Algèbre III, juin 2018.

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_{15})$. Le groupe de Galois et le treillis de $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ est supposé connu.

1. Montrer que $G(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Déterminer le nombre de sous-corps de K de degré 4 sur $\mathbb{Q}$, et montrer qu'ils contiennent tous $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Quels sont ceux contenant trois extensions de degré 2 sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 2. Soit L la clôture galoisienne de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3})$. Le treillis de $\mathbb{Q}(\zeta_{12})/\mathbb{Q}$ est supposé connu. Déterminer le nombre de sous-corps de L de degré d sur $\mathbb{Q}$ pour $d = 8$ et $d = 3$, et préciser lesquels sont galoisiens sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 3. Soient L_1/K et L_2/K des extensions finies galoisiennes.

1. Montrer que l'extension $L_1 L_2/K$ est galoisienne.
2. Montrer que l'extension $L_1 \cap L_2/K$ est galoisienne.

Exercice 4.

1. Soit L/K une extension finie galoisienne contenant exactement deux sous-corps. Montrer que le degré de L sur K est premier.
2. Le résultat ci-dessus subsiste-t-il si l'on ne suppose plus L/K galoisienne ?
   (On pourra admettre que pour tout $n \geq 1$ il existe une extension galoisienne dont le groupe de Galois est isomorphe à S_n.)