $\forall x, x \in C \Rightarrow x \in B$. Comme nous l'avons déjà mentionné il serait intéressant de vérifier si ce jeu de l'apparition/disparition de l'implication est disponible chez

les étudiants et même s'il est compris. Le phénomène de quantification bornée n'est pas traité dans notre travail mais le sujet reste ouvert et invite à de nouvelles activités et expérimentations didactiques. Nous invitons le lecteur intrigué par ce phénomène à consulter les travaux [8] et [9] de Durand-Guerrier.

En résumé pour cette question, la clôture universelle de l'énoncé conditionnel "*si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est très largement reconnue comme vraie (92%). Prouver cette clôture pose apparemment des problèmes aux étudiants puisque nous devons exclure 54% des justifications faute de pertinence. 15 étudiants (soit 38%) se basent sur l'inclusion d'ensembles de C dans B pour justifier leur choix de case "vrai" mais seulement 9 d'entre-eux nous donnent une explication intéressante dans laquelle ils font notamment apparaître le quantificateur universel (sous forme symbolique ou langagière) sous-jacent à l'inclusion de C dans B.

Enfin, terminons notre analyse en nous intéressant aux réponses proposées par les 37 étudiants interrogés à notre quatrième et dernière partie de cette question dont l'énoncé est le suivant :

(d) Pouvez-vous établir un lien entre l'énoncé

"pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3."

et le fait que C soit inclus dans B ?
Expliquez votre réponse.

Voici un tableau illustrant les réponses majoritaires formulées par les étudiants à propos de l'existence de ce lien :

Réponses des étudiants	**Nombre d'étudiants dans ce cas (sur 37 interrogés)**
Réponse non pertinente ou incomplète (aucun oui ou non n'est d'ailleurs formulé)	14
Répond "oui"	20
Abstention	3

54% des étudiants mentionnent qu'il existe un lien entre l'énoncé donné et l'inclusion d'ensembles de C dans B. 14 étudiants (soit 36%) donnent quant à eux une réponse incomplète ou dépourvue de sens dans laquelle ils n'expriment notamment pas l'existence ou non d'un lien. Signalons notamment

le cas de deux étudiants qui définissent de façon erroné l'inclusion de C dans B dans leurs copies : ≪ *$C \subset B$ [signifie que] $\forall x \in C \Rightarrow x \in B$* ≫ sans apporter plus d'explications. Ces deux étudiants semblent mélanger l'écriture $\forall x, x \in C \Rightarrow x \in B$ avec celle $\forall x \in C, x \in B$. Cette erreur renvoie au phénomène de quantification bornée et aux difficultés qui y sont liées dans le jeu de l'apparition et de la disparition de l'implication.
Détaillons les justifications pertinentes apportées à la case "**oui**" :

– 17 étudiants (soit 38%) partent de l'inclusion de C dans B pour ensuite établir la vérité de l'énoncé proposé :
  - ≪ *Puisque $C \subset B$, tous les éléments appartenant à C appartiennent aussi à B. De là, tous les naturels multiples de 9 sont aussi multiples de 3. L'énoncé proposé est donc vrai* ≫ (recensé 11 fois). Signalons qu'un de ces étudiants avait déclaré la clôture universelle de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" fausse car l'ensemble B des multiples de 3 n'était pas inclus dans A celui des nombres pairs.
  - ≪ *On a $C \subset B$ c'est-à-dire $\forall x, x \in C \Rightarrow x \in B$ avec B l'ensemble des nombres naturels multiples de 3 et C celui des naturels multiples de 9. De là, on peut écrire $\forall x, x$ multiple de 9 $\Rightarrow$ x multiple de 3 . L'énoncé [donné] est donc vrai* ≫ (explication relevée 4 fois).
  - ≪ *C est inclus dans B i. e. quand on est dans C, on est dans B* [le quantificateur universel caché dans l'expression de l'inclusion, n'apparaît pas ici dans l'explication de l'étudiant] *Donc, tous les multiples de 9 sont des multiples de 3* [notons ici l'apparition implicite d'un quantificateur universel] ≫ (cité 2 fois). Face à cette explication, nous pensons que ces deux étudiants ne sont pas conscients de l'existence d'un quantificateur universel caché dans la définition d'une inclusion d'ensembles et il nous semble que ce quantificateur réapparaît ensuite pour coïncider avec l'énoncé donné.

– 3 étudiants (soit 8%) partent de la vérité de l'énoncé donné en nous renvoyant à la démonstration de la question précédente (aucun n'a cependant apporté une justification pertinente à cette question) pour ensuite obtenir que C est bien inclus à B ≪ *Tous les multiples de 9 sont multiples de 3 (c'est vrai par la question précédente). Donc, tous les éléments de C peuvent s'écrire comme des éléments de B* [1 étudiant le prouve correctement avec les définitions de multiple de 9 et de multiple de 3] *Donc, tous les éléments de C appartiennent à B. Donc, $C \subset B$* ≫

Nous réalisons au chapitre suivant un bilan des connaissances des étudiants sur la notion d'implication.

Chapitre 9

Bilan des connaissances des étudiants sur la notion d'implication

Dans ce chapitre, nous réalisons un bilan des connaissances et des conceptions d'étudiants universitaires sur l'implication. Celles-ci sont mises en évidence par notre expérimentation auprès des étudiants en première année de bachelier en sciences mathématiques, physiques et informatiques à l'Université de Mons. Nous avons analysé les réponses des étudiants à nos deux questionnaires au chapitre précédent. Nous choisissons de suivre le même découpage que le bilan proposé au chapitre 7 sur les connaissances des élèves du secondaire.

9.1 Cadres de travail majoritairement mobilisés

Nous avons vu, au chapitre 2, que l'implication peut être travaillée dans trois cadres de travail à savoir le cadre de la logique formelle, le cadre ensembliste et celui du raisonnement déductif. Nous analysons donc ici les connaissances des étudiants dans ces différents cadres.

9.1.1 Le cadre de la logique

Les étudiants interrogés ont reçu un enseignement explicite et décontextualisé de l'expression "*si... alors...*" dans le cours de Mathématiques élémentaires. Dans celui-ci, l'enseignant fait vivre l'implication sous sa dimension objet puisqu'il dresse notamment via la logique des propositions la table de vérité de l'implication matérielle "*si* P *alors* Q" où P et Q sont deux propositions. Il établit l'équivalence entre cette implication et la disjonction $\neg P \vee Q$ qui contribue elle aussi à faire vivre l'implication sous sa dimension objet. Il démontre également l'équivalence entre cette implication et sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Nous estimons que ce cadre est le plus sollicité dans ce cours dispensé aux étudiants. Nous nous posons alors la question suivante : quels sont les acquis des étudiants relatifs à l'étude explicite de l'expression "*si* P *alors* Q" ? ou dit autrement, quelles connaissances les étudiants ont-ils retenues de cette étude décontextualisée d'une implication ?

Suite à notre expérimentation, nous relevons les constatations suivantes relatives au cadre logique :

– Lorsque nous demandons aux étudiants ce que signifie selon eux l'expression "*si* P *alors* Q", nous constatons que peu de références au cadre logique de l'implication apparaissent. En effet, seuls quatre étudiants (soit 10% du public interrogé) mentionnent la table de vérité de cette expression logique. Trois d'entre eux la dressent sans erreur et le quatrième étudiant nous signale qu'on peut le représenter mais sans toutefois le faire. Cette réponse donnée par 4 étudiants contribue donc à faire vivre l'implication sous sa dimension objet puisque cette notion est ici définie en dehors de tout contexte. Cette réponse contribue aussi à faire vivre le caractère "vrai" et le caractère "faux" d'une implication. En effet, toujours dans cette même question, nous relevons pour 7 étudiants (soit 18% des réponses) que l'expression "*si* P *alors* Q" est toujours vraie. 5 d'entre eux (soit 13% des 39 personnes interrogées) précisent cette vérité en donnant une explication formulée en français détaillant les trois cas où les valeurs de vérité de P et Q rendent vraie cette expression : P vrai et Q vrai, P faux et Q vrai et enfin P faux et Q faux. Ces étudiants font donc partiellement référence à la table de vérité de l'implication. Ces étudiants ne font pas pour autant vivre l'implication comme un objet puisqu'ils restreignent l'implication à sa valeur de vérité "vrai".
– Lorsque nous demandons aux étudiants de donner des expressions signifiant la même chose que "*si* P *alors* Q", 10 personnes (soit 26%) nous donnent l'expression $\neg P \vee Q$. Remarquons que cette disjonction peut être utilisée comme un outil pour statuer sur la vérité d'une implication matérielle. En effet, un étudiant utilise cette disjonction pour fournir correctement la vérité des implications "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*" et "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*". La proposition $\neg P \vee Q$ où P et Q sont deux propositions est donc un outil que nous pouvons qualifier de disponible chez cet étudiant.

– Nous remarquons à divers moments ciblés de nos questionnaires, l'apparition de la table de vérité de l'implication matérielle "*si P alors Q*" comme outil pour raisonner et notamment pour identifier les différentes valeurs de vérité de P et Q qui rendent vraie ou fausse cette implication. Listons ces quelques passages où les étudiants utilisent cet outil :
  - dans notre question pour tester le raisonnement par contraposition (cf. question 2(b)) de notre premier questionnaire), 4 tables de vérité sont dressées pour aider à établir que la conclusion déduites des deux affirmations données est correcte ;
  - dans notre question "Back to the future" basée sur une conception fausse de la contraposée (cf. question 2(c)), deux étudiants dressent la table de vérité de l'implication entre propositions afin de répondre correctement à notre question et identifier que la conclusion établies à partir des deux affirmations données est erronée ;
  - pour statuer sur la vérité des implications "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*" et "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*", 5 étudiants représentent la table de vérité de ce connecteur propositionnel qui leur permet ainsi d'identifier correctement la valeur de vérité vraie de ces deux implications.

La table de vérité de "*si P alors Q*" apparaît visiblement sous la double dimension outil/objet chez certains étudiants. En effet, 3 étudiants dressent cette table de vérité lorsque nous leur demandons quelle signification ils associent à l'expression "*si P alors Q*" et en définissant cette expression explicitement, la table de vérité apparaît comme un objet du savoir et contribue ainsi à faire vivre l'implication elle-même comme un objet. Parmi ces trois étudiants, deux dressent de nouveau cette table de vérité dans diverses questions comme mentionné ci-dessus pour ensuite l'utiliser cette fois-ci comme un outil pour s'aider à statuer sur la vérité d'un énoncé conditionnel par exemple.

Le cadre logique de l'implication est donc selon nous présent au niveau des connaissances de certains étudiants même si ceux-ci ne privilégient pas par exemple la reproduction de la table de vérité d'une implication matérielle quand nous leur demandons quelle signification ils associent à l'expression "*si P alors Q*".

9.1.2 Le cadre ensembliste

Nous consacrons un questionnaire à l'étude des connaissances des étudiants sur ce cadre de travail ensembliste de l'implication. Nous voulons savoir via celui-ci si les élèves établissent un lien entre une implication du type $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ et une inclusion d'ensembles. En particulier, nous désirons nous concentrer sur les diagrammes de Venn des figures 9.1 et 9.2 et voir à quelle configuration les étudiants associent une implication vraie pour tous les éléments de l'ensemble de référence.

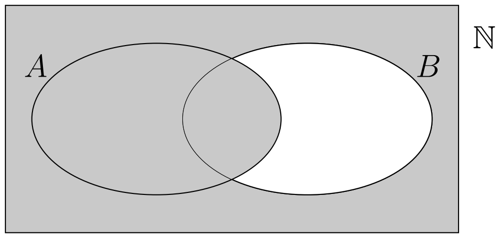


FIGURE 9.1 – Cas où l'implication entre énoncés contingents $\mathrm{B}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x)$ est fausse pour les éléments x qui sont dans B sans être dans A.

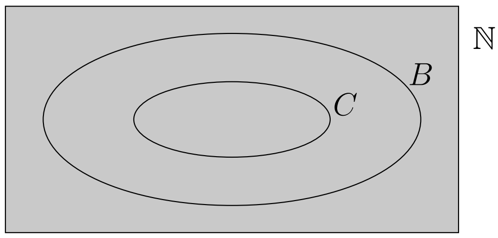


FIGURE 9.2 – Cas où l'implication entre énoncés contingents $\mathrm{C}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ est vraie pour tous les éléments x de $\mathbb{N}$.

Nous avons demandé aux étudiants d'hachurer pour chaque diagramme les ensembles ou les zones qui selon eux rendent vrai l'énoncé conditionnel respectivement associé. L'enjeu de vérité mis en avant avec cette question est que les étudiants doivent identifier dans chacun des cas les éléments x qui rendent vrai l'énoncé conditionnel associé de la forme $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$. Nous reviendrons sur cette tâche liée aux différents cas qui rendent vraie une instance associée de cet énoncé $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ dans la partie 9.4 de ce chapitre.

Dans notre questionnaire ensembliste, nous traitons également des quantificateurs universels et existentiels. Plus précisément, nous demandons aux étudiants de se prononcer sur la clôture existentielle et celle universelle des énoncés conditionnels de la forme "*si* $\mathrm{P}(x)$ *alors* $\mathrm{Q}(x)$" associé à chaque schéma ensembliste.

Bien que la grande majorité des étudiants se prononce correctement face aux différentes clôtures proposées, ceux-ci ne donnent pas toujours des explications correctes et rigoureuses pour prouver ces clôtures. Nous relevons notamment quelques erreurs localisées dues à un manque de compréhension du quantificateur "*il existe*". Signalons par exemple que 27% des étudiants affirment que tous les éléments de l'ensemble $A \cap B$ vérifient la clôture existentielle de l'énoncé "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" où A est l'ensemble des nombres pairs et B celui des naturels multiples de 3, mais ils n'exhibent pas d'éléments de cet ensemble.

Résumons les bonnes réponses apportées par les étudiants face à ces différentes clôtures :

- La clôture existentielle de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est identifiée comme vraie par 97% du public interrogé mais elle n'est correctement justifiée que dans 47% des copies. Les étudiants donnent une valeur à la variable x et vérifient ensuite que l'instance associée est vraie. Ils prennent tous un candidat pour x multiple de 3 et pair. Le cas d'une prémisse vraie est omniprésent dans ces 47% puisque tous les étudiants exhibent un élément x vérifiant la propriété "*être multiple de 3*". Uniquement dix personnes (soit 27%) font le lien avec les ensembles proposés puisqu'ils précisent que la valeur de x choisie appartient à $A \cap B$.
- La clôture universelle de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*" est reconnue fausse par 97% des étudiants. Parmi les justifications apportées que nous pouvons exploiter, nous relevons que :
  - 22 étudiants (soit 59% du public interrogé) donnent un contre-exemple correct pour invalider cette clôture. Nous identifions pour chaque contre-exemple que les élèves prennent bien un élément multiple de 3 (appartenant donc à B) et non pair (n'appartenant donc pas à A). Nous remarquons que l'aspect ensembliste associé à notre question est mis de côté puisqu'uniquement 3 personnes sur 22 mentionnent explicitement que l'élément x à la base du contre-exemple appartient à $B \backslash A$.
  - 4 étudiants (soit 11%) reconnaissent cette clôture comme fausse puisqu'il n'y a pas d'inclusion entre les ensembles A et B.
- La clôture existentielle de "*si x est un naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est reconnue vraie par tous les étudiants interrogés mais seulement 43% la justifient correctement en exhibant un élément. La valeur choisie est toujours un multiple de 9 et elle vérifie par conséquent la prémisse et la conclusion de l'instance associée. Le cas de la prémisse vraie est donc ici aussi omniprésent. De nouveau, peu d'étudiants font un lien avec les ensembles et le diagramme de Venn proposé puisque seules deux personnes identifient ex-

plicitement que la valeur de l'élément x choisi appartient à C.

– Enfin, la clôture universelle de "*si x est un naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" est reconnue vraie par 92% mais les justifications apportées ne sont pas toujours pertinentes. Nous relevons que 15 étudiants (soit 38% du public interrogé) justifient leur choix via une explication basée sur l'inclusion de C dans B.

Le premier constat apparaissant avec ces clôtures est qu'au final les étudiants font peu de références à nos deux schémas ensemblistes et que très peu utilisent le cadre ensembliste pour statuer sur la vérité des clôtures existentielles et universelles des énoncés conditionnels proposés. Les étudiants préfèrent se concentrer sur ces clôtures sans véritablement se raccrocher à nos schémas ensemblistes mais bien plus sur la nature des ensembles considérés et en particulier sur les nombres naturels présents dans ces différents ensembles.

Notre second constat est que 4 étudiants (soit 11% des 37 personnes interrogées) reconnaissent comme fausse la clôture universelle de l'énoncé conditionnel associé à la figure 9.1 puisqu'il n'y existe pas d'inclusion entre les ensembles A et B donnés. Tandis que pour la figure 9.2, 15 étudiants (soit 40%) identifient comme vraie la clôture universelle de l'énoncé conditionnel associé car cette fois-ci, il existe une inclusion entre les ensembles B et C donnés. En dépouillant nos questionnaires, nous constatons qu'un seul étudiant justifie la clôture universelle des deux énoncés conditionnels donnés en utilisant comme argument dans ses justifications l'absence ou respectivement l'existence d'une inclusion entre les ensembles donnés. Cet étudiant semble donc concevoir qu'une implication de la forme $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble de référence si et seulement si il existe une inclusion de l'ensemble P dans l'ensemble Q. Signalons que P représente l'ensemble des éléments x vérifiant la propriété P et respectivement Q l'ensemble des éléments x vérifiant la propriété Q. Nous ne pouvons malheureusement pas conclure que les autres étudiants ayant respectivement déclaré vraie et fausse les clôtures universelles des énoncés conditionnels associés à nos diagrammes de Venn, disposent de cette même conception à propos de la notion d'implication dans le cadre ensembliste. En effet, ces étudiants justifient une des deux clôtures universelles proposées en faisant une référence à la présence ou l'absence d'une inclusion entre les ensembles envisagés mais n'utilisent plus le cadre ensembliste pour justifier leur position par rapport à l'autre clôture universelle. C'est précisément dans un tel cas que notre questionnaire ensembliste montre ses limites. Les étudiants ne jugent pas nécessaires de répondre à ces deux clôtures universelles en se basant sur les schémas ensemblistes donnés, ils préfèrent se concentrer sur le registre numérique lié aux éléments naturels des ensembles A, B et C.

Dans notre questionnaire ensembliste, nous demandons explicitement aux étudiants s'ils peuvent dégager un lien entre l'implication formelle "*pour tout nombre naturel x, si x est un nombre naturel multiple de 9 alors x est un nombre naturel multiple de 3*" et l'inclusion d'ensembles proposée $C \subset B$ où B est l'ensemble des naturels multiples de 3 et C celui des naturels multiples de 9. De notre dépouillement des questionnaires, nous relevons :

- 17 étudiants (soit 38% du public interrogé) qui partent de l'inclusion de l'ensemble C dans B pour ensuite établir la vérité de l'implication formelle proposée. Leurs justifications mettent en avant le fait que l'implication formelle proposée est vraie puisque C est inclus dans B.
- 4 personnes (soit 8% du public) partent quant à elles de la vérité de l'implication formelle donnée et théoriquement démontrée par la question précédente du questionnaire (signalons qu'aucun de ces étudiants n'a apporté de justification pertinente à cette précédente question) pour démontrer que l'ensemble C est inclus dans l'ensemble B.
- Personne n'établit avec cette question un lien entre la valeur de vérité des clôtures universelles des énoncés conditionnels proposés et les diagrammes de Venn respectivement associés à chacun de ces énoncés. Cette absence ne peut être imputée aux étudiants mais bien à notre propre personne puisque cette question était semble-t-il mal formulée par rapport à nos attentes. Comme nous l'avons déjà dit, notre questionnaire ensembliste montre ses limites et ne nous permet pas vraiment de saisir toute l'étendue, encore faut-il que celle-ci soit bien présente, des connaissances des étudiants sur la notion d'implication dans le cadre ensembliste.

Remarquons néanmoins que nos questions relatives aux clôtures universelles des énoncés conditionnels respectivement associés à nos diagrammes de Venn a permis de mettre en évidence la conception d'un étudiant : il semble apparemment établir une équivalence entre une implication vraie et une inclusion d'ensembles ou dit autrement à considérer apparemment que tous les éléments x d'un ensemble de référence rendent vraie l'implication $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ si et seulement si l'ensemble P est inclus à l'ensemble Q.

Bien que notre questionnaire ensembliste ait des limites, celui-ci montre néanmoins que le cadre ensembliste n'est pas absent des connaissances de certains étudiants sur la notion d'implication. Malheureusement, notre formulaire ne nous permet pas d'exprimer les connaissances liées à ce cadre pour une grande majorité des étudiants. Une piste à envisager afin de mieux cerner les réelles connaissances présentes chez les étudiants serait de créer un questionnaire où le cadre ensembliste apparaît comme une outil nécessaire pour y répondre.

9.1.3 Le cadre du raisonnement déductif

Nous avons identifié dans notre chapitre 2 la présence de deux règles de raisonnement dans le cadre de travail du raisonnement déductif de l'implication : celle du *Modus Ponens* et celle du *Modus Tollens*. Ces deux règles sont présentes dans le cours de Mathématiques élémentaires. Nous nous demandons donc si ces deux types de raisonnements à partir de l'implication sont disponibles chez les étudiants.

Nous testons dans un premier temps la présence du raisonnement par contraposition aussi appelé règle du *Modus Tollens*. Nous avons créé la question 2(b) de notre premier questionnaire dans ce but précis. Nous constatons que 23 étudiants (soit 59% du public) reconnaissent ce raisonnement par contraposition en y apportant une justification. Dans celle-ci, 11 personnes (28%) reconnaissent que la contraposée de $X \Rightarrow Y$ est $\neg Y \Rightarrow \neg X$ et qu'il existe une équivalence entre ces deux propositions. Les explications peuvent notamment manquer de rigueur comme pour 7 d'entre elles, où aucune équivalence n'est explicitement mentionnée entre l'implication ≪ *si la propriété X est vérifiée alors la propriété Y est vérifiée* ≫ donnée en première affirmation et sa contraposée. Ces personnes se servent pourtant de cette équivalence pour établir que le raisonnement proposé est correct. Via cette question, nous pouvons donc dire que le raisonnement par contraposition est reconnu par une grande majorité du public.

Nous avons également étudié auprès des étudiants une version erronée de ce raisonnement par contraposition pour lequel nous nous sommes basé sur la conception incorrecte suivante à propos de la contraposée d'une implication matérielle : $\neg A \Rightarrow \neg B$ est équivalent à $A \Rightarrow B$, où A et B sont deux propositions. Face à ce raisonnement erroné, 57% du public (soit 22 étudiants) estiment que celui-ci n'est justement pas correct en cochant la case "fausse" mais uniquement 14 personnes (soit 36% du public) justifient convenablement ce choix de case. À l'inverse, nous relevons que pour 5 étudiants (soit 13%) le raisonnement établi est juste et ceux-ci identifient précisément dans leurs justifications que la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\neg A \Rightarrow \neg B$.

Nous pouvons donc conclure que le raisonnement par contraposition est reconnu dans notre expérimentation à hauteur de 59% par les étudiants universitaires et que la formulation erronée $\neg A \Rightarrow \neg B$ de la contraposée de l'implication $A \Rightarrow B$ n'est partagée que par une faible partie du public interrogé (13%).

Via ces deux questions, nous remarquons que la contraposée de l'implication $A \Rightarrow B$ est reconnue par 28% des étudiants comme étant l'expression $\neg B \Rightarrow \neg A$. Ils estiment d'ailleurs que ces deux propositions sont équivalentes. Ils ne sont pourtant que 20% (soit 8 personnes) à donner cette expression comme ayant la même signification que "*si A alors B*" dans une question précédente. Les 8 expressions relevées dans celle-ci se partagent entre 4 notations symboliques $\neg B \Rightarrow \neg A$ et 4 langagières "*si non Q alors non P*".

La notion de contraposée d'une implication a été enseignée et formulée au cours de Mathématiques élémentaires. Elle peut donc a priori être disponible auprès des étudiants. Notre expérimentation révèle que cette notion n'est jamais utilisée comme outil pour répondre de la vérité de l'implication matérielle "*3 pair ⇒ 4 impair*". Signalons qu'en utilisant cet outil, on retombe sur la proposition "*4 pair ⇒ 3 impair*" permettant ainsi d'éliminer le cas de la prémisse fausse. Visiblement, bien que connue par 28% des étudiants, la contraposée n'apparaît pas dans les réponses des étudiants à nos questionnaires comme un outil disponible pour répondre de la vérité d'une implication matérielle.

En ce qui concerne la règle du *Modus Ponens*, celle-ci n'apparaît pas explicitement dans les significations que les étudiants peuvent donner ou associer à l'expression "*si P alors Q*". Dans cette règle, la vérité de "*si P alors Q*" associée à celle de P ne conduit à prendre en compte que le cas "*si P est vrai alors Q est vrai*". Ceci peut amener certaines personnes à réduire la vérité de l'expression "*si P alors Q*" à ce seul cas. Nous retrouvons d'ailleurs ce cas plébiscité par 54% des étudiants (un chiffre assez conséquent) comme étant la signification selon eux de "*si P alors Q*", et ce, sans que nous ayons associé la valeur de vérité "vrai" à cette expression "*si P alors Q*" dans l'énoncé de notre question.

Nous nous posons la question suivante : qu'en est-il de la disponibilité de la règle du *Modus Ponens* auprès des étudiants ? Pour répondre à celle-ci nous nous raccrochons aux réponses du public interrogé et nous relevons que :

- dans notre question portant sur le raisonnement par contraposition, 23 étudiants utilisent la règle du *Modus Ponens* à partir des propositions "*si la propriété Y n'est pas vérifiée alors la propriété X n'est pas vérifiée*" et "*la propriété Y n'est pas vérifiée*" pour déduire que "*la propriété X n'est pas vérifiée*". La règle du *Modus Ponens* paraît donc disponible via cet exercice. Signalons que dans les copies, aucun étudiant ne nous explique la réflexion menée pour obtenir la déduction de ce raisonnement. Il est apparemment laissé au lecteur le soin de deviner l'utilisation de cette règle. Est-ce lié à une utilisation fréquente de cette règle notamment dans des preuves ou exercices ? En effet, une fois qu'un résultat théorique sous forme conditionnelle a été démontré et a donc acquis son statut de vérité, il suffit de vérifier que son/ses hypothèse(s) est/sont vraie(s) pour ensuite en déduire directement la conclusion de ce résultat. Cette technique est une pratique mathématique très courante.

- dans notre question basée sur une conception erronée de la contraposée, 5 étudiants identifient justement la contraposée de l'implication $A \Rightarrow B$ donnée en première affirmation comme étant l'expression incorrecte $\neg A \Rightarrow \neg B$. De cette expression et de la seconde affirmation que nous schématisons par la proposition $\neg A$, les étudiants établissent alors que la conclusion $\neg B$ est vraie en utilisant le raisonnement du *Modus Ponens*. Ici aussi, nous pouvons dire que la règle du *Modus Ponens* est disponible dans les connaissances de ces étudiants même si ceux-ci ne mentionnent pas ou ne justifient pas son utilisation. Comme pour l'exemple précédent, il revient au lecteur de deviner l'utilisation de cette règle.

En conclusion, nous pouvons dire des connaissances des étudiants sur la notion d'implication que le cadre du raisonnement déductif y est bien présent. La règle du *Modus Tollens* mentionnée dans une question de nos formulaires est reconnue comme correcte par les étudiants à hauteur de 59%. Nous ne pouvons malheureusement pas dire, suite à notre expérimentation, si cette règle est disponible auprès des étudiants pour être utilisée dans un raisonnement. Par contre, la notion de contraposée qui est étroitement liée à ce raisonnement peut selon nous être qualifiée de non disponible auprès des étudiants ou du moins nous pouvons l'affirmer dans notre expérimentation. En effet, personne ne l'utilise pour statuer sur la vérité de l'implication matérielle "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*". Cette notion est pourtant connue des étudiants puisque nous avons relevé que 28% du public interrogé expriment correctement sa formulation mathématique. La règle du *Modus Ponens* est quant à elle disponible auprès des connaissances des étudiants et ceux-ci ne jugent apparemment pas nécessaire de l'expliquer quand ils y ont recours.

9.1.4 Quels sont les cadres de travail majoritairement mobilisés ?

Dans notre questionnement sur l'implication présenté au chapitre 3, nous avons soulevé la question suivante :

> Quels sont les cadres de travail majoritairement mobilisés dans les connaissances et les conceptions que des étudiants peuvent

avoir sur l'implication ?

Avant de mener notre expérimentation auprès des étudiants, nous pensions que suite à nos analyse de l'enseignement reçu sur l'expression "*si... alors...*" dans le cours de Mathématiques élémentaires, le cadre logique serait probablement le plus mobilisé auprès de ceux-ci. Après dépouillement des réponses à nos questionnaires, il nous paraît en effet que ce cadre est légèrement plus mobilisé que les deux autres mais les réponses des étudiants sont parfois apparues très différentes de nos attentes. Citons l'exemple marquant suivant : uniquement 8% du public interrogé dresse la table de vérité d'une implication entre propositions lorsque nous demandons quelle signification ils associent à l'expression "*si P alors Q*". Les étudiants donnent en majorité une réponse liée à la valeur de vérité vraie de cette expression : 54% affirment que "*si P alors Q*" signifie que "*si P est vraie alors Q est vraie*" et 18% que cette expression est toujours vraie. L'enseignement que les étudiants ont reçu tend pourtant à faire vivre par exemple via la table de vérité d'une implication matérielle, les valeurs de vérité vraie et fausse que l'on peut associer à cette expression. Le cadre logique nous paraît le plus mobilisé par la grande majorité des étudiants mais les connaissances des étudiants associées à celui-ci ne sont pas toujours celles que nous attendions et imaginions recevoir le plus de suffrage de la part du public.

9.2 Influence de la logique naturelle sur les connaissances associées à une implication

Notre bilan des connaissances des élèves sur la notion d'implication présenté au chapitre 7 nous a révélé que bien que certains élèves avaient suivi un cours sur la logique des propositions en y dressant notamment la table de vérité d'une implication matérielle, ce cours n'avait pas suffi à faire disparaître des conceptions langagières attachées à cette notion. Nous avons notamment constaté que la conception de causalité reste très présente malgré l'étude explicite de l'expression "*si... alors...*" que ces élèves ont reçu. En effet, bien que nous n'ayons interrogé que 15 élèves ayant suivi un cours sur la logique des propositions, notre expérimentation montre que 60% de ces personnes ont recours à la conception de causalité et plus précisément à l'existence d'un lien explicatif entre prémisse et conclusion pour statuer sur la vérité d'un énoncé conditionnel. Nous nous demandons dès lors si ce constat est également présent auprès d'étudiants universitaires. L'objet de cette section est aussi plus général puisque nous voulons savoir si la logique naturelle influence les connaissances et conceptions des étudiants sur la notion d'implication.

9.2.1 Quelle signification selon les étudiants pour "*si P alors Q*" à partir du langage naturel ?

Nous avons demandé à la question 1 de notre premier questionnaire quelle signification les étudiants donnent-ils à l'expression "*si P alors Q*" où P et Q sont deux propositions. Notre dépouillement des réponses révèle que ceux-ci donnent très peu d'expressions langagières. Sur un total de 47 significations données, nous ne relevons que deux expressions (soit 4%) liées au langage. Celles-ci, "*Q dépend de P*" et "*Q est la conséquence de P*" renvoient toutes les deux à la conception de causalité ≪ *"A implique B" n'a de sens que si A et B ont un lien de cause à effet* ≫. Les conceptions langagières sont donc peu présentes dans les significations que donnent les étudiants de l'expression "*si P alors Q*". On peut alors tout naturellement se demander quelle signification les étudiants apportent-ils majoritairement à cette expression ?

Il s'avère que les étudiants mentionnent à hauteur de 54% que "*si P alors Q*" signifie "*si P est vraie alors Q est vraie*". Cette signification est attachée à la valeur de vérité "vrai" de "*si P alors Q*". Les étudiants semblent donc retenir majoritairement que "*si P alors Q*" est vraie et que la vérité de cette expression se réduit à la forme "*si P est vraie alors Q est vraie*". Notons d'ailleurs que 7 autres personnes (soit 15%) identifient que l'expression "*si P alors Q*" est toujours vraie.

9.2.2 Quelles expressions équivalentes les élèves associent-ils à "*si P alors Q*" à partir du langage naturel ?

Contrairement aux élèves du secondaire, les étudiants universitaires donnent très peu d'expressions équivalentes à "*si P alors Q*" à partir du langage naturel. Nous relevons uniquement le cas d'un étudiant (soit un peu moins de 3% du public interrogé) qui nous dit que ≪ *si P se réalise alors Q aussi* ≫. Cette expression peut selon nous renvoyer à la conception de temporalité stipulant que ≪ *dans "$A \Rightarrow B$", A doit être vérifié avant B et A se situe dans le temps avant B* ≫.

L'expression majoritairement donnée par les étudiants (38%) repose sur une écriture symbolique : $P \Rightarrow Q$. Nous relevons également que 55% des expressions données reposent sur une équivalence logique entre ces expressions et "*si P alors Q*". Parmi les bonnes expressions recensées, nous relevons par exemple la disjonction $\neg P \vee Q$ (20% des expressions données) ou la contraposée (16%).

9.2.3 Confusion d'une implication avec une équivalence

Nous avons vu que dans le langage courant, une implication pouvait être confondue avec une équivalence. Nous testons cette confusion possible auprès des étudiants via la question 2(a) de notre premier questionnaire. Cette confusion est quasiment absente puisque seuls deux étudiants (soit 5% du public interrogé) estiment la conclusion établie à partir des deux affirmations données comme correcte et mettent en évidence dans leur justification une interprétation de l'implication proposée en première affirmation comme une équivalence. Ce pourcentage est très faible comparé aux 20 personnes (soit 51% du public interrogé) qui considère la conclusion établie comme erronée en cochant la case "fausse". Signalons que seuls 11 étudiants (soit 28% du public interrogé) parmi ces 20 justifient correctement ce choix de case.

9.2.4 Utilisation de conceptions langagières sur l'expression "si... alors..." pour statuer sur la vérité d'énoncés conditionnels

Dans notre premier questionnaire, nous demandons aux étudiants de statuer sur des implications matérielles telles que "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*" ou "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*".

Commençons avec l'implication "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*". La bonne réponse pour cette implication est de déclarer celle-ci vraie. C'est ce que 18 étudiants (soit 46% du public interrogé) font. Parmi ceux-ci, nous relevons les justifications correctes suivantes :

- 12 personnes (soit 31%) donnent une explication qui renvoie à la propriété-en-acte « *si A est fausse alors "A implique B" est vraie* » ;
- une personne (soit moins de 3%) utilise l'équivalence logique entre $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$ pour statuer correctement sur la vérité de cette implication matérielle.

Les autres justifications sont soit erronées, soit absentes ou soit ne justifient pas le choix de case effectué.

Nous constatons que 18 étudiants également (soit 46%) préfèrent déclarer cette implication fausse. Les justifications exploitables et toutes erronées apportées par 16 de ces personnes nous permettent de constater que :

- 11 personnes (soit 28% du public) utilisent l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion de cette implication : puisque le lien "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" n'est pas vérifié dans l'implication matérielle "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*", celle-ci est déclarée fausse. Cette explication renvoie à la conception de causalité issue du langage et affirmant que ≪ *"A implique B" n'a de sens et a fortiori n'est vraie que si A et B ont un lien de cause à effet* ≫ ou encore à cette version plus adaptée ici ≪ *"A implique B" n'a de sens et a fortiori n'est vraie que s'il existe un cheminement explicatif pour passer de la prémisse A à la conclusion B* ≫. Comme nous l'avons déjà signalé cette conception est contraire à la convention de vérifonctionnalité établie dans le calcul des propositions pour laquelle la valeur de vérité d'une phrase ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition du connecteur qui les relient. Or, en l'absence ici d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion, les élèves prennent en compte les contenus sémantiques de ces deux propositions et statuent sur le vérité de l'implication en fonction de ces contenus et d'un lien entre ceux-ci.
- 3 étudiants (soit 8%) réutilisent la réponse "fausse" précédemment cochée pour l'énoncé conditionnel (a) ;
- 2 personnes (soit 5%) utilisent la propriété-en-acte ≪ *si A est fausse alors "A implique B" est fausse* ≫.

Face à cette implication dont la prémisse est fausse, nous remarquons qu'en l'absence de connaissances sur la vérifonctionnalité et donc par extension en l'absence de connaissances sur la table de vérité d'une implication matérielle, les étudiants ont recours à hauteur de 28% à la conception de causalité issue du langage pour se prononcer sur la vérité de cet énoncé.

Concentrons-nous maintenant sur l'implication "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*". Nous recensons 29 étudiants, soit 74% du public interrogé, qui répondent correctement en cochant la case "vrai". Parmi ces cases "vraie", nous relevons 11 bonnes justifications :

- 10 étudiants (soit 26%) donnent une explication qui renvoie à la propriété-en-acte ≪ *si A est fausse alors "A implique B" est vraie* ≫ ;
- une personne (soit moins de 3%) utilise l'équivalence logique entre $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$ pour statuer correctement sur la vérité de cette implication matérielle.

Remarquons que ces 11 justifications sont toutes données par des étudiants qui avaient déclaré vraie l'implication matérielle précédente pour la même raison.

Parmi les autres justifications apportées à la case “vrai”, nous relevons auprès de 8 élèves (soit 21%) un raisonnement erroné basé sur la conception causale et plus précisément sur l'existence d'un cheminement explicatif entre la prémisse et la conclusion de cette implication. Puisque le lien explicatif “*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*” est vérifié lorsqu'on passe de la prémisse à la conclusion de cette implication, les étudiants déclarent celle-ci vraie.

Outre ce choix de case “vrai” largement dominant (74%), 7 étudiants plébiscitent la case“faux” dont 4 qui justifient leur choix. Nous pouvons classer les justifications de ces étudiants selon l'utilisation de différentes propriétés-en-acte :

- « *Si A est fausse alors “A implique B” est fausse* » (relevé 2 fois, soit 5% des 39 personnes interrogées) ;
- « *Si A et B sont toutes les deux fausses alors “A implique B” est fausse* » (relevé 1 fois, soit moins de 3% des 39 personnes interrogées) ;
- « *Si B est fausse alors “A implique B” est fausse* » (relevé 1 fois, soit moins de 3% des 39 personnes interrogées).

Toutes ces propriétés-en-acte présentes et sollicitées par les étudiants sont erronées car elles ne reflètent pas la définition d'une implication matérielle. Dans chacun des cas, nous remarquons que les étudiants identifient correctement la valeur de vérité fausse de la proposition “*3 pair*” ou de celle “*4 impair*”, voire des deux, mais ils utilisent des propriétés-en-acte erronées sur une implication matérielle qui les conduit à déclarer fausse l'implication “*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*”.

En conclusion, suite à l'enseignement explicite et décontextualisé sur l'expression “*si... alors...*” que les étudiants ont reçu en dressant notamment la table de vérité d'une implication matérielle, nous constatons que 31% et 26% des 39 étudiants interrogés déclarent respectivement les énoncés conditionnels “*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*” et “*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*” vrais en mettant en avant dans leur raisonnement la propriété-en-acte « *si A est fausse alors “A implique B” est vraie* ». Un étudiant se sert quant à lui de l'équivalence logique entre une implication matérielle $A \Rightarrow B$ et la disjonction $\neg A \vee B$ comme un outil pour établir la valeur de vérité vraie de ces énoncés conditionnels. Néanmoins, face à ces implications matérielles dont la prémisse “*3 pair*” est fausse, les étudiants peuvent utiliser à hauteur de 28% et 21% la conception langagière de causalité pour statuer respectivement que “*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*” est faux et que “*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*” est vrai. Comme nous l'avons déjà signalé, ce raisonnement basé sur cette conception de causalité n'est pas correct puisqu'il s'oppose à la convention de vérifonctionnalité établie dans le calcul des propositions. Avec ces différents pourcentages, nous remarquons que bien qu'ayant suivi un cours explicite et hors de tout contexte sur l'expression "*si... alors...*", les étudiants peuvent avoir recours dans des proportions d'une personne sur 5 à la conception langagière de causalité pour répondre de la vérité d'une implication matérielle dont la prémisse est fausse. Nous nous posons alors la question suivante : est-ce que cette conception causale peut aussi être utilisée par certains étudiants pour statuer sur une implication matérielle dont la prémisse est vraie ? Nous devons reconnaître que les réponses et justifications apportées par les étudiants aux implications matérielles "*3 impair ⇒ 4 pair*" et "*3 impair ⇒ 4 impair*" auraient pu nous permettre de répondre à cette question. Malheureusement, ce n'est pas le cas. Suivant notre démarche de diffusion de nos questionnaires dans le secondaire, nous voulions que les étudiants puissent répondre à nos formulaires durant un temps imparti d'une heure. Afin d'obtenir des justifications suffisamment détaillées pour certaines questions, nous avons dû faire des choix dans nos demandes d'explications. Nous avons donc ciblé notre demande pour cet exercice sur les deux implications matérielles à prémisse fausse mentionnées et dépouillées ci-dessus. Face aux implications "*3 impair ⇒ 4 pair*" et "*3 impair ⇒ 4 impair*", nous ne pouvons qu'émettre des hypothèses sur les réponses et raisonnements possibles des étudiants :

- identifier la vérité de "*3 impair ⇒ 4 pair*" en constatant que la prémisse et la conclusion de cette implication sont toutes les deux vraies et en utilisant ensuite la définition du connecteur propositionnel qui les relient. Les étudiants peuvent notamment faire allusion à la réduction de la vérité de "*si P alors Q*" en "*si P est vrai alors Q est vrai*". Cette réduction est d'ailleurs plébiscitée par 54% du public dans la question 1 de notre premier questionnaire comme étant la signification de l'expression "*si P alors Q*". Signalons que nous n'avions pas précisé une quelconque vérité de cette expression dans l'énoncé de cette question 1. Ce sont bien 54% des étudiants qui associent dans leurs connaissances et conceptions d'une implication "*si P alors Q*" à "*si P est vrai alors Q est vrai*".
- reconnaître que "*3 impair ⇒ 4 pair*" est faux par définition d'une implication matérielle dans la mesure où sa prémisse est vraie et que sa conclusion est fausse.
- utiliser la conception de causalité pour répondre de la vérité de chacune de ces implications : la première sera déclarée vraie car le lien explicatif "*un nombre impair est suivi d'un nombre pair*" y est vérifié, ce qui n'est pas le cas dans la seconde et conduit donc à cocher "faux" pour cette dernière. Les questions ouvertes associées à cette justification sont les suivantes : les étudiants peuvent-ils avoir recours à cette conception de causalité pour statuer sur la vérité d'une implication dont la prémisse

est vraie ? Si oui, dans quelle proportion ?

Cet aspect n'est donc pas pris en compte dans notre travail dans la mesure où nous estimions plus intéressant d'observer le comportement des étudiants face à des implications matérielles dont la prémisse est fausse et de comparer comme nous le ferons au prochain chapitre l'attitude des élèves à ces des étudiants face à une telle implication.

Avec les implications matérielles "*3 pair ⇒ 4 pair*" et "*3 pair ⇒ 4 impair*" et les explications apportées par les étudiants pour statuer sur la vérité de celles-ci, nous voulons savoir si à l'image des élèves de l'enseignement secondaire, les étudiants partagent eux aussi notre hypothèse de raisonnement face à une implication dont la prémisse est fausse. Nous rappelons l'énoncé de cette hypothèse :

> Pour statuer sur la vérité d'une implication matérielle « *si P alors Q* » dont la prémisse est fausse, on suppose que cette prémisse est vraie même si on sait qu'elle est pertinemment fausse. On s'interroge ensuite sur la vérité de la conclusion en utilisant la propriété-en-acte de causalité : l'implication est vraie s'il existe un lien explicatif entre prémisse et conclusion, elle est fausse ou n'a pas de sens sinon.

Suite au dépouillement des réponses des étudiants à notre questionnaire, nous constatons que cette hypothèse est vérifiée auprès de certains étudiants. Pour l'énoncé conditionnel "*3 pair ⇒ 4 pair*", nous relevons que 21% des étudiants mentionnent explicitement dans leur résolution "*supposons 3 pair*" et ils établissent ensuite que cette implication est fausse puisque le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" n'est pas respecté dans cet énoncé. Ce pourcentage était de respectivement 15% pour les élèves du secondaire.

Quant à l'énoncé "*3 pair ⇒ 4 impair*", nous recensons que 13% des étudiants mentionnent explicitement "*supposons 3 pair*" dans leur justification et donnent la valeur de vérité "vrai" à cette implication puisque cette fois, en passant de sa prémisse à sa conclusion le lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" est vérifié. Ce pourcentage était de respectivement 22% pour les élèves du secondaire. Nous remarquons donc que cette hypothèse se vérifie également dans les justifications apportées par certains étudiants.

Puisque certains étudiants utilisent la conception de causalité pour se prononcer sur la vérité d'une implication matérielle dont la prémisse est fausse, nous nous demandons si certains peuvent par exemple utiliser la conception langagière « *"A implique B" n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque A est* *vraie* ≫ puisque la prémisse "*3 pair*" des énoncés conditionnels "*3 pair ⇒ 4 pair*" et "*3 pair ⇒ 4 impair*" est fausse. Notre dépouillement des copies des étudiants ne nous révèlent pas la présence d'une telle conception qui peut par exemple inviter certains à cocher les cases "faux" ou "on ne peut pas savoir" de notre question à propos de la vérité de ces implications.

Les 21% et 13% des 39 étudiants interrogés et mentionnés ci-dessus comme suivant notre hypothèse pour statuer respectivement sur la vérité des implications matérielles "*3 pair ⇒ 4 pair*" et "*3 pair ⇒ 4 impair*", nous renseignent que ces quelques personnes accordent plus d'importance à la qualité d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion de ces implications qu'à des connaissances liées à la vérifonctionnalité. Rappelons qu'avec cette dernière, on examine les valeurs de vérité des propositions en jeu et on utilise ensuite la définition du connecteur, ici celle d'une implication matérielle, qui les relient. Deloustal-Jorrand[4], à l'origine de cette question sur la vérité d'une implication entre propositions, a relevé dans son expérimentation auprès de 4 étudiants futurs enseignants que deux personnes ≪ *accordent suffisamment d'importance au lien explicatif pour être prêts à "oublier" ce qu'ils savent sur la parité des nombres et ne s'intéresser qu'à la relation sémantique entre prémisse et conclusion* ≫ (p. 117). C'est exactement ce constat qui transparaît dans les réponses des étudiants puisque ceux-ci mentionnent explicitement "*supposons 3 pair*" tout en nous signalant que 3 n'est pourtant pas pair.

9.3 Le phénomène de quantification universelle implicite

Dans notre premier questionnaire, nous voulons étudier avec le premier tableau de notre question 4 le phénomène de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels. Nous désirons savoir si les étudiants interprètent tout énoncé conditionnel non quantifié comme étant universellement quantifié et confondent alors une implication entre énoncés contingents $P(x) \Rightarrow Q(x)$ avec l'implication universellement quantifiée correspondante $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$.

95% des étudiants interrogés ont coché respectivement les cases "faux", "vrai", "vrai" et "faux" pour les énoncés conditionnels (a), (b), (c) et (d) de notre question 4. Ce choix laisse sous-entendre une interprétation de ces énoncés comme implicitement quantifiés universellement. Comme pour l'enseignement secondaire, nous choisissons de concentrer notre demande de justifications pour l'énoncé (a). Ce choix n'est pas anodin comme nous l'avons déjà signalé car selon l'interprétation faite de l'énoncé, nous pensons que les étudiants peuvent être amenés à répondre "faux" ou "on ne peut pas savoir". Le choix "faux" renvoie alors à une interprétation implicitement universellement quantifiée de l'énoncé tandis que l'autre réponse repose sur des implications entre énoncés contingents où la variable k utilisée dans l'énoncé est vue comme un élément générique non connu a priori. Ces deux réponses sont correctes suivant l'interprétation qui est faite de l'énoncé. Concentrons-nous sur les explications apportées par les étudiants au choix de case "faux". Celles-ci nous renseigneront sur l'interprétation qui est faite de notre énoncé conditionnel (a). Parmi les 37 étudiants qui semblent interpréter nos énoncés conditionnels comme implicitement universellement quantifiés, 29 (soit 74% du public interrogé) justifient la valeur de vérité fausse choisie pour l'énoncé (a) tandis que 8 personnes fournissent une explication non exploitable. Nous constatons parmi les 29 justifications relevées que :

- 21 personnes (soit 54% des 39 étudiants interrogés) établissent que l'énoncé (a) est faux en utilisant la conception de causalité au moyen du lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*". Parmi ces 21 personnes, nous différencions deux cas d'explications pour ce lien :

  - la justification de 10 personnes repose sur une explication mathématique de ce lien : ils démontrent tous en réalité l'énoncé $\forall k, (k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ impair})$, ce qui les conduira à cocher la case "vrai" pour l'énoncé conditionnel (b) comme le précise 7 personnes, « *ce que je viens de montrer,* $\forall k, \big(k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ impair}\big)$*, c'est exactement (b)* ». Ces 10 étudiants semblent donc interpréter nos différents énoncés conditionnels, dont notamment (a) et (b) comme étant implicitement universellement quantifiés.

  - 11 personnes ne mentionnent ce lien uniquement de façon langagière en disant juste "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" et répondent que l'énoncé (a) est faux en constatant que ce lien n'est ici pas vérifié lorsque l'on passe de la prémisse "k *pair*" à la conclusion "$k+1$ *pair*". Avec cette justification, nous ne pouvons pas affirmer que ces 11 étudiants interprètent l'énoncé conditionnel (a) comme étant implicitement universellement quantifié. Aucune mention n'est faite explicitement en ce sens. Ils peuvent l'interpréter comme tel comme ne pas le faire. Interprètent-ils le lien explicatif donné comme étant mathématiquement l'expression $\forall k, (k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ impair})$? Nous manquons donc d'informations pour nous prononcer sur une possible quantification universelle implicite de l'énoncé conditionnel (a) donné.

- 8 étudiants (soit 20% du public total interrogé) donnent un contre-exemple pour invalider l'énoncé conditionnel (a). Ils montrent ainsi que la négation de l'énoncé (a) interprété comme universellement quantifié est vraie. Ces 8 personnes interprètent donc (a) comme étant implicitement universellement quantifié.

En conclusion, parmi les 39 étudiants interrogés, 37 semblent interpréter les différents énoncés conditionnels donnés comme implicitement quantifiés universellement. Nous demandons à ces personnes de justifier leur choix sur un énoncé conditionnel bien précis. Face à celui-ci, nous devons exclure 8 explications faute de pertinence. Notre analyse révèlent que parmi les 29 justifications restantes, 18 étudiants (soit 49% des 37 personnes semblant interpréter les énoncés conditionnels donnés comme implicitement quantifiés universellement) interprètent bien l'énoncé (a) comme l'implication formelle $\forall k, k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ pair}$. Cette interprétation peut-être mise en évidence par le fait de donner un contre-exemple à cet énoncé (20% du public total interrogé) ou de démontrer l'implication formelle $\forall k, k \textit{ pair} \Rightarrow k+1 \textit{ impair}$ (25% du public total interrogé) associée au lien explicatif "*un nombre pair est suivi d'un nombre impair*" et d'identifier ensuite cette implication formelle comme étant justement l'énoncé conditionnel (b) donné. Notons que pour ces 25% qui voient l'énoncé conditionnel (a) comme quantifié universellement, la justification donnée à la case "faux" cochée n'est pas correcte car celle-ci repose sur l'absence d'un lien explicatif vérifié pour passer de la prémisse à la conclusion. Seuls les 8 étudiants ayant donné un contre-exemple justifient correctement cette interprétation universellement quantifiée de l'énoncé (a).

9.4 Enjeu de vérité : les différents cas qui rendent vraie une implication

Dans nos questionnaires, nous avons interrogé les étudiants à propos de la tâche mathématique qui consiste à travailler sur la vérité d'une implication. Dans cette tâche, on se pose la question suivante : "*Pour quels objets x l'implication* $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ *est-elle vraie ? fausse ?*". Elle est au moins vraie pour tous les objets x qui ne vérifient pas $\mathrm{P}(x)$ ou dit autrement qui vérifient *non* $\mathrm{P}(x)$ puisque dans la définition d'une implication matérielle, une instance de $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ est vraie lorsque sa prémisse est fausse et que sa conclusion est vérifiée ou non. Deloustal-Jorrand[4] précise qu' ≪ *il y a réellement un enjeu de vérité [avec cette tâche], on cherche les éléments vérifiant une implication, on ne les connaît pas a priori* ≫ (p. 50).

Dans la question 3 de notre premier questionnaire dont le but consiste à donner les nombres naturels entre 0 et 20 qui rendent vraie la propriété "*si n est un nombre pair, alors $n+1$ est un nombre premier*", nous constatons qu'uniquement 6 étudiants (soit 15% du public interrogé) donnent la bonne réponse en affirmant que tous les nombres naturels de 1 à 19 exceptés 8 et 14 vérifient cette propriété. Leurs explications mettent en avant les cas suivants lié à une prémisse vraie :

- une instance de la propriété ci-dessus est vraie lorsque sa prémisse et sa conclusion sont vraies ;
- une instance de cette propriété est fausse lorsque sa prémisse est vraie et que sa conclusion est fausse ;

Pour les nombres impairs, leurs justifications renvoient à la propriété-en-acte « *si A est fausse alors $A \Rightarrow B$ est vraie* ».
Notre dépouillement des réponses relèvent que 64% des étudiants ne travaillent quant à eux uniquement avec des nombres pairs, c'est-à-dire les nombres qui vérifient la prémisse de la propriété donnée. Ces personnes ne font jamais allusion aux nombres impairs dans leur résolution. Comme pour l'enseignement secondaire, nous ne pouvons qu'émettre les hypothèses suivantes à propos de cette absence. Les étudiants peuvent penser que :

- « *si A est fausse alors $A \Rightarrow B$ est fausse* » ;
- « *"$A \Rightarrow B$" n'a d'utilité et/ou de sens que si A est vraie* » ;
- ou encore ils n'envisagent peut-être même pas du tout ces nombres impairs en faisant référence à une des deux hypothèses mentionnées ci-dessus et ils restent fixés sur le cas d'une prémisse vraie pour les instances associées.

Le constat frappant avec cette question est que bien qu'ayant reçu un enseignement explicite et décontextualisé sur l'implication, les étudiants n'identifient pas en majorité avec cette tâche mathématique l'existence d'éléments naturels n entre 0 et 20 qui vérifient l'implication "*si n est un nombre pair, alors $n+1$ est un nombre premier*" mais pas la propriété "*être un nombre pair*". En effet, 64% des étudiants interrogés travaillent uniquement avec des nombres vérifiant cette propriété et donc uniquement avec des instances de cette implication qui ont une prémisse vraie. Tandis que 15% du public interrogé travaille aussi bien avec les nombres pairs que les nombres impairs.

Nous testons également cette tâche mathématique et donc cet enjeu de vérité dans notre second questionnaire en demandant aux étudiants d'hachurer les différentes zones pour un diagramme de Venn donné qui rendent vrais les énoncés conditionnels associés. Contrairement à la question mentionnée précédemment, les étudiants doivent cette fois-ci réaliser cette tâche dans le cadre ensembliste et noircir les ensembles ou parties d'ensembles pour lesquels ils jugent que les éléments rendent vraies les implications de la forme $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$, respectivement associées à ces diagrammes. Notre expérimentation met en avant les résultats suivants : 84% des étudiants (soit 31 personnes) noircissent l'intersection des deux ensembles pour la figure 9.3 et 65% (soit 24 personnes) l'ensemble C dans le cas de l'inclusion de C dans B illustrée à la figure 9.4. Ces zones hachurées représentent les éléments de

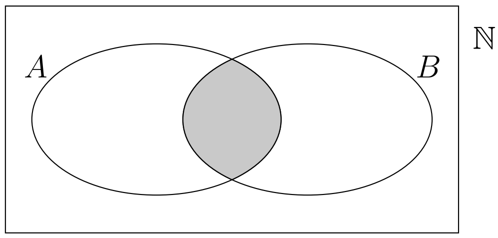


FIGURE 9.3 – Cas où l'implication $\mathrm{B}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x)$ est vraie selon les étudiants dans le seul cas où la variable x appartient à $A \cap B$.

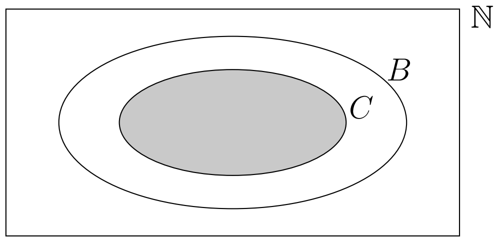


FIGURE 9.4 – Cas où l'implication $\mathrm{C}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ est vraie selon les étudiants dans le seul cas où la variable x appartient à $B \cap C$ ou encore à C puisque $C \subset B$.

l'ensemble de référence, c'est-à-dire ici celui des naturels, vérifiant à la fois la prémisse et la conclusion des instances associées à l'implication $\mathrm{B}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x)$ pour la figure 9.3 et à l'implication $\mathrm{C}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ pour le figure 9.4.

Comme nous l'avons signalé dans le bilan des connaissances des élèves sur la notion d'implication au chapitre 7, nos questions vis-à-vis de ces deux diagrammes sont pertinentes avec notre questionnement sur l'implication mais nous devons admettre que traiter ces réponses manquent un peu de rigueur dans le sens où nous n'avons pas demandé aux étudiants d'apporter une justification au choix effectué pour hachurer telle(s) zone(s) ou pour en rejeter d'autre(s). Nous ne pouvons donc qu'interpréter partiellement ces résultats.

Intéressons-nous à la figure 9.3. Comme nous l'avons déjà mentionné dans le bilan des connaissances des élèves, les étudiants universitaires hachurant $A \cap B$ semblent estimer que cette intersection est le seul ensemble dont les éléments rendent vrai l'énoncé $\mathrm{B}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x)$ proposé dans lequel $\mathrm{A}(x)$ représente la propriété "*x est un nombre pair*" et $\mathrm{B}(x)$ la propriété "*x est un nombre multiple de 3*". Ils se limitent donc à donner des valeurs naturelles à x qui vérifient à la fois la prémisse et la conclusion des instances associées. N'ayant hachuré que cette zone, nous supposons que pour les étudiants les éléments de l'ensemble $\mathbb{N} \backslash (A \cap B)$ ne vérifient pas l'énoncé donné. Faute d'explications demandées, nous ne pouvons pas savoir pourquoi ceux-ci estiment que les éléments de cet ensemble ne vérifient pas l'énoncé. Nous ne pouvons émettre que des hypothèses :

- Les éléments de l'ensemble $B \backslash A$ sont rejetés car ils vérifient la prémisse "*x est un naturel multiple de 3*" mais pas la conclusion "*x est un nombre pair*". Comme pour le secondaire, nous pouvons remarquer que parmi les 22 personnes (59%) qui donnent un contre-exemple pour invalider la clôture universelle de "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*", 19 étudiants (soit 51%) n'ont hachuré que l'ensemble $A \cap B$ dans notre diagramme de Venn et l'élément à la base de leur contre-exemple appartient à l'ensemble $B \backslash A$. Nous pouvons donc dire qu'avec ce contre-exemple, 19 personnes (soit 51%) ayant hachuré l'intersection $A \cap B$ comme rendant vrai l'énoncé "*si x est un naturel multiple de 3 alors x est un nombre pair*", identifient apparemment que les éléments de l'ensemble $B \backslash A$ ne vérifient pas cet énoncé conditionnel.
- Les éléments de l'ensemble $\mathbb{N} \backslash B$ sont rejetés :
  - et l'explication renvoie à la conception langagière suivante à propos des instances associées : « *"P implique Q" n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque P est vraie* ».
  - car les étudiants ont recours à la propriété-en-acte suivante pour les instances associées : « *si P est fausse alors "P ⇒ Q" est fausse* ».
  - aucune mention n'est faite à ces éléments. Les étudiants restent fixés sur des instances de cet énoncé dont la prémisse est vraie.

Via ce premier schéma ensembliste, nous retrouvons les mêmes conclusions tirées avec la question précédente portant sur les nombres pairs et les nombres premiers : malgré avoir étudié spécifiquement le connecteur propositionnel "*si... alors...*" en dressant notamment sa table de vérité, la majorité des étudiants (84%) n'identifie que l'ensemble $A \cap B$ comme rendant vrai l'énoncé conditionnel associé à ce schéma, c'est-à-dire qu'ils n'hachurent que l'ensemble vérifiant à la fois la prémisse et la conclusion des instances associées

à cet énoncé. En ce sens, la réponse majoritaire des étudiants est similaire à celle donnée également par la totalité de notre groupe de 8 élèves inscrits dans l'option 6 heures de mathématiques par semaine et ayant suivi un cours sur la logique des propositions.
Suite au dépouillement des réponses des étudiants, nous avons recensé uniquement deux solutions correctes (soit 5% du public interrogé) pour cette figure 9.3. Dans celles-ci, les deux étudiants hachurent l'ensemble $B^C \cup A$. Cette réponse semble par rapport à la réponse précédente prendre en compte le cas d'une prémisse fausse pour les instances associées.

Continuons maintenant avec notre figure 9.4. La majorité des étudiants (65%) n'hachure que l'ensemble C et estime donc que seul celui-ci rend vrai l'énoncé conditionnel $\mathrm{C}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)$ donné pour lequel $\mathrm{C}(x)$ représente la propriété "*x est un nombre multiple de 9*" et $\mathrm{B}(x)$ la propriété "*x est un nombre multiple de 3*". Via cette zone hachurée, les étudiants se limitent ainsi à ne donner que des valeurs naturelles à x vérifiant à la fois la prémisse et la conclusion des instances associées. Ici aussi, nous ne pouvons faire que des suppositions face au comportement des étudiants à propos des ensembles non-hachurés pour lesquels ils estiment apparemment que les éléments ne vérifient pas l'énoncé donné.

- Les étudiants peuvent utiliser la conception langagière : ≪ *"P implique Q" n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque P est vraie* ≫ à propos des instances associées.
- Ils peuvent également avoir recours à la propriété-en-acte ≪ *si P est fausse alors "P ⇒ Q" est fausse* ≫ pour les instances associées.
- Enfin, il est probable aussi qu'ils ne songent pas même un seul instant à travailler avec des nombres naturels non multiples de 9 et ce, sans pour autant avoir recours à une des deux hypothèses mentionnées ci-dessus. Les étudiants ne se concentrent alors que sur des instances de cet énoncé dont la prémisse est vraie et donc que sur des nombres multiples de 9.

Nous remarquons ici aussi que malgré l'étude explicite de l'expression "*si... alors...*", la réponse majoritaire des étudiants n'est pas la bonne solution attendue qui consiste à hachurer tout l'ensemble $\mathbb{N}$. 65% du public interrogé ne noircit d'ailleurs que l'ensemble C et ne prend ainsi en compte que le cas d'une prémisse vraie pour les instances associées.

Nous relevons trois bonnes réponses (soit 8%) pour cette figure dans lesquelles l'ensemble $\mathbb{N}$ est entièrement hachuré. Suite à la diffusion de nos deux questionnaires auprès d'un public commun de 37 étudiants, nous remarquons que les 3 personnes ayant hachuré tout l'ensemble $\mathbb{N}$ ont tous pris en compte les nombres impairs dans notre question basée sur l'énoncé conditionnel "*si n est un nombre pair, alors $n+1$ est un nombre premier*". La justification apportée pour cette prise en compte renvoie dans les trois cas à la propriété-en-acte « *si* P *est fausse alors "*$P \Rightarrow Q$*" est vraie* ». En hachurant l'ensemble $\mathbb{N}$, nous pouvons donc raisonnablement penser que ces étudiants considèrent le cas d'une prémisse fausse pour les instances associées à cet énoncé et justifient avec cette même propriété-en-acte.

Avec cette tâche mathématique qui consiste à travailler sur la vérité d'une implication, nous remarquons qu'une grande majorité des étudiants se concentre uniquement sur la réduction suivante de la vérité de l'implication matérielle "*si* P *alors* Q" : "*si* P *est vraie alors* Q *est vraie*". Cette réduction semble très présente chez les étudiants puisque c'est justement celle-ci que 54% du public interrogé identifie comme signification de l'expression "*si* P *alors* Q". Nous constatons donc que malgré l'étude explicite et décontextualisée qui est faite de cette expression au cours de Mathématiques élémentaires, les étudiants éprouvent des difficultés à reconnaître les différentes distributions de valeurs de vérité de P et Q qui rendent vrai "*si* P *alors* Q". Cette tâche mathématique n'est pas mieux réussie lorsque nous la proposons dans le cadre ensembliste. En effet, alors que 15% des étudiants répondent correctement face à l'implication "*si* n *est un nombre pair, alors* $n+1$ *est un nombre premier*", ils ne sont plus respectivement que 5% et 8% à hachurer correctement les ensembles $B^C \cup A$ et $\mathbb{N}$ attendus pour les figures 9.3 et 9.4.

9.5 La double dimension outil/objet de l'implication

Notre analyse du cours de Mathématiques élémentaires présentée au chapitre 1 nous montre que l'implication y est travaillée dans sa double dimension outil/objet. En effet, elle apparaît notamment comme un objet lorsque le professeur définit la table de vérité du connecteur propositionnel "*si* P *alors* Q", où P et Q sont deux propositions ou encore lorsqu'il définit l'équivalence logique entre l'implication matérielle $P \Rightarrow Q$ et la disjonction $\neg P \vee Q$ et l'implication apparaît comme outil dans des figures de raisonnement comme le *Modus Ponens* ou le *Modus Tollens*. Dans notre questionnement sur l'implication présenté au chapitre 3, nous exprimons la question suivante à propos de cette double dimension outil/objet de l'implication :

> L'implication apparaît-elle dans les connaissances qu'en ont les étudiants sous sa double dimension outil/objet ?

9.5.1 L'implication dans sa dimension objet

Nous estimons que l'implication vit peu comme un objet du cadre de travail de la logique formelle dans les connaissances de la majorité des étudiants interrogés. En effet, dans ce cadre, nous relevons que :

- peu de tables de vérité d'une implication matérielle sont dressées dans les significations de "*si P alors Q*". En effet, seuls 3 étudiants (soit 8% des étudiants interrogés) dressent cette table et contribuent ainsi à faire vivre l'implication sous cette dimension objet.
- l'expression logique $\neg P \vee Q$ connue des étudiants d'après notre analyse du cours de Mathématiques élémentaires, n'apparaît pas dans les significations que les étudiants peuvent donner à "*si P alors Q*". Cette expression contribue pourtant à faire vivre l'implication comme un objet dans les connaissances des étudiants. Nous trouvons néanmoins quelques traces de cette expression dans les copies des étudiants. En effet, elle apparaît dix fois (soit 26% du public interrogé) dans des expressions qui signifient selon les étudiants la même chose que "*si P alors Q*". Les étudiants semblent donc plus enclins à mentionner que cette expression signifie la même chose que "*si P alors Q*" plutôt que de définir "*si P alors Q*" à partir de cette expression. Pourtant ce dernier point permet de donner à l'implication son statut d'objet.

En ce qui concerne le cadre ensembliste, suite aux limites que montrent notre questionnaire dédié à ce cadre, il n'est pas possible d'avoir un avis pertinent sur la vie en tant qu'objet de l'implication dans ce cadre de travail. Néanmoins, notre formulaire nous révèle que :

- un étudiant affirme d'après notre interprétation de ces réponses que tous les éléments x d'un ensemble de référence rendant vraie l'implication $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ est équivalent d'un point de vue logique à dire que l'ensemble P est inclus à l'ensemble Q.
- 17 étudiants (soit 38% du public interrogé) semblent identifier d'après la question 2(d) de notre questionnaire ensembliste qu'une implication formelle $\forall x, \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ est vraie puisque l'ensemble P est inclus dans l'ensemble Q.

Ces quelques constats que notre expérimentation sur le cadre ensembliste permet malgré tout de mettre en avant, nous fait penser que ces étudiants font vivre l'implication comme un objet dans ce cadre. Bien sûr, suite aux limites que rencontrent notre formulaire ensembliste, cet aspect ne peut pas refléter les connaissances de tous les étudiants, voire de la majorité d'entre eux.

Nous retenons l'aspect frappant suivant de notre expérimentation auprès des étudiants : bien que le professeur fasse vivre l'implication sous sa dimension objet dans le cadre de la logique formelle en dressant notamment la table de vérité de "*si P alors Q*", les réponses des étudiants à nos questionnaires n'indiquent pas que les élèves partagent ce point de vue et ils ne semblent pas faire vivre l'implication comme un objet dans ce cadre.

9.5.2 L'implication dans sa dimension outil

Nous relevons de notre expérimentation que l'implication est utilisée comme un outil par les étudiants pour raisonner et ce, notamment dans la règle du *Modus Ponens* que nous identifions comme disponible suite au dépouillement des réponses apportées à nos questionnaires. Quant à la règle du *Modus Tollens*, celle-ci est reconnue à hauteur de 55% des étudiants et apparaît ici aussi dans les réponses à nos formulaires comme un outil pour raisonner.

Nous remarquons également qu'en citant des propriétés mathématiques croisées dans leurs cours et s'écrivant sous la forme "*si... alors...*", les étudiants nous indiquent bien que l'implication apparaît aussi comme un outil pour s'exprimer dans des résultats théoriques tels que des théorèmes, des définitions ou encore des propriétés. Mentionnons que dans les différents exemples donnés, les étudiants utilisent à la fois la notation symbolique "$\Rightarrow$" (dans 50% des expressions relevées) et des expressions langagières (38%) comme "*si... alors...*" ou "*... si...*". Les 12% restants sont liés à des réponses non pertinentes.

Revenons à notre question à propos des connaissances qu'ont les étudiants sur la notion d'implication : apparaît-elle sous sa double dimension outil/objet ? Nous pensons que la réponse est affirmative pour certains étudiants et négative pour d'autres. Cependant, la proportion d'étudiants chez qui apparaît selon nous la double dimension outil/objet de l'implication est nettement plus faible que l'autre proportion. En effet, avec les constats établis ci-dessus pour le cadre logique, nous avons l'impression que seuls 8% du public interrogé fait vivre l'implication en tant qu'objet en dressant sa table de vérité dans notre question relative à la signification que les étudiants donnent à l'expression "*si P alors Q*". Pour l'autre proportion, nous avons plus le sentiment d'après les réponses données dans nos deux questionnaires que la dimension outil prend l'ascendant sur celle objet. L'implication est utilisée dans des raisonnements ou pour s'exprimer dans des résultats mais elle apparaît peu comme un objet du cadre logique.

Chapitre 10

Conclusion

10.1 Bilan du travail

Ce travail est initié par notre intérêt pour la notion d'implication en lien avec notre propre expérience en tant qu'étudiant. En effet, lors de notre entrée à l'Université de Mons, nous avons été assez frappé et étonné de recevoir un cours de mathématiques sur l'expression "*si... alors...*". Plus précisément, nous avons étudié cette expression en première année de bachelier dans le cours de Mathématiques élémentaires, cours pour lequel nous avons justement analysé l'enseignement donné sur l'implication dans notre chapitre 1. À cette époque, il nous est apparu étrange de s'intéresser mathématiquement à une expression qui n'était somme toute pour nous qu'une expression du langage courant. Nous avons donc dû nous rendre à l'évidence, on peut associer les mathématiques à cette expression langagière. Après tout, aujourd'hui encore, nous nous souvenons avoir déjà utilisé cette expression pour formuler des résultats mathématiques durant nos années "élève de l'enseignement secondaire". Nous pensons par exemple au théorème de Thalès ou encore à celui de Pythagore. Mais nos connaissances à cette époque sur l'expression "*si... alors...*" étaient uniquement langagières : on utilise cette expression en mathématiques comme dans le langage de tous les jours pour s'exprimer. Avec notre bagage issu de l'enseignement secondaire, nous étions donc bien étonné de suivre à l'université une étude explicite et décontextualisée sur ce "*si... alors...*".
Puisque la notion d'implication est présente via l'expression "*si... alors...*" depuis nos études en secondaire et qu'elle a aussi sa place à l'université, nous avons justement eu envie de nous intéresser à cette présence dans ces deux institutions et d'essayer de caractériser l'enseignement de cette notion à ces deux niveaux d'études.

Notre démarche, pour obtenir une première opinion sur l'enseignement qui est donné de l'implication à ces deux niveaux d'études, a été pour le secondaire de consulter les programmes et pour l'université d'examiner comment elle y est travaillée. Notre recherche pour l'enseignement secondaire dans les programmes de cours est motivée par le fait que ceux-ci sont justement la première ressource d'informations pour un enseignant. En effet, ceux-ci renseignent sur les différents points de matière à enseigner aux élèves et s'accompagnent par moments de quelques conseils pédagogiques pour permettre d'aborder au mieux ces points. Pour l'enseignement universitaire, nous avons examiné comment l'implication est étudiée ici, à l'Université de Mons, université dans laquelle nous sommes justement inscrit. Ce premier examen nous montre que l'implication apparaît dans le secondaire comme un outil langagier pour s'exprimer notamment dans des démonstrations ou des résultats tandis qu'à l'université, elle y est explicitement étudiée et ce, indépendamment de tout contexte. L'implication semble y être plus un objet que l'on étudie spécifiquement et que l'on définit, tout en étant aussi travaillée comme un outil.

Nous avons ensuite consulté différents travaux issus du domaine de la didactique des mathématiques et en rapport avec la notion d'implication. De nos lectures, il en ressort des spécificités didactiques sur cette notion qui sont pleinement liées à l'enseignement comme la double dimension outil/objet qu'un concept mathématique peut posséder ou l'idée de cadres de travail associés à une notion mathématique. Ces cadres sont eux-mêmes en lien avec la double dimension outil/objet. De ces travaux, nous avons appris qu'il existe trois cadres de travail pour l'implication : le cadre de la logique formelle, le cadre ensembliste et le cadre du raisonnement déductif. Nous retenons également de ces apports théoriques, des renseignements sur des difficultés que peuvent éprouver des élèves ou des étudiants face à cette notion comme par exemple le côté langagier associé à l'expression "*si... alors...*", la présence de conceptions langagières sur cette expression et leur influence possible sur la compréhension et l'utilisation en mathématiques de celle-ci. Dans le même ordre d'idée, ces travaux antérieurs nous renseignent sur des pratiques enseignantes qui peuvent ne pas être partagées des élèves et étudiants. Nous nous intéressons dans ce travail uniquement au phénomène de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels.
Ces travaux antérieurs nous renseignent donc tant sur l'implication d'un point de vue général que sur des notions didactiques ou des aspects élèves et enseignants liés à cette notion.

Suite à nos lectures et à notre toute première analyse sur l'enseignement donné dans les institutions secondaire et universitaire, nous avons établi un questionnement sur la notion d'implication. Pour créer celui-ci, nous nous sommes appuyé sur les apports des travaux antérieurs consultés. Notre problématique touche à différents axes de questionnements qui permettent chacun à leur manière d'étudier indifféremment chaque institution. Nous pouvons finalement globaliser les questions et points importants de notre problématique de la manière suivante :

- l'implication apparaît-elle dans sa double dimension outil/objet ?
- quels sont les cadres de travail majoritairement sollicités ? En particulier, quels sont ceux qui apparaissent dans les connaissances et conceptions des élèves et étudiants sur l'implication ?
- quelle est l'importance de la langue naturelle dans les conceptions des élèves et des étudiants et quelle est l'influence de conceptions langagières pour par exemple statuer sur la vérité d'une implication ?
- quelle est l'influence d'une pratique enseignante sur les énoncés conditionnels : la quantification universelle implicite de ceux-ci ?

L'objectif de notre travail est de dresser un bilan des connaissances que les élèves et étudiants de chaque institution possèdent sur l'implication. En particulier, nous voulons identifier quelles sont les connaissances disponibles sur cette notion pour chaque niveau d'enseignement. Pour établir ces bilans, nous avons créé et diffusé pour chaque institution des questionnaires en lien avec notre problématique. Suite au dépouillement des réponses apportées par les élèves et les étudiants à nos questionnaires, nous relevons des aspects frappants sur les connaissances associées à ces deux institutions.

De notre dépouillement des questionnaires, nous retenons tout d'abord que l'implication n'apparaît chez les élèves du secondaire que dans sa dimension outil et plus précisément nous qualifions cette dimension d'outil du langage pour s'exprimer. Ce constat renforce donc notre première idée obtenue à la suite de notre analyse des programmes. L'implication y apparaît justement comme un outil du langage utilisé dans des démonstrations ou des énoncés de résultats théoriques. Par contre, à l'université, l'implication semble vivre auprès des étudiants sous la double dimension outil/objet même si la dimension objet n'est pas toujours spécialement mise en avant par les étudiants. Nous trouvons par exemple peu de tables de vérité (10% des étudiants interrogés) de l'implication matérielle "*si P alors Q*" dans les significations que les étudiants associent justement à l'expression "*si P alors Q*". Quant à l'expression $\neg P \vee Q$, elle n'apparaît pas dans ces significations mais plus dans les expressions qui signifient selon les étudiants la même chose que "*si P alors Q*" (cette expression est relevée 10 fois sur 39 étudiants interrogés, soit près de 26%).

Suite à notre expérimentation, nous remarquons donc que l'entrée à l'université s'accompagne pour la plupart des nouveaux étudiants de l'apparition d'une nouvelle dimension associée à la notion d'implication. Cette apparition est probablement liée à l'étude explicite et décontextualisée qui est menée à l'université sur l'expression "*si... alors...*" et plus précisément selon nous à la table de vérité d'une implication matérielle dressée dans cette étude.

Suite à l'étude explicite que les étudiants universitaires reçoivent sur l'expression "*si... alors...*", notre expérimentation montre qu'un certain nombre d'erreurs diminuent. Notre expérimentation montre ainsi que l'enseignement explicite de l'expression "*si... alors...*" permet de diminuer la confusion possible, notamment suite au langage, entre une implication et une équivalence. En effet alors que 33% des élèves du secondaire partagent visiblement cette confusion, seuls 5% des étudiants mentionnent celle-ci dans leurs explications. Cette amélioration sur la confusion possible entre implication et équivalence est selon nous une conséquence de cette enseignement explicite.

Dans nos questionnaires, le raisonnement par contraposition est très peu reconnu et justifié correctement par les élèves. En effet, seul 4% du public interrogé apportent une explication intéressante à notre question testant ce raisonnement. Leur explication n'est cependant pas complète puisqu'ils ne mentionnent pas s'il existe un lien entre "*si X alors Y*" et "*si non Y alors non X*". Mentionnons que le mot-clé "*contraposition*" apparaît pourtant dans les programmes du troisième degré (5$^{\text{ième}}$ et 6$^{\text{ième}}$ années de l'enseignement secondaire belge) et plus précisément dans les formations à 4 ou 6 heures de cours par semaine.
Par contre, à l'université, ce raisonnement est reconnu et correctement justifié par 59% des étudiants. L'étude explicite de l'expression "*si... alors...*" réalisée à l'université permet apparemment de reconnaître ce raisonnement.

En ce qui concerne la notion de contraposée sous-jacente au raisonnement par contraposition, nous pouvons dire que cette notion n'est pas connue des élèves. En effet, personne ne mentionne que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est équivalent à "*si P alors Q*" où P et Q sont deux propositions. 24% des élèves interrogés (soit 28 personnes) estiment d'ailleurs que c'est la proposition $\neg P \Rightarrow \neg Q$ qui est équivalente à "*si P alors Q*". Les étudiants universitaires partagent nettement moins cette expression erronée de la contraposée d'une implication puisque seules 5 personnes (soit 13% du public "étudiant" interrogés) expriment cette expression erronée. À travers les réponses des étudiants apportées à l'ensemble de nos questions, nous remarquons que 28% de ceux-ci

(soit 11 personnes) écrivent à un moment que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est équivalent à "*si P alors Q*". Le pourcentage total d'étudiants reconnaissant la contraposée d'une implication atteint les 46% en comptant les personnes qui mentionnent explicitement que la contraposé de "*si P alors Q*" est $\neg Q \Rightarrow \neg P$. La contraposée d'une implication est donc plus reconnue à l'université qu'en secondaire. Ceci est dû au fait qu'à l'université, le professeur établit l'équivalence logique entre une implication matérielle et sa contraposée.
Bien que connue par certains étudiants universitaires, notre expérimentation montre que la contraposée d'une implication n'apparaît pas comme un outil disponible pour statuer sur la vérité d'une implication matérielle.

Le dépouillement des questions révèle aussi l'existence d'aspects pour lesquels nous ne constatons pas d'apport de l'étude explicite de l'expression "*si... alors...*" qui est menée à l'université.

Le premier exemple est lié à des difficultés déjà présentes dans la signification de l'implication "*si P alors Q*". En effet, celle-ci reste pour 72% des étudiants associée à une valeur de vérité vraie. Nous relevons par exemple 54% des étudiants que mentionnent que "*si P alors Q*" signifie que "*si P est vraie alors Q est vraie*". Ils associent non seulement la valeur de vérité vraie à "*si P alors Q*" mais ils la restreignent au seul cas d'une prémisse et d'une conclusion vraies. Nous notons également que 18% des personnes interrogées expriment que "*si P alors Q*" est pour eux une expression toujours vraie.

Le second exemple porte sur la tâche mathématique qui consiste à travailler sur la vérité d'une implication et à identifier les différents éléments x qui vérifient une implication $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$. L'enseignement explicite reçu à l'université n'incite pas les étudiants à répondre correctement à cette question et ils donnent ainsi majoritairement une réponse semblable aux élèves du secondaire. Que cette tâche soit proposée ou non dans le cadre ensembliste, notre constat est le même puisque les étudiants réduisent la vérité d'une instance de cette énoncé au seul cas où sa prémisse et sa conclusion sont toutes les deux vraies. Ceci renvoie notamment à la réduction de "*si P alors Q*" en "*si P est vraie alors Q est vraie*" très présente chez les étudiants comme mentionné ci-dessus. Citons par exemple que face à l'implication "*si n est un nombre pair, alors* $n+1$ *est un nombre premier*", 64% des étudiants ne travaillent qu'avec des nombres pairs et utilisent donc cette réduction sur la vérité de "*si P alors Q*". Dans notre questionnaire ensembliste, pour travailler sur la vérité d'une implication, nous relevons que seule cette réduction est utilisée par 84% et 65% des étudiants respectivement pour chaque schéma ensembliste donné.

Le troisième exemple est lié à la conception langagière de causalité ou plus précisément à l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion d'une implication. Notre expérimentation montre que cette conception de causalité est très présente dans l'enseignement secondaire notamment pour statuer sur la vérité d'implications matérielles telles que "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*" (43% d'utilisation de cette conception langagière parmi les 115 élèves interrogés) ou "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*" (35% d'utilisation de cette conception). Nous identifions même que cette explication basée sur l'existence d'un cheminement explicatif est la plus utilisée pour statuer sur la vérité de ces deux implications matérielles.
Notre expérimentation auprès des étudiants montre que l'étude explicite et décontextualisée qui est faite à l'université de l'expression "*si... alors...*", n'a pas suffit à mettre en défaut cette conception causale. En effet, les étudiants ont recours à celle-ci à hauteur de 28% et de 21% pour statuer respectivement sur les implications "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 pair*" et "*3 pair* $\Rightarrow$ *4 impair*". Nous estimons que cette conception peut apparaître chez :

- des étudiants qui ne se souviennent pas de la table de vérité de la proposition "*si P alors Q*" dressée en cours ou en tout cas ne l'identifient pas comme signification lorsque nous leur demandons justement que ce signifie pour eux "*si P alors Q*".
- des étudiants qui jugent plus important l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion d'une implication matérielle que de faire référence à la convention de vérifonctionnalité en utilisant par exemple la table de vérité d'une implication matérielle ou la propriété-en-acte ≪ *si A est fausse alors "A implique B" est vraie* ≫ pour s'exprimer sur la vérité d'une implication entre propositions.

Nous avons l'impression que l'existence d'un lien explicatif semble, en secondaire et pour ces étudiants universitaires, indispensable pour parler d'une implication.

Notre expérimentation montre donc que cette existence d'un lien explicatif peut être très ancrée et difficile à bannir, même après une étude explicite de l'expression "*si... alors...*". Une difficulté des étudiants est donc semble-t-il d'abandonner cette idée quant à l'existence d'un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion d'une implication et de reconnaître la vérifonctionnalité d'une implication.

En conclusion, notre expérimentation montre que certains aspects lié à une implication peuvent visiblement être amélioré par une étude explicite de l'expression "*si... alors...*" donnée à l'université. Nous pensons par exemple à l'amélioration sur la confusion entre une implication et une équivalence. D'autres aspects, comme la conception de causalité, diminuent également suite à cette étude explicite mais cette diminution n'est pas toujours significative. La conception de causalité est par exemple encore très présente à l'université pour statuer sur la vérité d'une implication matérielle.

10.2 Des questions en suspens

Nous remarquons que notre expérimentation ne nous a pas permis de répondre à toutes les questions que nous avons lancées dans notre problématique, certaines ne sont par exemple pas complètement exploitées.

Alors que nous pouvons qualifier suite à notre expérimentation, le raisonnement direct de disponible auprès des étudiants (chez près de 72% des étudiants interrogés) et dans une moindre mesure chez les élèves (chez près de 28% des élèves interrogés), nous ne pouvons pas en faire de même en ce qui concerne le raisonnement par contraposition. En effet, nous avons choisi de tester si le raisonnement par contraposition était connu ou reconnu des élèves et des étudiants. Outre cette aspect, nous n'avons pas réellement testé si ce raisonnement est disponible. Nous pouvons seulement affirmer qu'il est reconnu des étudiants comme nous l'avons mentionné ci-avant mais nous ne pouvons pas affirmer que celui-ci est disponible.

Suite à nos chapitres 1 et 2, nous avons émis dans notre questionnement sur l'implication l'hypothèse suivante :

> Il existe une rupture dans l'enseignement de l'implication entre l'institution secondaire et celle universitaire et cette rupture laisse présager des difficultés chez les étudiants à surmonter.

Nous voulions notamment, à ce stade essayer de caractériser cette rupture et voir si oui ou non elle provoque des difficultés à surmonter chez les étudiants. Notre expérimentation auprès des élèves et étudiants nous permet maintenant de dire qu'il n'existe en réalité pas vraiment de rupture entre l'enseignement secondaire et celui universitaire dans le sens où en entrant à l'université les étudiants n'auront pas a priori moins de connaissances sur l'implication que celles dont ils disposaient en secondaire. Au contraire, leur entrée à l'université s'accompagne d'un enrichissement des connaissances sur cette notion puisqu'en plus de la dimension outil de l'implication qui semble être le plus souvent la seule à vivre dans l'enseignement secondaire, l'implication acquière à l'université sa dimension d'objet. Le bagage "savoir" des étudiants semblent donc s'enrichir lors de ce changement d'institution plutôt que de se délester d'une connaissance et ainsi conduire à une rupture dans l'enseignement. Pour bien visualiser cet aspect de rupture dans les connaissances, nous retenons l'exemple que la dérivée d'une fonction est à la fois définie en secondaire et très utilisée via les nombreux exercices techniques pour acquérir de façon presque mécanique des formules et des habitudes de dérivation. En arrivant à l'université, certains nouveaux étudiants savent parfaitement dériver des fonctions, ils font preuve de technique dans cette activité mais ils ne sont pas capables de donner du sens à la notion de dérivée d'une fonction et notamment de définir celle-ci. Il y a là une rupture dans les connaissances entre ces deux institutions puisque les étudiants perdent apparemment un savoir qu'a priori ils connaissaient auparavant.

Le fait de ne pas pouvoir répondre à toutes les questions de notre problématique renvoie selon nous à l'idée que toute expérimentation atteint à un moment ses limites et que pour tenter d'obtenir des éléments de réponses à ces questions laissées en suspens, il est nécessaire de réfléchir à une nouvelle façon de procéder et pourquoi pas à la diffusion de nouveaux questionnaires. Ce côté frustrant lié aux questions laissées sans réponses fait selon nous partie intégrante de la recherche et nous pensons que ne pas obtenir de réponses à toutes nos questions donnent justement l'envie de trouver autrement ces réponses et d'envisager la suite des recherches selon un autre point de vue.

10.3 Apports personnels du travail

Le premier aspect que nous retenons de ce travail est qu'il est important de prendre en compte des consignes ou des objectifs des programmes de l'enseignement secondaire qui n'apparaissent pas comme des points de matière à enseigner explicitement. En effet, notre analyse des programmes effectuée au chapitre 1 montre que l'expression "*si... alors...*" apparaît dans des objectifs comme le suivant : ≪ *insister sur l'importance des expressions logiques telles que "si", "si et seulement si", "si... alors...", "donc", "d'où", ... et repérer si l'élève sait maîtriser ce vocabulaire, ces connecteurs logiques et le symbolisme nécessaires pour expliquer une propriété, rédiger une démonstration* ≫. Bien que les programmes ne mentionnent pas que l'implication doit explicitement être étudiée, on ne peut donner cours en mathématiques sans faire intervenir à un moment donné un discours enseignant sur l'implication, ne serait-ce déjà, nous aurions envie de dire, parce que cette notion peut poser comme le montre notre expérimentation des difficultés aux élèves. À la suite de ce travail, nous estimons en tout cas nécessaire en tant que futur enseignant de ne pas passer sous silence cette notion. Nous pensons par exemple à :

- insister auprès de nos futurs élèves sur la différence existant en mathématiques contrairement à certains contextes langagiers, entre une implication et une équivalence.
- présenter aux élèves des énoncés conditionnels contingents comme par exemple, "*si n est un nombre naturel pair alors $n+1$ est un nombre naturel premier*", qu'on ne peut pas qualifier de toujours vrai, ni même de toujours faux puisque celui-ci admet des instances vraies (comme pour par exemple $n = 3$ ou $n = 4$) et des instances fausses (comme pour par exemple $n = 8$).
- insister sur les raisonnements directs et par contraposition mais aussi sur des raisonnements pour lequel on ne peut rien déduire. Pour ce dernier cas, nous pensons à des raisonnements tels que les suivants où P et Q sont deux propositions :
  - de la vérité des propositions $P \Rightarrow Q$ et Q, on ne peut pas conclure que P est vrai, ni même que P est faux.
  - de la vérité des propositions $P \Rightarrow Q$ et $\neg P$, on ne peut pas conclure que Q est vrai, ni même que Q est faux.
- essayer de mettre en défaut la conception causale qui apparaît largement présente dans notre expérimentation auprès des élèves. Créer une situation qui met en défaut cette conception ne doit pas être évident puisque cette conception semble selon notre expérimentation toujours présente à l'université. La création d'une telle situation renvoie selon nous à un travail de recherche didactique qui doit être effectué en amont pour ensuite être éventuellement testé auprès des élèves du secondaire et des étudiants universitaires. Cette création sort du cadre de ce mémoire et renvoie à des perspectives futures de prolongement.

Cette liste n'est bien sûr pas exhaustive et elle renvoie à tout l'intérêt qu'un enseignant ou futur enseignant doit consacrer en s'interrogeant sur sa manière d'enseigner.

10.4 Portée et limites méthodologiques de notre travail

Notre expérimentation auprès des élèves et étudiants visant à étudier leurs connaissances et conceptions sur l'implication dans le cadre de travail ensembliste n'a pas été une grande réussite. En effet, notre questionnaire ensembliste a montré ses limites lors du dépouillement des réponses apportées par ces deux publics. Le défaut de celui-ci est que les ensembles n'apparaissent pas comme nécessaires pour répondre aux questions et en particulier pour se prononcer sur la vérité des différentes clôtures existentielles et universelles proposées de nos deux énoncés conditionnels.

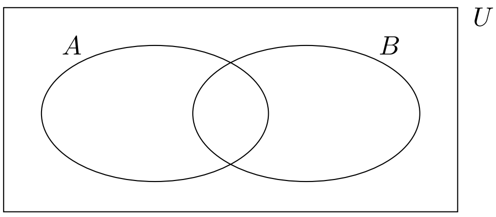
Notre questionnaire contient néanmoins des questions qui sont apparues comme étant pertinentes. Citons par exemple celles où les étudiants doivent hachurer différents ensembles. Ces questions consistent à travailler sur la vérité d'une implication dans le cadre ensembliste. Dans celles-ci, nous demandons aux élèves et étudiants quels sont les ensembles et par extension les éléments x qui rendent vraie l'implication du type $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ associée aux schémas proposés. Ces deux questions nous ont notamment permis d'identifier que la majorité des personnes dans les deux publics interrogés ne travaillent qu'avec des instances de cette implication pour lesquelles la prémisse et la conclusion sont vraies. Autrement dit, la majorité des personnes restreint la vérité de ce type d'implication aux éléments x vérifiant à la fois la propriété P et la propriété Q.

Cependant, l'absence de justifications demandées pour ces deux questions se fait ressentir puisque nous pouvons uniquement faire des suppositions sur le raisonnement des élèves et étudiants. Nous avons par exemple pu faire le lien avec le raisonnement effectué par une même personne pour hachurer des ensembles et donner les nombres naturels entre 0 et 20 qui vérifient la propriété "*si n est un nombre pair alors $n+1$ est un nombre premier*". Mais, cette comparaison s'arrête là et n'a pas touché beaucoup d'étudiants. Nous n'avons par exemple pas pu la réaliser dans le secondaire soit parce que nous n'avons pas eu la possibilité d'interroger les mêmes élèves avec nos deux questionnaires ou soit parce que les réponses apportées à cette question sur les nombres pairs et premiers n'étaient pas suffisamment justifiées. Il serait dès lors intéressant et judicieux de rediffuser ces questions basées sur cette tâche mathématique en demandant explicitement des justifications.

Pour chacun des deux diagrammes de Venn proposé dans notre questionnaire, il est pertinent de s'intéresser aux clôtures universelles et existentielles des énoncés conditionnels associés à ces schémas notamment parce que les quantificateurs sont indissociables du cadre ensembliste. Mais, le problème de notre questionnaire comme nous l'avons déjà dit, réside dans le fait que les ensembles n'apparaissent pas comme nécessaires pour se prononcer sur la vérité des clôtures proposées. Étant nous-mêmes habitué à manier régulièrement des ensembles, nous pensions lors de la création de notre formulaire trouver plus de références à nos schémas ensemblistes dans les réponses des deux publics étudiés. Ceux-ci ont préféré se focaliser sur un registre numérique, ne prendre en compte que les éléments des différents ensembles que nous donnions et ainsi faire peu de références explicites à nos schémas. Une nouvelle perspective pour cette étude des connaissances sur le cadre de travail ensembliste serait de construire un questionnaire dans lequel le recours aux ensembles apparaît comme une nécessité pour y répondre. Nous n'avons à ce jour pas d'idée précise sur comment mettre en œuvre un tel formulaire mais nous pensons qu'un premier point de départ possible pour la création d'un nouveau questionnaire ensembliste pourrait être la version modifiée suivante de notre précédent formulaire.

Question 1
Considérons A et B deux ensembles non vides.
Nous dirons qu'un élément de l'ensemble A vérifie la propriété A. Réciproquement, si un élément vérifie la propriété A, alors il appartient à l'ensemble A. Notez que nous employons une écriture en italique "A" pour symboliser un ensemble et que nous différencions cette notation de celle "A" que nous réservons aux propriétés. Nous suivrons cette convention de notations dans la suite de ce questionnaire.
De la même manière, un élément de B vérifie la propriété B. Réciproquement, si un élément vérifie la propriété B, alors il appartient à l'ensemble B.

Nous avons représenté ci-dessous les ensembles A, B et U. L'ensemble U est un ensemble de référence comprenant notamment tous les éléments des ensembles A et B.



(a) Considérons l'énoncé :

"si x vérifie la propriété A alors x vérifie la propriété B."

Dans le diagramme ci-dessus, hachurez les différentes zones qui rendent vrai cet énoncé.
Justifiez pour chaque zone hachurée pourquoi vous estimez que celle-ci rend vrai l'énoncé proposé. Expliquez aussi pourquoi vous avez rejeté les autres zones.

(b) L'énoncé

"il existe un élément x tel que si x vérifie la propriété A alors x vérifie la propriété B"

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

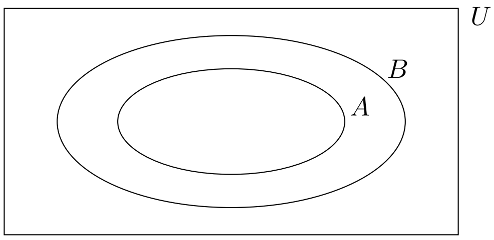
(c) L'énoncé

"pour tout naturel x, si x vérifie la propriété A alors x vérifie la propriété B"

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Question 2
Considérons de nouveau ces deux ensembles A et B.
Rappelons qu'un élément de l'ensemble A vérifie la propriété A et que réciproquement, si un élément vérifie la propriété A, alors il appartient à l'ensemble A.
De la même manière, un élément de B vérifie la propriété B et réciproquement, si un élément vérifie la propriété B, alors il appartient à l'ensemble B.

Nous représentons cette fois-ci nos schémas A et B de la manière suivante. L'ensemble U est ici aussi un ensemble de référence comprenant notamment tous les éléments des ensembles A et B.



(a) Considérons l'énoncé :

"si x vérifie la propriété A alors x vérifie la propriété B."

Dans le diagramme ci-dessus, hachurez les différentes zones qui rendent vrai cet énoncé.
Justifiez pour chaque zone hachurée pourquoi vous estimez que celle-ci rend vrai l'énoncé proposé. Expliquez aussi pourquoi vous avez rejeté les autres zones.
(b) L'énoncé

"il existe un élément x tel que si x vérifie la propriété A alors x vérifie la propriété B"

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

(c) L'énoncé

"pour tout naturel x, si x vérifie la propriété A alors x vérifie la propriété B"

est-il : ☐ vrai ☐ faux ☐ on ne peut pas savoir
Justifiez votre choix en vous aidant du diagramme précédemment hachuré.

Question 3
(a) Pour notre question 2, estimez-vous qu'il existe un lien entre l'énoncé

"pour tout naturel x, si x vérifie la propriété A alors x vérifie la propriété B"

et le schéma ensembliste représenté dans cette même question 2 ?
☐ Oui ☐ Non Expliquez votre réponse.

(b) Retrouvez-vous ce lien à notre question 1, entre ce même énoncé

"pour tout naturel x, si x vérifie la propriété A alors x vérifie la propriété B"

et le schéma ensembliste représenté dans cette même question 1 ?
☐ Oui ☐ Non Expliquez votre réponse.

Dans cette nouvelle version, nous pensons que les élèves et étudiants seront plus enclins à justifier par exemple les clôtures existentielles et universelles des énoncés conditionnels proposés en se référant au schéma ensembliste respectivement donné. La question 3 est quant à elle, une nouvelle formulation de la précédente version de notre question visant à demander à quelle configuration ensembliste les élèves et étudiants associent-ils que l'implication $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble de référence.

Une autre limite dans la réalisation de notre travail est que nous n'avons pas pu recueillir beaucoup de réponses d'enseignants du secondaire à notre questionnaire spécialement créé à leur intention. Malgré le faible nombre de réponses reçues (9 au total), nous avons néanmoins pu constater que certains enseignants faisaient vivre l'implication à la fois sous sa dimension outil comme la majorité des enseignants interrogés mais aussi sous sa dimension objet en dressant notamment la table de vérité de l'implication matérielle "*si P alors Q*" dans un cours de logique des propositions. D'après les réponses apportées, nous avons recensé que 4 professeurs sur 9 interrogés font vivre en classe l'implication sous sa double dimension outil/objet. Nous avons également remarqué que ce cours sur la logique des propositions n'est donné que durant des heures de renforcement mathématique. Cet aspect "point de vue enseignant" est donc limité dans notre travail dans le sens où il n'est représentatif que de l'enseignement et de l'utilisation faits en classe par une minorité de professeurs. Nous sommes conscient que recueillir les avis de 9 enseignants n'a pas le même poids ou la même signification que réunir les témoignages de plus de 42 personnes par exemple. Nous soulevons alors les deux questions ouvertes suivantes :

- nos conclusions suite à la diffusion de notre questionnaire à destination des enseignants changeraient-elles de manière significative en récoltant davantage de réponses ?

– la dimension outil de l'implication serait-elle plus dominante dans les témoignages de nouveaux enseignants comme le laisse penser notre analyse des programmes qui met justement en avant cette dimension et plus précisément le côté outil du langage de l'implication pour s'exprimer ?

Une dernière limite qui apparaît selon nous dans ce travail est que le nombre d'élèves interrogés dans l'enseignement secondaire et ayant suivi une étude explicite et décontextualisée de l'implication notamment en dressant la table de vérité d'une implication matérielle, est très restreint. En effet, lors de notre recherche de classes potentielles pour la diffusion de nos questionnaires, nous avons eu la chance de pouvoir interroger un groupe de 15 élèves ayant reçu un cours sur la logique des propositions en renforcement mathématique. Cette chance s'illustre dans notre travail par les réponses que ces élèves ont apporté à nos deux questionnaires. Plus précisément, ces 15 étudiants inscrits en $5^{\text{ième}}$ année ont tous répondu à notre premier questionnaire et 8 d'entre eux ont participé à notre questionnaire ensembliste. Suite à notre dépouillement des réponses de ces personnes, nous avons constaté qu'il restait apparemment très peu de traces de cette étude explicite de l'expression "*si... alors...*" dans leurs connaissances. À l'exception d'un ou deux candidats qui font allusion partiellement à la table de vérité d'une implication matérielle, nous avons noté que ces élèves n'ont apparemment pas des connaissances sur l'implication très différentes de celles d'autres élèves du secondaire, n'ayant pas reçu a priori une telle étude explicite. Puisque 4 enseignants sur 9 interrogés font vivre d'après leurs témoignages l'implication sous sa double dimension outil/objet, nous pouvons nous poser la question ouverte suivante : les autres élèves du secondaire ayant reçu un enseignement explicite sur l'implication ont-ils des connaissances qui reflètent plus cette étude ou bien comme dans notre expérimentation cet enseignement semble ne rien avoir apporté ? Cette enquête à plus grande échelle auprès d'élèves ayant ou non suivi un cours sur la logique des propositions et ayant notamment rencontré dans celui-ci la table de vérité d'une implication matérielle conduira peut-être à se poser la question ouverte suivante : faut-il envisager un retour de l'enseignement de la logique des propositions dans l'enseignement secondaire ?

10.5 Perspectives de prolongement de notre travail

Comme nous l'avons déjà mentionné, pour étudier les connaissances et conceptions réelles d'une grande majorité des élèves et des étudiants sur le cadre de travail ensembliste de l'implication, la création d'un nouveau questionnaire s'impose. Dans la réalisation de celui-ci, il faudra garder à l'esprit que les ensembles doivent y apparaître comme une nécessité pour répondre à nos questions ou en tout cas comme la manière la plus appropriée de répondre à celles-ci.

En dépouillant nos questionnaires, nous avons trouvé dans les copies des étudiants universitaires quelques références à l'usage de quantificateurs universels ou existentiels bornés. Les étudiants les utilisent par exemple lorsqu'ils mentionnent des propriétés issues de leur cours d'analyse mathématique et s'énoncant sous la forme "*si... alors...*". Nous recensons notamment les formulations "$\forall \varepsilon > 0$" et "$\exists \delta > 0$" dans la définition en $\varepsilon - \delta$ de la continuité en un réel a d'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, donnée par 7 étudiants :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in dom f, \big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big).$$

La présence de quantificateurs bornés dans les copies des élèves de l'enseignement secondaire est très rare ou en tout cas semble bien moins utilisée que chez les étudiants universitaires. Nous relevons néanmoins deux élèves inscrits dans l'option 6 périodes de mathématiques par semaine qui mentionnent "$\forall \varepsilon > 0$" et "$\exists \eta > 0$" dans la définition qu'ils donnent de la limite réelle en un réel a d'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Une autre perspective de prolongement serait donc de s'intéresser à ce phénomène de quantification bornée couramment utilisé par le mathématicien et pouvant se retrouver comme nous le voyons dans ces exemples dans les réponses de certains étudiants. Les travaux didactiques de Durand-Guerrier $\big($[8] et [9]$\big)$ indiquent que cette pratique enseignante peut poser des difficultés aux étudiants notamment dans le jeu de l'apparition/disparition de l'implication entre les expressions mathématiques $\forall x, \big(x \in A \Rightarrow x \in B\big)$ et $\forall x \in A, x \in B$. Bien que non abordée dans ce travail, une voie à explorer serait de tester sur le terrain si cette pratique est source ou non de difficultés pour les étudiants précédemment interrogés. Il serait intéressant de savoir mais, peut-être plus à l'université qu'en secondaire, si les étudiants peuvent éliminer cette quantification bornée en faisant réapparaître pour le quantificateur universel l'implication sous-jacente. Ce jeu de l'apparition/disparition de l'implication entre les expressions mathématiques $\forall x, \big(x \in A \Rightarrow x \in B\big)$

et $\forall x \in A, x \in B$ n'est peut-être pas partagé ou disponible chez les étudiants que nous avons interrogé à l'Université de Mons. A contrario, il est peut-être maîtrisé.

D'autres perspectives pour prolonger ce travail consisteraient à s'intéresser à des notions que nous avons mises de côté pour mieux nous concentrer sur certains aspects. Nous pensons notamment aux notions de condition suffisante, condition nécessaire ou encore condition à la fois suffisante et nécessaire qui selon nous méritent à elles seules un propre questionnaire pour tester la compréhension de celles-ci sur le terrain à la fois en secondaire et à l'université. Les questions ouvertes et très générales à ce sujet qui pourraient être explorées, sont les suivantes :

- les élèves du secondaire peuvent-ils différencier ces notions ?
- qu'en est-il des connaissances des étudiants universitaires face à ces notions ?
- la conception temporelle « *lorsque A implique B, A doit être vérifiée avant B (A se situe dans le temps avant B)* » issue du langage pose-t-elle comme l'affirme Deloustal-Jorrand[3, p. 52] des difficultés à identifier que dans "A implique B", B est une condition nécessaire pour A, ce qui semble sous-entendre que B doit donc être vérifiée avant A.

Annexe A

Construction de l'implication mathématique à partir de l'implication naturelle

Deloustal-Jorrand[4, p. 24] interprète le concept mathématique d'implication comme un modèle du concept de la logique naturelle. Cette interprétation permet de construire la table de vérité de l'implication entre propositions "*si P alors Q*" à partir de la logique naturelle et explique notamment pourquoi la valeur de vérité vraie est attribuée à une implication dont la prémisse est fausse. Nous reprenons dans cette annexe son interprétation. Cette modélisation de l'implication mathématique est notamment conforme à l'implication naturelle sous certains aspects et ne l'est pas sous d'autres comme nous le verrons par après.

Pour réaliser cette modélisation, rappelons quelques notions théoriques. Le mot "*proposition*" est défini par Durand-Guerrier[6] : « *en logique classique, une proposition est une entité linguistique qui porte le vrai ou le faux* » (p. 65). Trois conventions régissent la logique des propositions :

– La bivalence des propositions :
  Une proposition a exactement deux valeurs de vérités : vrai ou faux.
– La propriété du tiers exclu :
  Une proposition est soit vraie soit fausse, mais jamais les deux en même temps.
– La vérifonctionnalité :
  La valeur de vérité d'une phrase ne dépend que des valeurs de vérités des propositions en jeu et de la définition du/des connecteur(s) qui les relient.

Cette dernière convention va à l'encontre de l'utilisation de l'implication dans la logique naturelle puisqu'ici, la valeur de vérité d'une phrase ne dépend ni du contexte, ni de l'existence d'un lien sémantique entre les propositions. C'est là une différence majeure avec l'implication naturelle pour laquelle il peut exister un lien explicatif ou de cause à effet [1] entre la prémisse et la conclusion d'une implication.

Le concept mathématique d'implication étant vu comme une modélisation du concept d'implication de la logique naturelle, il est conforme selon Deloustal-Jorrand sous certains aspects et ne l'est pas sous d'autres. Elle estime que la propriété du tiers exclu paraît adaptée à la logique naturelle, tandis que la vérifonctionnalité ne l'est pas du tout comme nous l'avons déjà dit. La bivalence est parfaitement adaptée à la logique des propositions mais cela ne semble pas être le cas avec la logique naturelle. En effet, pour celle-ci, il se peut qu'à un moment donné dans le temps, on ne puisse pas savoir si un énoncé est systématiquement vrai ou faux. C'est pourquoi, Deloustal-Jorrand estime que la logique naturelle semble être mieux représentée par des énoncés contingents [2]. Selon elle, la phrase "*si je réussis mon examen, alors je m'achète un cadeau*", ne se verra attribuer une valeur de vérité en logique naturelle que lorsque la valeur de vérité de la prémisse sera établie, c'est-à-dire que lorsque l'examen sera passé et que les résultats seront affichés. Avant cet instant, la prémisse apparaît comme un énoncé contingent. Après celui-ci, la prémisse sera déclarée vraie selon que l'on ait réussi ou non l'examen. D'autre part, Deloustal-Jorrand[ibid.] estime que certaines phrases ne sont pas aussi prononcées sur leur caractère de vérité. Elle illustre cette idée avec par exemple la phrase ≪ *Si j'étais riche, je m'achèterais une nouvelle voiture* ≫ (p. 28). La vérité de la prémisse "*si j'étais riche*" dépend ≪ *de la société, du moment, et évidemment de ce que la personne qui prononce cette phrase sous-entend par le mot riche [...] Entre le vrai et le faux, il faut accepter une infinité de nuances dont par exemple, je suis assez riche pour avoir une voiture mais pas assez pour en acheter une nouvelle tout de suite.* ≫ Nous pensons retrouver en logique naturelle, le même phénomène avec l'exemple suivant : "*S'il fait beau alors j'irais promener mon chien*". Nous avons probablement déjà tous croisé des partisans du "*Il fait beau ! Et tous ces nuages représentent quoi pour toi ?*". Comme le précise Deloustal-Jorrand, ces nuances de la langue française s'éloignent de la bivalence des propositions, convention établie en mathématiques dans la logique des propositions.

1. Pour rappel, dans "$A \Rightarrow B$", on peut voir A comme la cause de l'effet B. Ceci peut aussi provoquer une conception temporelle pour "$A \Rightarrow B$". En effet, la cause précède l'effet, et donc la proposition A se situe dans le temps avant la proposition B.

2. L'expression "*énoncé contingent*" a été introduite et définie par Durand-Guerrier[6]. Elle précise qu'≪ *un énoncé est contingent pour un sujet donné à un instant donné t si le sujet n'a pas, à l'instant t, les moyens de savoir si cet énoncé est vrai ou faux* ≫ (p. 70).

Construction de l'implication mathématique : conformité et contradictions avec l'implication naturelle

Deloustal-Jorrand construit l'implication mathématique issue de la logique des propositions comme modèle de l'implication naturelle. Elle définit un connecteur, aussi proche que possible de l'implication naturelle, tout en respectant les conventions de la logique des propositions rappelées ci-avant.

Signalons que le modèle mathématique ne peut pas traduire la notion de causalité associée à une implication naturelle puisque ce modèle doit respecter la convention de vérifonctionnalité.

Deloustal-Jorrand remplit partiellement la table de vérité [3] de l'implication logique à l'aide de la logique naturelle :

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	-
0	0	-

Les deux premières lignes de cette table (c'est-à-dire celles associées au cas d'une prémisse vraie) ont été établies avec la logique naturelle qui reconnaît selon Deloustal-Jorrand que "*si P alors Q*" est vrai dès que P est vrai et que Q est vrai et "*si P alors Q*" est faux lorsque P est vrai et que Q est faux. Il faut maintenant déterminer quelle valeur de vérité attribuer à une implication entre propositions dont la prémisse est fausse.

Deloustal-Jorrand[ibid.] affirme qu'≪ *en se plaçant dans la logique naturelle, on peut montrer que l'implication "A implique B" est équivalente à sa contraposée "(non B) implique (non A)"* ≫ (p. 30). Elle emploie ici le mot "*contraposée*" et admet que celui-ci est déjà un terme issu du modèle mathématique et que dans la logique naturelle, on utilisera plus la règle de déduction du *Modus Tollens.*

Montrons que dans la logique naturelle,

$$A \Rightarrow B \text{ est équivalent à } \neg B \Rightarrow \neg A$$

Dans la démonstration que propose Deloustal-Jorrand[ibid.], elle fait appel à la bivalence des propositions, la propriété du tiers exclus et le fait que $A \Rightarrow B$ est vraie dans la logique naturelle dès que la propriété "*si A est vraie alors B est vraie*" est vérifiée.

3. Nous associons la valeur booléenne 1 à la valeur de vérité "vrai" et la valeur booléenne 0 à la valeur de vérité "faux".

Démonstration. $\underline{\Rightarrow}$
Supposons que $A \Rightarrow B$ est vraie. Montrons que $\neg B \Rightarrow \neg A$ est vraie.
Supposons que $\neg B$ est vraie, c'est-à-dire B est fausse.
Montrons que $\neg A$ est vraie, c'est-à-dire A est fausse.
Par l'absurde, supposons A vraie. Puisque l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, la logique naturelle reconnaît que B est vraie lorsque A est vraie.
On obtient alors une contradiction avec le fait que B soit fausse, donné en hypothèse.
Dès lors, A ne peut être que fausse, c'est-à-dire $\neg A$ est vraie, ce que l'on voulait.
En conclusion, sous les hypothèses $A \Rightarrow B$ est vraie et $\neg B$ est vraie, l'implication de la logique naturelle $\neg B \Rightarrow \neg A$ est vérifiée, puisque lorsque $\neg B$ est vraie, $\neg A$ l'est aussi.
On a donc bien que lorsque l'implication naturelle $A \Rightarrow B$ est vraie, l'implication naturelle $\neg B \Rightarrow \neg A$ est vraie aussi.
$\underline{\Leftarrow}$
Supposons que $\neg B \Rightarrow \neg A$ est vraie. Montrons que $A \Rightarrow B$ est vraie.
Supposons que A est vraie.
Montrons que B est vraie.
Par l'absurde, supposons B fausse, c'est-à-dire $\neg B$ vraie. Puisque l'implication $\neg B \Rightarrow \neg A$ est vraie, la logique naturelle reconnaît que $\neg A$ est vraie lorsque $\neg B$ est vraie.
On obtient alors une contradiction avec le fait que A soit vraie, donné en hypothèse.
Dès lors, B ne peut être que vraie, ce que l'on voulait.
En conclusion, sous les hypothèses $\neg B \Rightarrow \neg A$ est vraie et A est vraie, l'implication de la logique naturelle $A \Rightarrow B$ est vérifiée, puisque lorsque A est vraie, B l'est aussi.
On a donc bien que lorsque l'implication naturelle $\neg B \Rightarrow \neg A$ est vraie, l'implication naturelle $A \Rightarrow B$ est vraie aussi.
On peut donc conclure l'équivalence des implications $A \Rightarrow B$ et $\neg B \Rightarrow \neg A$ dans la logique naturelle. □

Afin que le modèle mathématique de l'implication paraisse conforme à la logique naturelle du point de vue de la contraposée, il doit donc respecter l'équivalence logique entre l'implication et sa contraposée. Pour obtenir cette équivalence, nous devons donc avoir des tables de vérités identiques. Deloustal-Jorrand dresse alors la table suivante :

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	1	0	0	-
1	0	0	1	0	0
0	1	-	0	1	-
0	0	-	1	1	1

Pour obtenir l'équivalence entre l'implication $A \Rightarrow B$ et sa contraposée, il faut donc nécessairement que les tables de vérités soient identiques, c'est-à-dire ici, que les troisièmes et sixièmes colonnes soient deux-à-deux égales. Dès lors, en combinant les valeurs de vérité de ces 2 colonnes, on obtient la table de vérité suivante pour l'implication logique :

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	-
0	0	1

Il reste maintenant à traiter le cas où la prémisse et la conclusion de l'implication sont respectivement fausse et vraie. En utilisant la bivalence des propositions, on obtient deux définitions distinctes possibles de l'implication via les tables de vérités suivantes :

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	**1**
0	0	1

et

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	**0**
0	0	1

Remarquons que dans le tableau de droite, la définition possible de l'implication est symétrique par rapport à A et à B. En effet, lorsque A est vraie et que B est fausse, $A \Rightarrow B$ est fausse. En permutant les rôles de A et B, c'est-à-dire lorsque A devient fausse et B vraie, on obtient le même résultat pour $A \Rightarrow B$, à savoir, que l'implication est fausse. On peut de même, permuter les rôles de A et B lorsque A et B sont vraies, on obtient dans les deux cas, que $A \Rightarrow B$ reste toujours vraie. Il en va de même, en permutant les rôles de A et B lorsque ces deux propositions sont fausses.
Il semble dès lors ne pas avoir de différences de statut entre A et B, on peut permuter invariablement les rôles de prémisse et conclusion. Or ce dernier point est contraire à la logique naturelle malgré les ambiguïtés relevées, pour laquelle les rôles respectifs de prémisse et de conclusion sont distincts. En effet, Deloustal-Jorrand[ibid.] précise que « *considérer l'implication comme une équivalence reviendrait à identifier la cause et l'effet en logique naturelle.*

Or, [. . .] nous avons besoin de les distinguer, ne serait-ce que parce qu'un effet peut avoir des causes très différentes qui ne sont pas toujours équivalentes entre elles et qui peuvent même n'avoir aucun lien. Il est donc nécessaire dans la logique naturelle de bien différencier l'implication et l'équivalence même si, parfois, elles sont confondues dans le contexte »(p. 30).

Le tableau de droite représente la table de vérité de l'équivalence. Dès lors, pour conserver la dissymétrie des propositions A et B et a fortiori pour différencier en mathématiques une implication d'une équivalence, il ne reste que le tableau de gauche comme définition possible pour l'implication. La table de vérité associée à ce connecteur logique est alors :

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Cette définition de l'implication mathématique dans la logique des propositions donne la valeur de vérité vraie à une implication dont la prémisse est fausse. Cette attribution est contraire à la logique naturelle où des implications à prémisse fausse peuvent être déclarées vraies ou fausses selon qu'il existe un lien explicatif pour passer de la prémisse à la conclusion. Cette attribution n'est donc pas arbitraire. Deloustal-Jorrand[ibid.] précise qu'« *il n'existe pas une unique façon de modéliser la logique naturelle, mais ce choix-là permet de rendre compte de la contraposée et de la distinction entre une implication et une équivalence, compte tenu des conventions* [de la logique des propositions rappelées ci-avant] »(p. 31).

Dressons un bilan des aspects conformes et contradictoires de l'implication mathématique avec l'implication naturelle.
Apparaissent comme conformes les aspects :
- tiers exclu ;
- $A \Rightarrow B$ est fausse dès que A est vraie et que B est fausse ;
- $A \Rightarrow B$ est fausse dès que A et B sont vraies ;
- équivalence de l'implication avec sa contraposée :
- distinction implication et équivalence bien que selon le contexte ces deux notions peuvent être confondues.

Les caractéristiques suivantes se révèlent par contre être contradictoires :
- $A \Rightarrow B$ est vraie dès que A est fausse ;
- la vérifonctionnalité.

Bibliographie

[1] Davy E., Fougere D., Boisserie C., Marchand D., Midy J.-P., Mira F., Poulteau P., Rivière N., Rodrigues J. (2001), L'utilisation du "et" et du "ou" en mathématiques, *Repères - IREM*, 42, 45 - 58.

[2] Deloustal-Jorrand V. (1999), *Le concept d'implication : l'objet mathématique, quelques aspects dans les manuels, conceptions de futurs enseignants*, mémoire de D.E.A., Université Joseph Fourier, Grenoble.

[3] Deloustal-Jorrand V. (2001), L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs, *Petit x*, 55, 35 - 70.

[4] Deloustal-Jorrand V. (2004), *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Etude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication*, thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

[5] Douady R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 7/2, 5 - 31.

[6] Durand-Guerrier V. (1999), L'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit x*, 50, 57 - 79.

[7] Durand-Guerrier V. (2003), Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics*, 53, 5 - 34.

[8] Durand-Guerrier V. (2005), Questions de logique dans l'enseignement supérieur. Quelques pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes, *Questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur.*

[9] Durand-Guerrier V. (2005), *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports*

de la théorie élémentaires des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique. Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard, Lyon.

[10] Duval R. (1993), Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?, *Petit x*, 31, 37 - 61.

[11] Quine W.V.O. (1950), *Methods of Logic*, Holt, Rinehart & Winston, New-York.

[12] Quine W.V.O. (1950), *Méthodes de Logique*, Armand Colin, Paris.

[13] RESTODE, *Le serveur pédagogique de l'Enseignement organisé par la Communauté française*, disponible à l'adresse
≪ `http://www.restode.cfwb.be/` ≫.

[14] Vandebrouck et al. (2008), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Octarès.

[15] Rogalski, J. et Rogalski, M. (2004a), Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 9, 175 - 203.

[16] Rogalski, J. et Rogalski, M. (2004b), Traitement de la validité de l'implication par des étudiants, corrélation avec leurs performances mathématiques, liens avec diverses questions de psychologie cognitive, Durand-Guerrier, V. et Tisseron, C. (eds.), Actes du Séminaire National de Didactiques des Mathématiques 2003, IREM de Paris 7, 227 - 256.

[17] Russell B. (1903), *Les principes de la mathématique*, traduction française in *Russell, Ecrits de logique philosophique*, PUF : Paris 1989.

[18] SeGEC, *Le serveur du Secrétariat Général de l'Enseignement Catholique en communautés française et germanophone de Belgique*, disponible à l'adresse
≪ `http://enseignement.catholique.be/segec/` ≫.

[19] Stylianides A., Stylianides G. et Philippou G. (2004), Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts, *Educational Studies in Mathematics*, 55, 133 - 162.

[20] Troestler C., *Introduction à la logique du premier ordre et à la théorie naïve des ensembles*, disponible dans sa version la plus récente à l'adresse
≪ `http://w3.umh.ac.be/pub/ftp_san/courses/Logic.pdf` ≫.