Introduction à la géométrie algébrique
Janvier 2010

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient A un anneau commutatif non nul et I un idéal de A tel que $I \neq A$. Soit

$$S \underset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid a - 1 \in I\}.$$

1. Montrer que S est une partie multiplicativement stable de A.
2. Soit J un idéal de A. Montrer que $I + J = A$ si et seulement si $J \cap S \neq \varnothing$.
3. Soit J un idéal de A tel que $I + J = A$. Montrer que $S^{-1}J = S^{-1}A$.
4. Montrer que $S^{-1}I \neq S^{-1}A$.

On suppose que l'idéal I est maximal. Soit J un idéal de A.

5. Montrer que $I + J = A$ si et seulement si J n'est pas contenu dans I.
6. Montrer que $S^{-1}J \subseteq S^{-1}I$ ou $S^{-1}J = S^{-1}A$.

Exercice 2. Soient $n \geq 1$ entier et $P_n(X, Y) = X^n + Y^n - 1 \in \mathbb{Q}[X, Y]$.

1. Montrer que $P_n(X, Y)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X, Y]$.
2. Montrer que l'anneau $A = \mathbb{Q}[X, Y]/(P_n)$ est intègre.
3. Soit $\varphi : \mathbb{Q}[X, Y] \to \mathbb{Q}[X]/I$, $P(X, Y) \mapsto P(X, 0) + I$, où $I = (X^n - 1) \subset \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi) = J + (Y)$ où J est l'idéal de $\mathbb{Q}[X, Y]$ engendré par $X^n - 1$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}[X, Y]/(Y, P_n(X, Y)) \simeq \mathbb{Q}[X]/(X^n - 1)$.

Soit $\pi : \mathbb{Q}[X, Y] \to \mathbb{Q}[X, Y]/(P_n) = A$ le morphisme de projection modulo l'idéal (P_n).

5. Montrer que $(\pi(Y)) = (Y, P_n(X, Y))/(P_n(X, Y))$.
6. Montrer que $A/(\pi(Y)) \simeq \mathbb{Q}[X]/(X^n - 1)$.
7. Montrer que $A/(\pi(Y)) \simeq \mathbb{Q} \times B$ où B est un anneau non nul si $n \geq 2$.
8. On suppose que n est premier. Montrer que $A/(\pi(Y)) \simeq \mathbb{Q} \times K$ où K est un corps.

Exercice 3. Soit $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $i\sqrt{7}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,] = \{a + i\sqrt{7}\,b\,;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Soit $N : \mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,] \to \mathbb{N}$ l'application $z \mapsto z\bar{z}$ où $\bar{z}$ est le conjugué complexe de z.

2. Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$ pour tous $z, z' \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,]$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,] \mid N(z) = 1\}$.
4. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,]^\times = \{\pm 1\}$.
5. Soit $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,]$ tel que $z \notin \mathbb{Z}$. Montrer que $N(z) \geq 7$.
6. Montrer que $3 + i\sqrt{7}$ et $3 - i\sqrt{7}$ sont irréductibles non associés dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,]$.

On admet que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,]$ est un anneau euclidien.

7. Montrer que $X^4 + 64X^3 + 48X^2 + 32X + 16$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}[i\sqrt{7}\,])[X]$.
8. Montrer que $X^4 + 64X^3 + 48X^2 + 32X + 16$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.