Algèbre III, août 2019.

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit K le corps de décomposition de $(X^4-3)(X^6-3)$ sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que ζ_6 appartient à la clôture galoisienne de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ sur $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer le degré de K sur $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer les sous-corps de K de degré 8 et de degré 3 sur $\mathbb{Q}$. Sont-ils galoisiens sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 2. Soit L/K une extension galoisienne de degré 42.

1. Montrer que L contient une unique extension F/K de degré 6, et qu'elle est galoisienne.
2. Donner deux exemples d'une telle extension L/K de groupes de Galois non isomorphes.

Exercice 3. Soient L/K une extension finie galoisienne et F/K une extension finie.

1. Soit $\alpha \in L$. Montrer que le polynôme minimal de α sur F est dans $L[X]$.
2. Montrer que si $L \cap F = K$ alors $[LF : F] = [L : K]$.
3. Le résultat ci-dessus subsiste-t-il si l'on ne suppose plus L/K galoisienne ?

Exercice 4. Soient L/K une extension finie galoisienne et p un nombre premier.
Soient $K \subseteq F \subseteq E \subseteq L$ des sous-corps tels que les extensions F/K et E/F sont galoisiennes, $[L : E]$ est une puissance de p, et p ne divise pas $[E : F]$. Montrer que l'extension E/K est galoisienne.