Introduction à la géométrie algébrique, janvier 2011

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient A, B des anneaux commutatifs, $f, g : A \to B$ des morphismes d'anneau, et

$$C = \{(a, b) \in A \times A \mid f(a) = g(b)\}.$$

Soient les applications $\varphi : A \times A \to B \times B$, $(a, b) \mapsto (f(a), g(b))$ et $\delta : B \to B \times B$, $b \mapsto (b, b)$.

1. Montrer que φ et δ sont des morphismes d'anneau.
2. Montrer que C est un sous-anneau de $A \times A$ contenant $\operatorname{Ker}(\varphi)$.
3. Montrer que $\varphi(C) = \delta(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g))$.
4. Montrer que $C/\operatorname{Ker}(f) \times \operatorname{Ker}(g) \simeq \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)$.

Soient K un corps et $a, b \in K$. Soient les idéaux $(X - a)$ et $(X - b)$ de $K[X]$.

5. Montrer que $I = (X - a) \times (X - b)$ est un idéal non premier de $K[X] \times K[X]$.
6. Montrer que $D = \{(P(X), Q(X)) \in K[X] \times K[X] \mid P(a) = Q(b)\}$ est un sous-anneau de $K[X] \times K[X]$ contenant I.
7. Montrer que I est un idéal maximal de D.
8. Montrer que $E = \{P(X, Y) \in K[X, Y] \mid P(a, 0) = P(b, 1)\}$ est un sous-anneau de $K[X, Y]$ contenant l'idéal $J = (X - a\,,\, Y) \cap (X - b\,,\, Y - 1)$ de $K[X, Y]$.
9. Montrer que J est un idéal maximal de E non premier dans $K[X, Y]$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ l'anneau des entiers de Gauss.

1. Soit $f : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ le morphisme d'anneau donné par $P(X) \mapsto P(i)$. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = (X^2 + 1)$.
2. Soient $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ et $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ non nuls tels que $P(X) = (X^2+1)Q(X)$. Montrer que $c\,(Q) \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1) \simeq \mathbb{Z}[i]$.

Soient p un nombre premier et $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

4. Soit $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]/(X^2+1)$ le morphisme d'anneau $P(X) \mapsto \bar{P}(X) \bmod (X^2+1)$, où $\bar{P}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ est le polynôme obtenu en réduisant modulo $p\mathbb{Z}$ les coefficients de $P(X)$. Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi) = (X^2 + 1\,,\, p)$.
5. Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(p) \simeq \mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1)$.
6. Montrer que p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Exercice 3.

1. Montrer que $4X^3 - 5X^2 + 8$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. Montrer que $4X^3Y - 5X^2Y^2 + 5Y + 3$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X, Y]$.
3. Montrer que $4X^3Y - 5X^2Y^2 + 8Y^4 + 5X^2 - 8$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X, Y]$.