Introduction à la géométrie algébrique
Août 2009

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif. Soient I un idéal de A, $a \in A$, et

$$(I : a) \underset{\text{def}}{=} \{b \in A \mid ab \in I\}.$$

1. (a) Montrer que $(I : a)$ est un idéal de A.
   (b) Montrer que $I \subseteq (I : a)$.
   (c) Montrer que si $a \in A^\times$ alors $(I : a) = I$.
   (d) Montrer que $(I : a) = A$ si et seulement si $a \in I$.
2. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrer que $\{a \in A \mid (\mathfrak{p} : a) = \mathfrak{p}\} = A \setminus \mathfrak{p}$.

Soient S un sous-ensemble non vide de A et

$$(I : S) \underset{\text{def}}{=} \{b \in A \mid \forall\, a \in S,\ ab \in I\}.$$

3. (a) Montrer que $(I : S)$ est un idéal de A.
   (b) Montrer que $(I : S) = \big(I : (S)\big)$.
   (c) Montrer que $(I : A) = I$ et $(I : I) = A$.
4. Soit J un idéal de A.
   (a) Montrer que $(I : J) = A$ si et seulement si $J \subseteq I$.
   (b) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrer que $(\mathfrak{p} : J) = \mathfrak{p}$ si et seulement si $J \not\subseteq \mathfrak{p}$.
   (c) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Montrer que $(\mathfrak{p} : \mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$ si et seulement si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$.

Exercice 2. Soient A un anneau commutatif intègre et $K = \operatorname{Frac} A$. Soit l'application

$$\rho : A[X] \longrightarrow K(X)$$
$$P(X) \longmapsto X^{\deg P}\, P\Big(\frac{1}{X}\Big),$$

avec la convention $X^{-\infty} = 0$. Soient $P(X), Q(X) \in A[X]$.

1. Montrer que $\rho(P) \in A[X]$ et que ρ n'est pas un morphisme d'anneau.
2. Montrer que $\rho(PQ) = \rho(P)\rho(Q)$.
3. On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer que $\deg \rho(P) = \deg P$ et que $\rho^2(P) = P$.
4. Soit $P(X) \in A[X]$ tel que $P(X) \neq X$. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $A[X]$ si et seulement si $\rho\big(P(X)\big)$ l'est.

Exercice 3. Soit $\mathbb{Z}[i\,]$ l'anneau des entiers de Gauss.

1. Soit $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la conjugaison complexe.
   (a) Montrer que la restriction de σ à $\mathbb{Z}[i\,]$ est un automorphisme d'anneau.
   (b) Montrer que $\mathbb{Z}[i\,]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[i\,] \mid x\sigma(x) = 1\}$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{Z}[i\,]$ tel que $x\sigma(x) = p$ premier. Montrer que x est irréductible dans $\mathbb{Z}[i\,]$.
   (d) Montrer que $1 + i$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i\,]$ et que $1 - i = u(1 + i)$ avec $u \in \mathbb{Z}[i\,]^\times$.
2. Soit $P(X) = 4X^5 + 4X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.
   (a) Montrer que $(1 + i)P\big(\frac{X}{1+i}\big) \in \mathbb{Z}[i\,][X]$.
   (b) Montrer que $(1 + i)P\big(\frac{X}{1+i}\big)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}(i)[X]$.
   (c) Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}(i)[X]$.
   (d) Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
   (e) Montrer que $X^5 + 4X^3 + 4$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.