Algèbre III, juin 2017.

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $\zeta = e^{2i\pi/11} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

1. Déterminer le trellis des sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta)$ en indiquant les degrés.
2. Pour $n \in \mathbb{Z}$ soit
$$\alpha_n = \sum_{0 \leq k \leq 9} \zeta^{2^{nk}} .$$
Déterminer le degré de $\mathbb{Q}(\alpha_n)$ sur $\mathbb{Q}$ pour $n = 1, 5$ et 2.

Exercice 2. Soit K le corps de décomposition de $X^7 - 2$ sur $\mathbb{Q}$. Le treillis des sous-corps du corps de décomposition de $X^7 - 1$ sur $\mathbb{Q}$ est supposé connu.

1. Déterminer le nombre de sous-corps de K de degré d sur $\mathbb{Q}$ pour $d = 6, 14$ et 2.
2. Parmi les extensions considérées ci-dessus, lesquelles sont galoisiennes sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 3. Soient L/K une extension finie galoisienne et F/K une extension finie.

1. Montrer que l'extension LF/F est galoisienne.
2. Soit $\alpha \in L$. Montrer que $P_{\alpha,F}(X) = P_{\alpha,L\cap F}(X)$.
3. Montrer que $G(LF/F) \simeq G(L/L \cap F)$.

Exercice 4. Soit L/K une extension finie galoisienne. Soit F un sous-corps de L/K tel que l'extension F/K est galoisienne et $\mathrm{pgcd}([L : F], [F : K]) = 1$. Montrer que si E est un sous-corps de L/K tel que $[F : K]$ divise $[E : K]$ alors $F \subseteq E$.