Algèbre III, août 2017.

Documents autorisés.

Exercice 1.

1. Déterminer tous les sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ en précisant leur degré sur $\mathbb{Q}$ et donner un élément primitif pour chacun d'eux.
2. Déterminer le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps de décomposition de $X^8 - 2$.

Exercice 2. Soit K le corps de décomposition de $(X^3 - 3)(X^4 - 4)$ sur $\mathbb{Q}$. Le treillis des sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_{12})$ est supposé connu.

1. Montrer que $[K : \mathbb{Q}] = 24$.
2. Déterminer tous les sous-corps F de K tels que $[F : \mathbb{Q}] = 8$.
3. Déterminer tous les sous-corps E de K tels que $[E : \mathbb{Q}] = 3$.

Exercice 3. Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ contient un unique sous-corps F tel que $[F : \mathbb{Q}] = 2$.
2. Montrer que $F \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si $p \equiv 1 \bmod 4\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit F/K une extension finie. Soit $I_K(F)$ l'ensemble des sous-corps de $\overline{K}$ contenant K qui sont K-isomorphes à F. Soient L la clôture galoisienne de F/K et $G = G(L/K)$, $H = G(L/F)$. Montrer que l'application $G \to I_K(F)$, $\sigma \mapsto \sigma(F)$ induit une bijection $G/N_G(H) \simeq I_K(F)$.