Algèbre III, janvier 2019.

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_{24})$.

1. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\zeta_3\,,\zeta_8) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}\,,\sqrt{3}\,,i)$ et calculer $[K:\mathbb{Q}]$.
2. Montrer que $G(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Combien y a-t-il de sous-corps F de K tels que $[F:\mathbb{Q}] = 2$?

Exercice 2. Soient K le corps de décomposition de $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$ et $L = K(\sqrt{2}\,,\sqrt{3})$.

1. Montrer que l'extension $L/\mathbb{Q}$ est galoisienne et calculer son degré.
2. Déterminer les sous-corps F de L tels que $[F:\mathbb{Q}] = d$ pour $d = 3$ et $d = 8$.

Exercice 3. Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ irréductibles ayant le même corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$. Les polynômes P et Q ont-ils le même degré ?

Exercice 4. Soient $\alpha \in \overline{K}$ et L la clôture galoisienne de $K(\alpha)$ sur K.

1. Soit H un sous-groupe normal de $G(L/K)$ fixant α. Montrer que H est trivial.
2. Soit p un diviseur premier de $[L:K]$. Montrer qu'il existe un sous-corps $K \subseteq F \subseteq L$ tel que $[L:F] = p$ et $L = F(\alpha)$.