Introduction à la géométrie algébrique, août 2008

Durée : 4 heures. Documents autorisés.

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif.

1. Soient $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs, J un idéal de B, et $\varphi^{-1}(J) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in J\}$. Montrer que si J est un idéal premier de B alors $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal premier de A.
2. Soient I un idéal de A et $\pi : A \to A/I, a \mapsto a + I$ le morphisme de projection. Soient $a \in A$ et J l'idéal engendré par $a+I$ dans A/I. Montrer que $\pi^{-1}(J) = (a, I)$.
3. Montrer que l'idéal $(X^2 + 1, 3)$ est premier dans $\mathbb{Z}[X]$. Est-il maximal ?
4. Soit $\mathbb{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss. Montrer que 3 est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 2.

1. Étudier l'irréductibilité des polynômes suivants dans $\mathbb{Q}[X, Y]$.
   (a) $X^2 + Y^2$
   (b) $X^2 + Y^2 + X$
   (c) $X^2 + Y^2 + X + 1$
   (d) $X^2 + Y^2 + XY$.
2. Même question dans $\mathbb{C}[X, Y]$.

Exercice 3. Soit p un nombre premier. Pour $a \in \mathbb{Z}$ on pose $\bar{a} = a + p\mathbb{Z} \in \mathbb{F}_p$. Soit $\pi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]$ le morphisme d'anneaux donné par $\sum_{0\leq k\leq n} a_k X^k \mapsto \sum_{0\leq k\leq n} \bar{a}_k X^k$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_p$ soit $\xi_\alpha : \mathbb{F}_p[X] \to \mathbb{F}_p, P(X) \mapsto P(\alpha)$ le morphisme d'évaluation en α. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et

$$\mathfrak{M}_a \underset{\text{def}}{=} \{P(X) \in \mathbb{Z}[X] \mid p \text{ divise } P(a)\}.$$

1. (a) Montrer que $\mathfrak{M}_a = \mathrm{Ker}(\xi_{\bar{a}} \circ \pi)$.
   (b) Montrer que $\mathfrak{M}_a$ est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[X]$.
   (c) Montrer que $\pi(\mathfrak{M}_a) = \mathrm{Ker}(\xi_{\bar{a}})$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathfrak{M}_a = \mathfrak{M}_b$ si et seulement si $\bar{a} = \bar{b}$.
3. Montrer que $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \mathrm{Ker}(\xi_\alpha) = (X^p - X)$.
4. Montrer que

$$\bigcap_{a\in\mathbb{Z}} \mathfrak{M}_a = \{P(X) \in \mathbb{Z}[X] \mid p \text{ divise } P(0), \ldots, P(p-1)\} = (X^p - X, p).$$