Algèbre III, août 2018.

Documents autorisés.

Exercice 1.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\zeta_{13})$ contient un unique sous-corps F de degré 2 sur $\mathbb{Q}$ et que $F \subset \mathbb{R}$.
2. Déterminer le degré de $\mathbb{Q}(\zeta_{39})$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 2. Soit K le corps de décomposition de $(X^5 - 2)(X^2 + 5)$ sur $\mathbb{Q}$. Le treillis de $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ est supposé connu. Déterminer le nombre de sous-corps de K de degré d sur $\mathbb{Q}$ pour $d = 8$, $d = 5$ et $d = 4$; préciser lesquels sont galoisiens sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 3. Soit L/K une extension finie galoisienne. Pour tout $\alpha \in L$ on pose

$$N_{L/K}(\alpha) = \prod_{\sigma \in G(L/K)} \sigma(\alpha).$$

1. Montrer que $N_{L/K}(\alpha) \in K$ pour tout $\alpha \in L$.
2. Montrer que si $L = K(\alpha)$ alors $N_{L/K}(\alpha) = (-1)^{[L:K]} P_{\alpha,K}(0)$.
3. Soit p un nombre premier. Déterminer $N_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}(\zeta_p - 1)$.

Exercice 4. Soit p un nombre premier.

1. Soit L/K une extension finie galoisienne telle que p divise $[F : K]$ pour tout sous-corps F de L/K tel que $F \neq K$. Montrer que le degré de L sur K est une puissance de p.
2. Le résultat ci-dessus subsiste-t-il si l'on ne suppose plus L/K galoisienne ?