Introduction à la géométrie algébrique
Janvier 2008

Durée : 4 heures. Documents autorisés.

Exercice 1. Soient A un anneau commutatif et J un idéal de A.

1. Soit B un sous-anneau de A.
   (a) Montrer que $J \cap B$ est un idéal de B.
   (b) Montrer que si J est premier dans A alors $J \cap B$ est premier dans B.
2. Soit I un idéal de A tel que $I \subseteq J$. Montrer que J est un idéal premier (resp. maximal) de A si et seulement si J/I est un idéal premier (resp. maximal) de A/I.

Soit J un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$.

3. (a) Montrer que $J \cap \mathbb{Z} = (0)$ ou $J \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ avec p premier dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $J \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ avec p premier si et seulement si $p \in J$.
4. On suppose $J \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ avec p premier. Soit $I = p\mathbb{Z}[X]$ l'idéal engendré par p dans $\mathbb{Z}[X]$.
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}[X]/I \simeq \mathbb{F}_p[X]$.
   (b) Montrer que si $I \neq J$ alors l'idéal J/I est engendré par un élément irréductible.
   (c) Montrer que $J = p\mathbb{Z}[X]$ ou $(P(X), p)$ avec $P(X) + p\mathbb{Z}[X]$ irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.
5. Déterminer l'ensemble des idéaux maximaux $\mathfrak{M}$ de $\mathbb{Z}[X]$ tels que $\mathfrak{M} \cap \mathbb{Z} \neq (0)$.

Exercice 2. Soient $P(X,Y) = Y^4 - 7X^3 - 3X^2 + 81$ et $Q(X,Y) = 2Y^4 - 14X^3 - 6X^2 \in \mathbb{Q}[X,Y]$.

1. Montrer que $7X^3 + 3X^2 - 81$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. Montrer que $P(X,Y)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X,Y]$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}[X,Y]/(P)$ est intègre.
4. Montrer que $\mathbb{Q}[X,Y]/(PQ) \simeq \mathbb{Q}[X,Y]/(P) \times \mathbb{Q}[X,Y]/(Q)$.
5. Montrer que $\mathbb{Q}[X,Y]/(Q)$ est intègre. L'anneau $\mathbb{Q}[X,Y]/(PQ)$ est-il intègre ?

Exercice 3. Soient $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine du polynôme $X^2 + X + 1$ et $\mathbb{Z}[\zeta] = \{a + \zeta b \; ; \; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on pose $N(a + \zeta b) = a^2 - ab + b^2$.

1. (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\zeta]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer que $\mathbb{Z}[\zeta]$ est stable par conjugaison complexe.
2. (a) Soient $z, z' \in \mathbb{Z}[\zeta]$. Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$.
   (b) Montrer que $\mathbb{Z}[\zeta]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[\zeta] \mid N(z) \in \mathbb{Z}^\times\}$.
3. (a) Montrer que $1 - \zeta$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[\zeta]$.
   (b) Montrer que 3 est réductible dans $\mathbb{Z}[\zeta]$.