Algèbre II, juin 2019

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $G = \langle I, J, D\rangle$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\langle I, J\rangle \lhd G$ et déterminer l'ordre de G.
2. Montrer que $\langle I, D\rangle \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Déterminer $Z_G(D)$ et $Z(G)$.
4. Déterminer $D(G)$. Existe-t-il un morphisme surjectif $G \twoheadrightarrow \mathbb{F}_5^\times$?

Exercice 2. On rappelle que A_4 contient quatre 3-Sylow et un unique 2-Sylow P_0.

1. Déterminer tous les 3-Sylow de S_4.
2. Soit P un 2-Sylow de S_4. Montrer que $PA_4 = S_4$ et que $P \cap A_4 = P_0$.
3. Déterminer tous les 2-Sylow de S_4.

Exercice 3. Un groupe fini est *hypercyclique* si tous ses sous-groupes de Sylow sont cycliques.

1. Donner un exemple de groupe hypercyclique non cyclique.

Soient G un groupe fini hypercyclique, p un nombre premier, et $r \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que tous les sous-groupes de G sont hypercycliques.
3. Montrer que tous les quotients de G sont hypercycliques.
4. Montrer que tous les sous-groupes de G d'ordre p^r sont conjugués.